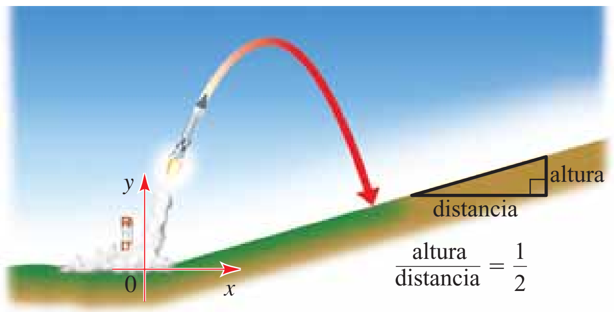
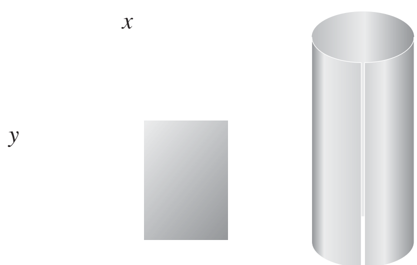
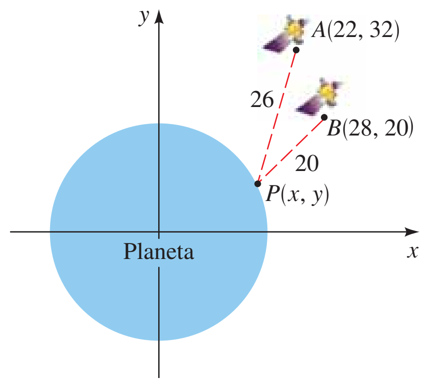
45. Vuelo de un cohete Una colina está inclinada de modo que su "pendiente" es $\frac{1}{2}$, como se ve en la figura siguiente. Introducimos un sistema de coordenadas con el origen en la base de la colina y con las escalas en los ejes medidas en metros. Un cohete es lanzado desde la base de la colina de forma tal que su trayectoria es la parábola $y = -x^2 + 401x$. ¿En qué punto cae el cohete en la ladera? ¿A qué distancia está este punto de la colina (al centímetro más cercano)?



46. Construcción de una chimenea de estufa Una hoja metálica rectangular con área de 1200 pulg.^{2} ha de doblarse en una sección cilíndrica de chimenea de estufa con volumen de 600 pulg.^{3} ¿Cuáles son las longitudes de los lados de la hoja metálica?



47. Sistema de Posicionamiento Global (GPS) El Sistema de Posicionamiento Global determina la ubicación de un objeto a partir de sus distancias a satélites en órbita alrededor de nuestro planeta. En la situación bidimensional simplificada que se ve en la figura siguiente, determine las coordenadas de P por el hecho de que P está a 26 unidades del satélite A y 20 unidades del satélite B.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

48. Intersección de una parábola y una recta En una hoja de papel de gráficas, o usando calculadora electrónica, trace la parábola $y = x^2$. A continuación trace las gráficas de la ecuación lineal $y = x + k$ en el mismo plano de coordenadas para varios valores de k. Trate de escoger valores de k para que la recta y la parábola se crucen en dos puntos para algunos de los valores de k y no para otros. ¿Para qué valor de k hay exactamente un punto de intersección? Use los resultados de su experimento para hacer una conjetura acerca de los valores de k para los que el sistema siguiente tiene dos soluciones, una solución y ninguna solución. Demuestre su conjetura.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + k \end{cases}$$

49. Algunos sistemas más engañosos Siga las sugerencias y resuelva los sistemas.

(a) $\begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ 2\log x - \log y = 0 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Sume las ecuaciones.]

(b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 4^x + 4^y = 68 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Nótese que $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$.]

(c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 387 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Factorice el lado izquierdo de la segunda ecuación.]

(d) $\begin{cases} x^2 + xy = 1 \\ xy + y^2 = 3 \end{cases}$ [*Sugerencia:* Sume las ecuaciones y factorice el resultado.]

