Práctica 6: Integración (primera parte)

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:
   (a) $\int(5x^2+3x-1)dx$ (b) $\int(2\,\text{sen}(x)+3\cos(x))dx$ (c) $\int(e^x-\frac{5}{x^2+1})dx$
   (d) $\int\frac{3}{x}dx$ (e) $\int\frac{x^2-2x+2}{x^2}dx$ (f) $\int(2+x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\cos^2(x)})dx$
2. Calcular la función f sabiendo que $f'(x)=x^3+\cos(x)$ y que $f(0)=1$.
3. Calcular las siguientes integrales definidas e interpretar geométricamente los resultados:
   (a) $\int_0^3(2x+1)dx$ (b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\text{sen}(x)dx$ (c) $\int_{-1}^{2}e^x dx$
   (d) $\int_2^5\frac{1}{x}dx$ (e) $\int_0^2(x^2-2x+2)dx$ (f) $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}dx$
4. Sin hacer cálculos justificar geométricamente las siguientes igualdades:
   (a) $\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1x^2dx$.
   (b) $\int_{-1}^{1}x^3dx=0$.
5. Encontrar el área de la región limitada por:
   (a) $y=x^2-x$ e $y=2x-2$.
   (b) $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.
   (c) $y=x^2$ e $y=-x^2+1$.
   (d) $y=x^2$, $y=(x-2)^2$ e $y=0$.
   (e) $y=|x|$ e $y=(x+1)^2-1$.
   (f) $y=-e^x$, $y=e^x$, $x=-2$ y $x=0$.
   (g) $y=\text{sen}(x)$, $y=\cos(x)$, el eje y, y el primer punto donde se intersecan estas curvas para $x>0$.

   Graficar en todos los casos.

   Sugerencia: recordar que si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y $f(x)\geq g(x)$ para todo x de $[a,b]$ entonces el área entre las dos curvas, desde a hasta b, está dada por la fórmula
   $$\int_a^b(f(x)-g(x))dx.$$
6. Calcular el área del triángulo cuyos vértices están dados por los puntos $(0,1)$, $(2,5)$ y $(4,3)$. Graficar.
7. Sean f y F funciones definidas en un intervalo $[a,b]$ tales que f es continua en $[a,b]$, $F'(x)=f(x)$ para todo x de $[a,b]$, $F(a)=1$ y $F(b)=2$. Calcular $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_b^a f(x)dx$.

   Sugerencia: utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo integral.
8. Sean F y f funciones definidas en el intervalo $[1,3]$ tales que f es continua en $[1,3]$, $F'(x)=f(x)$ para cada x perteneciente a $[1,3]$, $F(1)+F(3)=10$ y $\int_1^3 f(x)dx=8$. Calcular $F(1)$ y $F(3)$.
9. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:
   (i) $F(x)=\int_{-1}^{5}\arctan(x^3)dx$.
   (ii) $G(x)=\int_1^x\text{arc}\,\text{sen}(\ln(t))dt$.
   (iii) $H(x)=\int_2^x e^{t^2}dt$.
   (iv) $I(x)=\int_2^{\frac{1}{x}}e^{r^2}dr$.
   (v) $J(x)=\int_{3x}^{5}\text{sen}^7(s)ds$.

   Sugerencia: en (iv) si definimos $u(x)=\frac{1}{x}$ entonces $I(x)=H(u(x))$.
10. Para $x\geq1$ definamos $F(x)=\int_1^x\frac{1}{\sqrt{t}}dt$ y $G(x)=\int_1^x\frac{1}{t^2}dt$.
    (a) Para $t\geq1$ graficar $y=\frac{1}{\sqrt{t}}$ e $y=\frac{1}{t^2}$.
    (b) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty}G(x)$ e interpretar geométricamente los resultados obtenidos.