Práctica 3: Derivadas

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

1. Usando la definición de derivada, hallar las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados. Calcular en cada caso la ecuación de la recta tangente y graficar las funciones y las rectas halladas en un mismo sistema de ejes coordenados respectivamente.

   (a) $y = x^2$ en el punto $(2, 4)$.

   (b) $y = x^2 + 1$ en el punto $(0, 1)$.

   (c) $y = 2x + 3$ en el punto $(1, 5)$.

   (d) $y = x^3$ en el punto $(1, 1)$.

   (e) $y = \frac{1}{x}$ en el punto $(1, 1)$.

   (f) $y = \frac{1}{x^2}$ en el punto $(2, \frac{1}{4})$.

   (g) $y = \operatorname{sen}(x)$ en el punto $(0, 0)$.

   (h) $y = \sqrt{x+1}$ en el punto $(0, 1)$.

2. Hallar por definición las funciones derivadas de las funciones dadas en los ítems (d), (e) y (h) del ejercicio previo.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por:

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

   (a) Graficar.

   (b) Probar que f es continua en todo su dominio.

   (c) Probar que f no es derivable en $x = 0$ e interpretar geométricamente este resultado. Luego determinar $f'(x)$ para todos los valores $x \neq 0$.

4. Hallar las coordenadas de los puntos donde la recta tangente a la gráfica de $p(t) = t^5 + 5t^3 - 20t + 1$ es horizontal y hallar la ecuación de dichas rectas.

5. Sea $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

   $$v(t) = \begin{cases} t^2 + t & \text{si } t \leq 0 \\ -t^2 + t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

   (a) Graficar, probar que v es derivable en todo su dominio y calcular v'.

   (b) ¿La función v es continua en todo su dominio?

6. Determinar el dominio de la función $h(x) = \sqrt{|x|}$, graficarla y analizar si es derivable en $x = 0$.

7. Sea $g(x) = \sqrt[5]{2x+1}$.

   (a) Determinar el dominio de g.

   (b) ¿Es g derivable en el punto de abscisa $-\frac{1}{2}$?

   (c) Calcular g' e indicar su dominio.

8. Hallar las derivadas de las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

   (a) $y = 5x^{\frac{2}{3}}$ (b) $y = x^{15}$ (c) $y = x^{-\frac{2}{3}}$ (d) $y = 3x^{-1} + 2x^7$

   (e) $y = x^2 \operatorname{sen}(x)$ (f) $y = (x^{-2} + x)(3\cos(x) + x^3)$ (g) $y = x^{\sqrt{2}}$

   (h) $y = \frac{2x+1}{3x-4}$ (i) $y = \frac{2x}{x^2+3x+2}$ (j) $y = \tan(x)$ (k) $y = \frac{1}{x+1}(\frac{1}{x^2} + x)$

   (l) $y = (2x+1)^7$ (m) $y = \operatorname{sen}(\cos(x))$ (n) $y = \frac{1}{\cos(x^2+1)}$

   (ñ) $y = (2x-5)^{-\frac{3}{7}}$ (o) $y = \operatorname{sen}^2(x^3 + x + 1)$ (p) $y = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos(4x)}$

   (q) $y = \frac{(2x+1)^{-5}}{\operatorname{sen}^3(x)+\operatorname{sen}(x^3)}$ (r) $y = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ (s) $y = (x+1)^5(x+2)^7(x+3)^9$

   (t) $y = x\operatorname{sen}(2x) + \cos(\operatorname{sen}(x)) + 1$ (u) $\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{x})}{x^3+\sqrt{x}}$ (v) $y = \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{\operatorname{sen}(x)+1}$

9. ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = \frac{t^2}{t^2+1}$ en $t = 1$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(1) = -1$. Calcular la derivada de la función $F(x) = f(2x+\cos(x))$ en $x = 0$.

    Sugerencia: definir $u(x) = 2x + \cos(x)$ y notar que $F(x) = f(u(x))$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \operatorname{sen}(|x|)$. Graficar f en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ y probar que dicha función no es derivable en $x = 0$.

12. Hallar las coordenadas de los puntos de la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + 5$ donde la recta tangente es paralela a $y = 6x - 1$.

13. Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar el punto de tangencia.

14. Sea $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

    $$j(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

    Probar que j es derivable en todo su dominio y calcular la función derivada.

15. Sea $f(x) = xg(x)$ con g continua en $x = 0$.

    Probar que f es derivable en $x = 0$. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

16. Sea f una función definida en un entorno de $x = 0$, continua en $x = 0$ y tal que $f(0) = 1$. Consideremos la función g dada por

    $$g(x) = \operatorname{sen}(x)f(x)$$

    Probar que g es derivable en $x = 0$. Justificar la respuesta.

17. Hallar la ecuación de la recta tangente a $u(x) = 2 - x^2$ en un punto $(x_0.u(x_0))$ y determinar el valor de x_0 sabiendo que la recta tangente a la gráfica de u en dicho punto pasa por el punto $(1, 5)$. Graficar u y la recta hallada en un mismo sistema de ejes coordenados.