10.9 SISTEMAS DE DESIGUALDADES

Gráfica de una desigualdad ▶ Sistemas de desigualdades ▶ Sistemas de desigualdades lineales ▶ Aplicación: regiones factibles

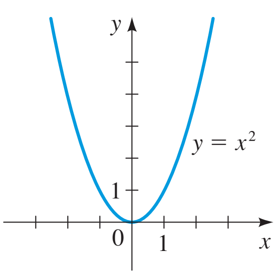


FIGURA 1

En esta sección estudiamos sistemas de desigualdades con dos variables desde un punto de vista gráfico.

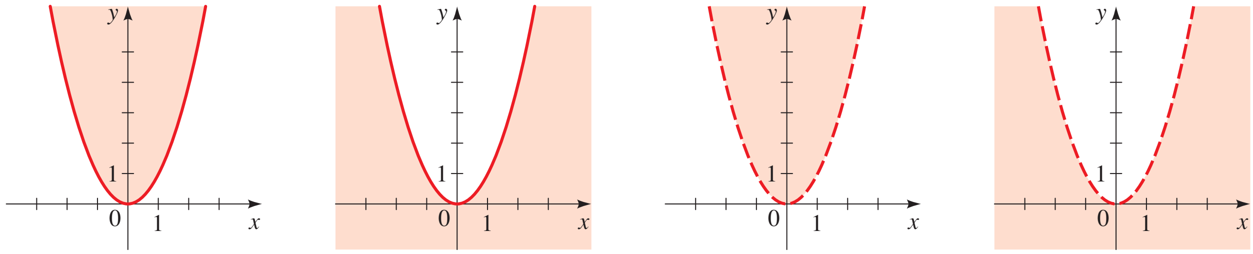
▼ Gráfica de una desigualdad

Empezamos por considerar la gráfica de una sola desigualdad. Ya sabemos que la gráfica de $y = x^2$, por ejemplo, es la *parábola* de la Figura 1. Si sustituimos el signo igual por el símbolo $\geq$, obtenemos la *desigualdad*

$$y \geq x^2$$

Su gráfica está formada no sólo por la parábola de la Figura 1, sino también por todo punto cuya coordenada y sea *más grande* que x^2. Indicamos la solución en la Figura 2(a) sombreando los puntos *arriba* de la parábola.

Análogamente, la gráfica de $y \leq x^2$ en la Figura 2(b) está formada por todos los puntos en y *debajo de* la parábola. No obstante, las gráficas de $y > x^2$ y $y < x^2$ no incluyen los puntos en la parábola en sí, como está indicado por las curvas de líneas interrumpidas de las Figuras 2(c) y 2(d).



(a) $y \geq x^2$ (b) $y \leq x^2$ (c) $y > x^2$ (d) $y < x^2$

FIGURA 2

La gráfica de una desigualdad, en general, consta de una región del plano cuyo límite es la gráfica de la ecuación obtenida al sustituir el signo de desigualdad ($\geq$, $\leq$, $>$ o $<$) por un signo igual. Para determinar cuál lado de la gráfica da el conjunto de solución de la desigualdad, necesitamos sólo verificar **puntos de prueba**.

GRÁFICA DE DESIGUALDADES

Para graficar una desigualdad, ejecutamos los siguientes pasos.

1. **Graficar la ecuación.** Grafique la ecuación correspondiente a la desigualdad. Use la curva interrumpida para $>$ o $<$ y una curva continua para $\leq$ o $\geq$.
2. **Pruebe puntos.** Pruebe un punto en cada región formada por la gráfica del Paso 1. Si el punto satisface la desigualdad, entonces todos los puntos en esa región satisfacen la desigualdad. (En ese caso, se debe sombrear la región para indicar que es parte de la gráfica.) Si el punto de prueba no satisface la desigualdad, entonces la región no es parte de la gráfica.

EJEMPLO 1 | Gráficas de desigualdades

Grafique cada una de las desigualdades siguientes.

(a) $x^2 + y^2 < 25$ **(b)** $x + 2y \geq 5$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Los puntos en la circunferencia misma no satisfacen la desigualdad porque es de la forma $<$, de modo que graficamos la circunferencia con una curva interrumpida, como se ve en la Figura 3.

Para determinar si el interior o el exterior de la circunferencia satisface la desigualdad, usamos los puntos de prueba (0, 0) en el interior y (6, 0) en el exterior. Para hacer esto, sustituimos las coordenadas de cada punto en la desigualdad y comprobamos si el resultado satisface la desigualdad. (Observe que *cualquier* punto dentro o fuera de la circunferencia pueden servir como punto de prueba. Hemos escogido estos puntos para mayor sencillez.)

