Práctica 2: Límites y continuidad

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

1. Graficar y calcular (si existe) el límite en el punto x_0 indicado:

   (a) $f(x) = 2x + 3$ $\quad x_0 = 2$

   (b) $g(x) = (x-2)^2 - 1$ $\quad x_0 = 4$

   (c) $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad x_0 = 0$

   (d) $i(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

   (e) $j(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

2. Sea u la función dada por $u(x) = \sqrt{1-x^2}$.

   (a) Graficar la función $y = 1 - x^2$. A partir del gráfico decir para qué valores de x vale que $y \geq 0$. Determinar luego el dominio de u.

   (b) ¿Tiene sentido calcular $\lim\limits_{x\to -1^-} u(x)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} u(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} u(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} u(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} u(x)$? Justificar la respuesta y calcular los límites que tengan sentido.

3. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \tan(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+3x+2}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{|x-3|}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}$ (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt[3]{x}}$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x^2)}{x}$ (l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-1}$ (m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(x)}{x}$ (n) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(\dfrac{1}{x})$

   (ñ) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ (o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \cos(x)\cos(\dfrac{1}{2x-\pi})$ (p) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

4. Sean $g(x) = -2x^2 + 4x - 1$ y $h(x) = (x-1)^2 + 1$, y supongamos que f es una función definida en un entorno reducido del 1 tal que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x de dicho entorno reducido.

   (a) Graficar g y h en un mismo sistema de ejes coordenados.

   (b) Calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5. Sean $n > 0$ un número natural y f una función definida en un entorno reducido de 0 tal que $|f(x)| \leq |x^n|$ en dicho entorno reducido.

   (a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

   (b) Para $n = 1, 2$ interpretar geométricamente la desigualdad dada.

   Sugerencia: notar que en el entorno reducido de 0 mencionado vale que $-|x^n| \leq f(x) \leq |x^n|$.

6. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sqrt[5]{x}}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x^3)-1}{x^2}$

7. Calcular los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^3}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^3}$ (e) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x^3-9x}$ (g) $\lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2-9}{x^3-9x}$ (h) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^3-9x}$ (i) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+10}{x^2-15}$

   (j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-x+2}{3x^3+x+2}$ (k) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^5-x^3+1}{-3x^3-4x+7}$ (l) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}}$

   (m) $\lim\limits_{x\to \infty} \cos(x)$ (n) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x}{|x|}$ (ñ) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^{10}+1}{3x^{10}+x^9+x^5-x^2+6}$

   (o) $\lim\limits_{x\to -\infty} x-\sqrt{x^2-x}$ (p) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{x+1}{x-1}$ (q) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}}$

8. Consideremos las funciones h, i y j del Ejercicio 1. Indicar los puntos donde dichas funciones son continuas y clasificar las discontinuidades (en caso de que existan).

9. La función $f(x) = \frac{\cos(x)-1}{x}$, ¿admite una discontinuidad evitable en $x = 0$?

10. Sea f una función definida en un entorno de a y continua en a.
    ¿Es cierto que $\lim\limits_{x\to 0} f(x+a) = f(a)$?

11. Dar un ejemplo de una función con una discontinuidad inevitable en 3.

12. Sea g la función dada por $g(t) = \frac{t^2+t-1}{t-1}$. Hallar los puntos donde g es continua y clasificar las discontinuidades (si existen).

13. Dar un ejemplo de una función f que no esté definida en 0 y tal que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, y un ejemplo de una función g que esté definida en 0 y tal que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq g(0)$ (los ejemplos pueden ser dados a partir de gráficos).

14. Se dice que la recta de ecuación $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la gráfica determinada por la función f si ocurre alguna de las siguientes posibilidades: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ ó $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = L$.

    Se dice que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la gráfica determinada por la función f si ocurre alguna de las siguientes posibilidades: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$.

    Graficar la función $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y determinar si posee asíntotas. ¿Las funciones seno, coseno y tangente tienen asíntotas?

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

    $$f(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ -ax^2-2b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

    (a) Determinar a y b para que f resulte continua en todo su dominio.

    (b) Graficar.

16. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una solución en $[-2, -1]$, otra en $[0, 1]$ y otra en $[1, 2]$.
    Sugerencia: considerar la función polinómica $P(x) = x^3 - 3x + 1$ y aplicar el teorema de Bolzano en los intervalos indicados.

17. Sean $f(x) = x^3$ y $g(x) = 1 - x$. Graficar estas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados y probar que existe un número real c en el intervalo $(0, 1)$ tal que $f(c) = g(c)$.
    Sugerencia: aplicar el teorema de Bolzano a la función $F(x) = f(x) - g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$.

18. Consideremos la función polinómica $A(x) = x^3 + x - 1$. Probar que existe un número real c en el intervalo $(0, 1)$ tal que $A(c) = 0$, y utilizar luego el método de la bisección para encontrar un intervalo cerrado de longitud $1/8$ en el cual A admita una raíz (recordar que la longitud de un intervalo $[a, b]$ es igual a $b - a$).

19. (a) Sea f una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) < f(b)$. Probar que para cada u tal que $f(a) < u < f(b)$ existe un c en (a, b) tal que $f(c) = u$. Hacer un gráfico de la situación planteada.
    El resultado anterior se denomina *Teorema del valor intermedio*.
    Sugerencia: aplicar el teorema de Bolzano a la función $F(x) = f(x) - u$ en el intervalo $[a, b]$.
    (b) Sea $f(x) = x^2$ definida en $[0, 2]$. Tenemos que $f(0) = 0 < 2 < 4 = f(2)$ Hallar un número real c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $f(c) = 2$. Graficar.