Universidad Nacional de Quilmes

Práctica 7: Función exponencial y logarítmica

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

1. (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \ln(x)$ en el punto cuya abscisa es 1.
   (b) Graficar la curva y la recta en un mismo sistema de ejes coordenados.

2. (a) Determinar el dominio de las siguientes funciones:
   (i) $y = \ln(-3x+4)$ (ii) $y = \ln(x^2)$ (iii) $y = \ln(|x|)$ (iv) $y = \ln^3(x^2-1)$
   (v) $y = \arctan(\ln(x^2+2x+3))$ (vi) $y = \ln(x^4+3)$ (vii) $y = \frac{x}{\ln(x)}$.
   (b) A partir del gráfico de $y = \ln(x)$, graficar $y = \ln(x+1)$ e $y = \ln(|x|)$.
   (c) Derivar las funciones dadas en (a) utilizando regla de la cadena.

3. Derivar las siguientes funciones:
   (a) $y = \ln(\mathrm{sen}(x))$ (b) $y = \cos(\ln(2x+3))$ (c) $y = \arccos(\ln(x+1))$

4. (a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x$ en $(0,1)$.
   (b) Graficar la curva y la recta en un mismo sistema de ejes coordenados.
   (c) A partir del gráfico de $y = e^x$, calcular $\lim_{x\to-\infty} e^x$ y $\lim_{x\to\infty} e^x$.
   (d) Determinar la ecuación de la recta tangente a $y = xe^x$ en $(0,0)$.

5. Derivar las siguientes funciones utilizando las reglas de derivación:
   (a) e^{2x} (b) $e^{\mathrm{sen}(x)}$ (c) $\tan(e^x)$ (d) $\cos(e^{x^2})$ (e) $\mathrm{arc\,sen}(e^x+x)$
   (f) $e^{\ln(7)x}$ (g) $2^x - x^2$ (h) x^x (i) $x^{\arccos(x)}$ (j) $\log_5(x)$
   Sugerencia: si $a > 0$ entonces se define $a^x = e^{\ln(a)x}$, y si además $a \neq 1$ entonces vale que $\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)}\ln(x)$ (¿por qué?).

6. Resolver las siguientes ecuaciones:
   (a) $e^{x+7} = \frac{1}{e^2}$
   (b) $(e^{x+3})^2 = e$
   (c) $4.3^{x+1} = 12$
   (d) $\ln(x^2-4x-4) = 0$
   (e) $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(3)$
   (f) $\ln(x^2+x) - \ln(x) = \ln(5)$

7. Consideremos la función $f(x) = \ln(|x|)$. Probar que $f'(x) = \frac{1}{x}$.

8. Calcular los siguientes límites:
   (a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$ (b) $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x$ (c) $\lim_{x\to0^+} x\ln(x)$ (d) $\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}}$
   Sugerencias: todos los límites que se piden determinar no resultan de un cálculo directo. Se recomienda aplicar adecuadamente la regla de L'Hôpital.
   Para (b) notar que $x^2e^x = \frac{x^2}{e^{-x}}$.
   Para (c) notar que $x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{x^{-1}}$.
   Para (d) notar que $xe^{\frac{1}{x}} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{-1}}$.

9. Resolver el límite (d) del ejercicio anterior haciendo el cambio de variables $u = \frac{1}{x}$.
   Sugerencia: notar que con el cambio propuesto se tiene $\lim_{x\to0^+} xe^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} \dfrac{e^u}{u}$.

10. Hacer un estudio completo y un gráfico de las siguientes funciones:

    (a) $f(x) = x + \ln(x)$ (b) $g(x) = \frac{e^x}{x}$ (c) $h(x) = x^2 e^x$

    (d) $t(x) = e^{-x^2}$ (e) $v(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (f) $w(x) = x^x$

11. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x) - x^2$.

    (a) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

    Sugerencia: observar que $\ln(x) - x^2 = \ln(x)(1 - \frac{x^2}{\ln(x)})$, y calcular primero $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\ln(x)}$ utilizando la regla de L'Hôpital.

    (b) Hacer un estudio completo y un gráfico de f.

12. Sea $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por

    $h(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

    (a) Probar que h es continua en todo su dominio.

    (b) Analizar la derivabilidad de h en todo su dominio.

13. Consideremos las funciones dadas por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad y \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

    Estas funciones se denominan *coseno hiperbólico* y *seno hiperbólico*.

    (a) Probar que $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$ y que $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$.

    (b) Probar que para todo x tenemos que

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1.$$

Algunas aplicaciones

14. (a) Sea $f(t) = 10e^{Kt}$ para alguna constante K, y supongamos que $f(\frac{1}{2}) = 2$. Encontrar K.

    (b) Sea $f(t) = Ce^{2t}$ para alguna constante C, y supongamos que $f(2) = 5$. Encontrar C.

    (c) Sea $f(t) = Ce^{Kt}$, donde C y K son constantes. Determinar C y K sabiendo que $f(0) = 1$ y que $f(\ln(2)) = 8$.

15. En 1900 la población de una ciudad era de 50.000 y en 1950 era de 100.000. Si la tasa de crecimiento demográfico es proporcional a la población, ¿cuál será la población en el 2040?

    Sugerencia: si $f(t)$ mide la cantidad de habitantes de la población, donde la variable t representa al tiempo (por ejemplo medido en años) y $t = 0$ lo hacemos corresponder con el año 1900, se deduce del enunciado del problema que f es proporcional a su derivada, lo que a su vez implica que existen constantes C y K tales que $f(t) = Ce^{Kt}$ (que es la función que deben utilizar).

16. Una sustancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de sustancia considerada en un tiempo dado, digamos

$$f(t) = Ce^{Kt}.$$

    (a) ¿En cuánto tiempo quedará la mitad de la cantidad original?

    (b) Supongamos que $K = -4$. ¿En cuánto tiempo quedará un tercio de la sustancia?

17. Si el número de bacterias aumenta con una rapidez proporcional al número inicial, ¿cuánto tiempo necesitarán ciertas bacterias para aumentar de 1.000.000 a 10.000.000, si necesitan 12 minutos para aumentar a 2.000.000?