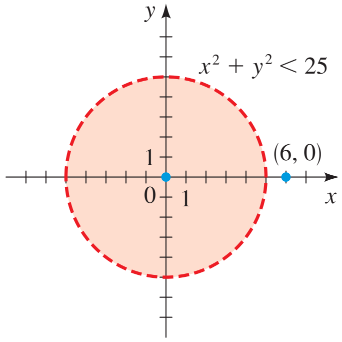


FIGURA 3

Punto de prueba	$x^2 + y^2 < 25$	Conclusión
(0, 0)	$0^2 + 0^2 = 0 < 25$	Parte de gráfica
(6, 0)	$6^2 + 0^2 = 36 \not< 25$	No es parte de gráfica

Entonces, la gráfica de $x^2 + y^2 < 25$ es el conjunto de todos los puntos *dentro* de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ (vea Figura 3).

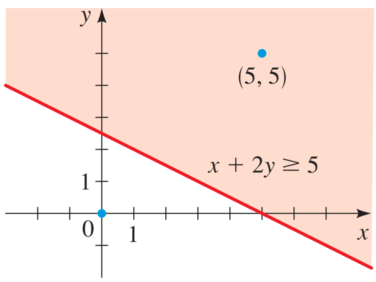


FIGURA 4

(b) La gráfica de $x + 2y = 5$ es la recta mostrada en la Figura 4. Usamos los puntos de prueba (0, 0) y (5, 5) en lados opuestos de la recta.

Punto de prueba	$x + 2y \geq 5$	Conclusión
(0, 0)	$0 + 2(0) = 0 \not\geq 5$	No es parte de gráfica
(5, 5)	$5 + 2(5) = 15 \geq 5$	Parte de gráfica

Nuestra prueba muestra que los puntos *arriba* de la recta satisfacen la desigualdad.

En forma opcional, podríamos poner la desigualdad en forma de pendiente e intersección y graficarla directamente:

$$x + 2y \geq 5$$
$$2y \geq -x + 5$$
$$y \geq -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}$$

De esta forma vemos que la gráfica incluye todos los puntos cuyas coordenadas y son *más grandes* que las de la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; esto es, la gráfica está formada por los puntos *en o arriba* de esta recta, como se muestra en la Figura 4.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **15**

Sistemas de desigualdades

A continuación consideramos *sistemas* de desigualdades. La solución de tal sistema es el conjunto de todos los puntos del plano de coordenadas que satisface toda desigualdad del sistema.

EJEMPLO 2 | Un sistema de dos desigualdades

Grafique la solución del sistema de desigualdades y asigne coordenadas a sus vértices.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Éstas son las dos desigualdades del Ejemplo 1. En este ejemplo deseamos graficar sólo aquellos puntos que simultáneamente satisfagan ambas desigualdades. La solución está formada por la intersección de las gráficas del Ejemplo 1. En la Figura 5(a) mostramos las dos regiones en el mismo plano de coordenadas (en colores diferentes), y en la Figura 5(b) mostramos su intersección.

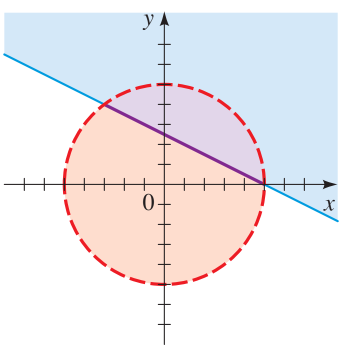
Vértices Los puntos $(-3, 4)$ y $(5, 0)$ de la Figura 5(b) son los **vértices** del conjunto de solución. Se obtienen al resolver el sistema de *ecuaciones*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

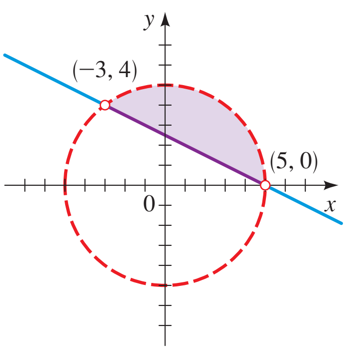
Resolvemos este sistema de ecuaciones por sustitución. Despejando x en la segunda ecuación tendremos $x = 5 - 2y$, y sustituyendo esto en la primera ecuación resulta

$$(5 - 2y)^2 + y^2 = 25 \qquad \text{Sustituya } x = 5 - 2y$$
$$(25 - 20y + 4y^2) + y^2 = 25 \qquad \text{Expanda}$$
$$-20y + 5y^2 = 0 \qquad \text{Simplifique}$$
$$-5y(4 - y) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

Así, $y = 0$ o $y = 4$. Cuando $y = 0$, tenemos $x = 5 - 2(0) = 5$, y cuando $y = 4$ tenemos $x = 5 - 2(4) = -3$. Por lo tanto, los puntos de intersección de estas curvas son $(5, 0)$ y $(-3, 4)$.



(a)



(b)

FIGURA 5 $\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}$

Observe que en este caso los vértices no son parte del conjunto de solución, porque no satisfacen la desigualdad $x^2 + y^2 < 25$ (por lo cual están graficados como círculos abiertos en la figura). Simplemente muestran en dónde están las "esquinas" del conjunto de solución.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

Sistemas de desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si se puede poner en una de las formas siguientes:

$$ax + by \geq c \qquad ax + by \leq c \qquad ax + by > c \qquad ax + by < c$$

En el siguiente ejemplo graficamos el conjunto de solución de un sistema de desigualdades lineales.

EJEMPLO 3 | Un sistema de cuatro desigualdades lineales

Grafique el conjunto de solución del sistema y asigne coordenadas a sus vértices.

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

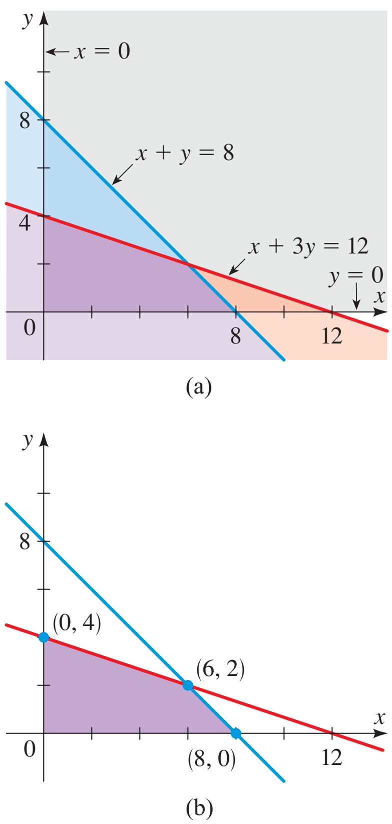


FIGURA 6

SOLUCIÓN En la Figura 6 primero graficamos las rectas dadas por las ecuaciones que corresponden a cada desigualdad. Para determinar las gráficas de las desigualdades lineales, necesitamos comprobar sólo un punto de prueba. Para mayor sencillez usemos el punto (0, 0).

Desigualdad	Punto de prueba (0, 0)	Conclusión
$x + 3y \leq 12$	$0 + 3(0) = 0 \leq 12$	Satisface desigualdad
$x + y \leq 8$	$0 + 0 = 0 \leq 8$	Satisface desigualdad

Como (0, 0) está debajo de la recta $x + 3y = 12$, nuestra prueba muestra que la región en la recta o debajo de ésta debe satisfacer la desigualdad. Del mismo modo, como (0, 0) está debajo de la recta $x + y = 8$, nuestra prueba muestra que la región en la recta o debajo de ésta debe satisfacer la desigualdad. Las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ dicen que x y y son no negativos. Estas regiones están trazadas en la Figura 6(a) y la intersección, o sea conjunto de solución, está trazada en la Figura 6(b).

Vértices Las coordenadas de cada vértice se obtienen resolviendo simultáneamente las ecuaciones de las rectas que se cruzan en ese vértice. Del sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

obtenemos el vértice (6, 2). El origen (0, 0) claramente también es un vértice. Los otros dos vértices están en los puntos de intersección x y y de las rectas correspondientes: (8, 0) y (0, 4). En este caso todos los vértices *son* parte del conjunto de solución.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

EJEMPLO 4 | Un sistema de desigualdades lineales

Grafique el conjunto de solución del sistema

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ -x + 2y \leq 4 \\ 3x - 2y \leq 8 \end{cases}$$

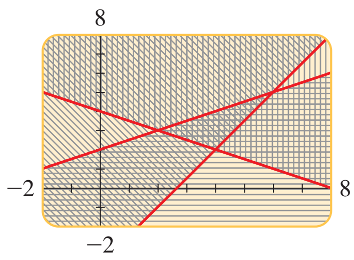


FIGURA 7

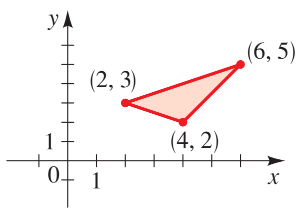


FIGURA 8

SOLUCIÓN Debemos graficar las rectas que corresponden a estas desigualdades y luego sombrear las regiones apropiadas, como en el Ejemplo 3. Usaremos una calculadora graficadora, de modo que debemos primero aislar y en el lado izquierdo de cada desigualdad.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x + 4 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq \frac{3}{2}x - 4 \end{cases}$$

Usando la función de sombrear de la calculadora, obtenemos la gráfica de la Figura 7. El conjunto de solución es la región triangular que está sombreada en los tres patrones. A continuación usamos `TRACE` o el comando `Intersect` para hallar los vértices de la región. El conjunto de solución está graficado en la Figura 8.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47**

Cuando una región del plano pueda ser cubierta por un círculo (suficientemente grande), se dice que está **limitada**. Una región que no está limitada se denomina **no limitada**. Por ejemplo, las regiones graficadas en las Figuras 3, 5(b), 6(b) y 8 son limitadas, mientras que las de las Figuras 2 y 4 son no limitadas. Una región no limitada no puede ser "rodeada por una cerca", porque se prolonga infinitamente en al menos una dirección.

Aplicación: regiones factibles

Numerosos problemas aplicados involucran *restricciones* en las variables. Por ejemplo, el gerente de una fábrica tiene sólo cierto número de trabajadores que pueden ser asignados para ejecutar trabajos en el piso de la fábrica. Un agricultor que determina cuáles cosechas cultivar tiene sólo cierta cantidad de tierras que pueda sembrar. Estas restricciones o limitaciones pueden expresarse fácilmente como sistemas de desigualdades. Cuando trabajemos con desigualdades aplicadas, por lo general nos referimos al conjunto de solución de un sistema como una *región factible,* porque los puntos del conjunto de solución representan valores factibles (o posibles) para las cantidades que están bajo estudio.

EJEMPLO 5 | Restricción de salidas de contaminantes

Una fábrica produce dos plaguicidas agrícolas, A y B. Por cada barril de A, la fábrica emite 0.25 kg de monóxido de carbono (CO) y 0.60 kg de dióxido de azufre (SO_2); y por cada barril de B, emite 0.50 kg de CO y 0.20 de SO_2. Las leyes contra la contaminación restringen la salida de CO de la fábrica a un máximo de 75 kg y de SO_2 a un máximo de 90 kg por día.

(a) Encuentre un sistema de desigualdades que describa el número de barriles de cada plaguicida que la fábrica pueda producir y todavía satisfacer las leyes contra la contaminación. Grafique la región factible.

(b) ¿Sería legal que la fábrica produzca 100 barriles de A y 80 barriles de B por día?

(c) ¿Sería legal que la fábrica produzca 60 barriles de A y 160 barriles de B por día?

SOLUCIÓN

(a) Para establecer las desigualdades requeridas, es útil organizar la información dada en una tabla.

	A	B	Máximo
CO (kg)	0.25	0.50	75
SO_2 (kg)	0.60	0.20	90

Hacemos

x = número de barriles de A producidos por día

y = número de barriles de B producidos por día

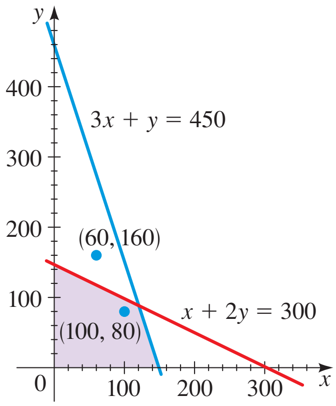


FIGURA 9

De los datos de la tabla y el hecho de que x y y no pueden ser negativas, obtenemos las desigualdades siguientes.

$$\begin{cases} 0.25x + 0.50y \leq 75 & \text{Desigualdad de CO} \\ 0.60x + 0.20y \leq 90 & \text{Desigualdad de SO}_2 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

Multiplicando la primera desigualdad por 4 y la segunda por 5 simplifica esto a

$$\begin{cases} x + 2y \leq 300 \\ 3x + y \leq 450 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución de este sistema de desigualdades, mostrada en la Figura 9.

(b) Como el punto (100, 80) se encuentra dentro de la región factible, este plan de producción es legal (vea Figura 9).

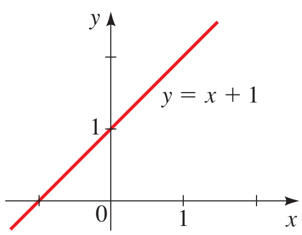
(c) Como el punto (60, 160) se encuentra fuera de la región factible, este plan de producción no es legal. Viola la restricción de CO, aun cuando no viola la restricción de SO_2 (vea Figura 9).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

10.9 EJERCICIOS

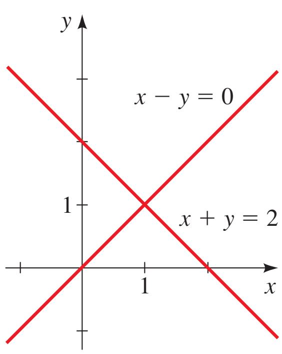
CONCEPTOS

1. Para graficar una desigualdad, primero graficamos la ________ correspondiente. Por lo tanto, para graficar $y \leq x + 1$, primero graficamos la ecuación ________. Para determinar cuál lado de la gráfica de la ecuación es la gráfica de la desigualdad, usamos puntos ________. Usando (0, 0) como tal punto, grafique la desigualdad al sombrear la región apropiada.

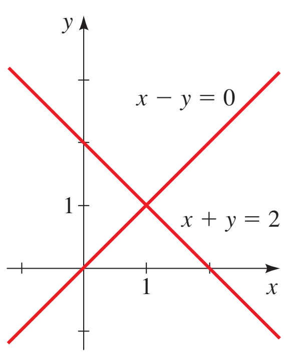


2. Haga sombreado de la solución de cada sistema de desigualdades en la gráfica dada.

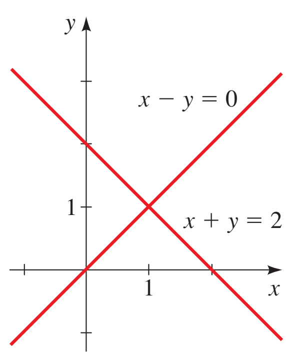
(a) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$



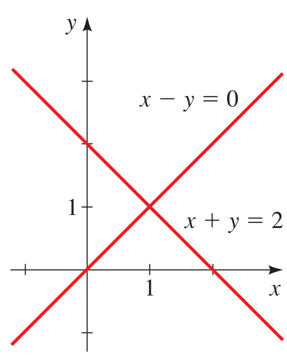
(b) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$



(c) $\begin{cases} x - y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$



(d) $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$



HABILIDADES

3-16 ■ Grafique la desigualdad.

3. $x < 3$

4. $y \geq -2$

5. $y > x$

6. $y < x + 2$

7. $y \leq 2x + 2$

8. $y < -x + 5$

9. $2x - y \leq 8$

10. $3x + 4y + 12 > 0$

11. $4x + 5y < 20$

12. $-x^2 + y \geq 10$

13. $y > x^2 + 1$

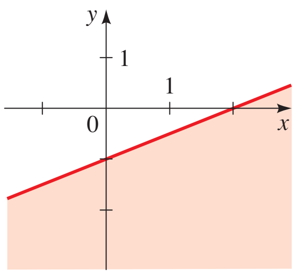
14. $x^2 + y^2 \geq 9$

15. $x^2 + y^2 \leq 25$

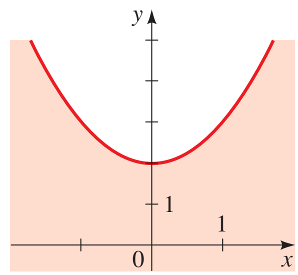
16. $x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$

17-20 ■ Nos dan una ecuación y su gráfica. Encuentre una desigualdad cuya solución es la región sombreada.

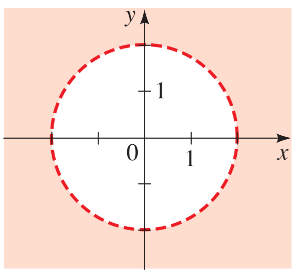
17. $y = \frac{1}{2}x - 1$



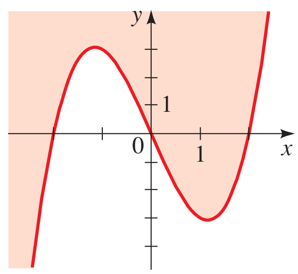
18. $y = x^2 + 2$



19. $x^2 + y^2 = 4$



20. $y = x^3 - 4x$



21-46 ■ Grafique la solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices y determine si el conjunto de solución es limitado.

21. $\begin{cases} x + y \le 4 \\ y \ge x \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x + 3y > 12 \\ 3x - y < 21 \end{cases}$

23. $\begin{cases} y < \frac{1}{4}x + 2 \\ y \ge 2x - 5 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 4 + y \le 2x \end{cases}$

25. $\begin{cases} y \le -2x + 8 \\ y \le -\frac{1}{2}x + 5 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 4x + 3y \le 18 \\ 2x + y \le 8 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + 5y \le 15 \\ 3x + 2y \le 9 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x > 2 \\ y < 12 \\ 2x - 4y > 8 \end{cases}$

29. $\begin{cases} y \le 9 - x^2 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} y \ge x^2 \\ y \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} y < 9 - x^2 \\ y \ge x + 3 \end{cases}$

32. $\begin{cases} y \ge x^2 \\ x + y \ge 6 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x - y > 0 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 10 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x^2 - y \le 0 \\ 2x^2 + y \le 12 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ 2x + y^2 \ge 1 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x + 2y \le 14 \\ 3x - y \ge 0 \\ x - y \ge 2 \end{cases}$

38. $\begin{cases} y < x + 6 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x - 2y \le 2 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 5 \\ x + y \le 7 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 4 \\ 2x + y \le 8 \end{cases}$

41. $\begin{cases} y > x + 1 \\ x + 2y \le 12 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x + y > 12 \\ y < \frac{1}{2}x - 6 \\ 3x + y < 6 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8 \\ x \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^2 - y \ge 0 \\ x + y < 6 \\ x - y < 6 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y > 0 \\ x \le 0 \end{cases}$

46. $\begin{cases} y \ge x^3 \\ y \le 2x + 4 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

47-50 ■ Use calculadora graficadora para graficar la solución del sistema de desigualdades. Encuentre las coordenadas de todos los vértices, redondeadas a un lugar decimal.

47. $\begin{cases} y \ge x - 3 \\ y \ge -2x + 6 \\ y \le 8 \end{cases}$

48. $\begin{cases} x + y \ge 12 \\ 2x + y \le 24 \\ x - y \ge -6 \end{cases}$

49. $\begin{cases} y \le 6x - x^2 \\ x + y \ge 4 \end{cases}$

50. $\begin{cases} y \ge x^3 \\ 2x + y \ge 0 \\ y \le 2x + 6 \end{cases}$

APLICACIONES

51. Publicar libros Una compañía editorial publica un total de no más de 100 libros al año. Al menos 20 de éstos no son de ficción, pero la compañía siempre publica al menos tantos libros de ficción como de no ficción. Encuentre un sistema de desigualdades que describa los posibles números de libros de ficción y de no ficción, que la compañía puede producir cada año, consistente con estas políticas. Grafique el conjunto de solución.

52. Manufactura de muebles Un hombre y su hija fabrican mesas y sillas sin acabados. Cada mesa requiere 3 horas de corte y 1 hora de ensamble. Cada silla requiere 2 horas de corte y 2 horas de ensamble. Entre los dos, pueden poner hasta 12 horas de trabajo de corte y 8 horas de ensamble al día. Encuentre un sistema de desigualdades que describa todas las posibles combinaciones de mesas y sillas que puedan hacer diariamente. Grafique el conjunto de solución.