Práctica 5: ejercicios y teoría sobre Funciones inversas

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

Supongamos que tenemos una función, por ejemplo

$$y = 2x + 1.$$

Luego podemos despejar x en términos de y, obteniendo así

$$x = \frac{y-1}{2}.$$

De esta manera x se puede expresar como una función de y.

Aunque en este caso pudimos obtener una fórmula explícita, hay otros casos interesantes en donde x puede expresarse como una función de y pero sin una fórmula explícita. En esta guía investigaremos tales casos.

Definición. *Sea A un subconjunto del dominio de f. Si para cada y en la imagen de f existe un único x en A tal que $f(x) = y$ entonces podemos definir una función g como*

$$x = g(y)$$

por la regla: dado un número y le asociamos el único x de A tal que $f(x) = y$.

La función g se denomina función inversa de f, y suele denotarse como f^{-1}.

Para la observación que sigue supondremos que f tiene función inversa sobre A, y escribiremos g para hacer referencia a la función inversa.

Observación

(i) La imagen de f es el dominio de g y la imagen de g es el dominio de f.

(ii) Para cada x en A se tiene que $g(f(x)) = x$ y para cada y en la imagen de f se tiene que $f(g(y)) = y$.

(iii) La función inversa de f es única.

(iv) Las gráficas de f y de g son simétricas respecto a la recta $y = x$.

(v) Si A es un intervalo y f es continua entonces g es continua.

Es importante tener en cuenta el dominio de la función que consideramos. Por ejemplo, sea

$$f(x) = x^2.$$

Si $A = \mathbb{R}$ entonces f no tiene función inversa, ya que $f(-2) = f(2) = 4$ y eso nos dice que para $y = 4$ no existe un único x tal que $f(x) = 4$. Sin embargo si $A = [0, \infty)$ entonces f tiene función inversa g, siendo $g(x) = \sqrt{x}$. En caso de que $A = (-\infty, 0]$ entonces f también tiene función inversa h, siendo $h(x) = -\sqrt{x}$.

Teorema 1. *Si f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en A entonces f tiene función inversa.*

El resultado anterior es sumamente útil si f es derivable y A es un intervalo abierto, ya que para analizar si f tiene función inversa hay que analizar el signo de la función derivada.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = 3x+1$. Si llamamos $y = 3x+1$, despejando obtenemos que $x = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$. En este caso $A = \mathbb{R}$ y su función inversa está dada por la expresión $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.
   (a) Graficar f, g y la recta $y = x$ en un mismo sistema de ejes coordenados.
   (b) ¿Cuál es el dominio de g?
2. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 1$.
   (a) Graficar y determinar la imagen de f.
   (b) Calcular la función inversa de f.
   (c) Graficar f y su función inversa en un mismo sistema de ejes.
3. Dada la función $f(x) = -x^3 + 3x - 1$, determinar los intervalos en donde f es estrictamente creciente y en donde f es estrictamente decreciente. ¿Puede asegurar que en los intervalos hallados f tiene función inversa?

El siguiente resultado vincula la derivada de una función con la derivada de su función inversa.

Teorema 2. *Sean a y b dos números reales tales que $a < b$. Si f es derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b) entonces la función inversa g existe. Más aún,*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

El resultado anterior sigue valiendo si $f'(x) < 0$ para todo x de (a, b).

Observación: Para recordar esta fórmula podemos proceder del siguiente modo: como $f(g(x)) = x$, si derivamos respecto a x en ambos miembros de la igualdad y utilizamos la regla de la cadena, entonces se concluye que

$$f'(g(x))g'(x) = 1,$$

de donde

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}. \tag{1}$$

Por ejemplo sea $f : (-\infty, -1) \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^3 - 3x$. Se tiene que existe función inversa g y que g tiene derivada, ya que $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0$ en $(-\infty, -1)$ (verificar esta afirmación). Queremos hallar $g'(-18)$.

Como $f(-3) = -27 + 9 = -18$ entonces -18 pertenece al dominio de g y $g(-18) = -3$. Además $f'(x) = 3x^2 - 3$, con lo cual $f'(-3) = 27 - 3 = 24$. Luego de acuerdo a la fórmula (1) se obtiene que

$$g'(-18) = \frac{1}{f'(g(-18))} = \frac{1}{f'(-3)} = \frac{1}{24}.$$

4. Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x$.
   (a) Verificar que f tiene función inversa.
   (b) Calcular la derivada de la función inversa en $-\frac{11}{8}$.
   Ayuda: $f(\frac{1}{2}) = -\frac{11}{8}$.

Es imposible definir una función inversa para la funciones $y = \operatorname{sen}(x)$, ya que a cada valor de y le corresponden infinitos valores de x. Sin embargo, si restringimos nuestra atención a ciertos intervalos entonces podemos definir la función inversa.

Teorema 3. *Consideremos la función seno definida en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La función inversa que está definida en el intervalo $[-1, 1]$ se llamará arcoseno.* Si llamamamos g a dicha función entonces escribiremos

$$g(x) = \operatorname{arc\,sen}(x).$$

La función g es derivable en $(-1, 1)$ y

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Análogamente tenemos el siguiente resultado con respecto a la función coseno:

Teorema 4. *Consideremos la función coseno definida en el intervalo $[0, \pi]$. La función inversa que está definida en el intervalo $[-1, 1]$ se llamará arcocoseno.* Si llamamos g a dicha función entonces escribiremos

$$g(x) = \operatorname{arc\,cos}(x).$$

La función g es derivable en $(-1, 1)$ y

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. Hagamos el siguiente razonamiento: $\cos(\operatorname{arc\,cos}(3)) = 3$, pero el coseno de cualquier número no puede valer más que 1. ¿Dónde está el error?

Con respecto a la función tangente tenemos el siguiente

Teorema 5. *Consideremos la función tangente definida en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. La función inversa que está definida en $\mathbb{R}$ se llamará arcotangente.* Si llamamos g a dicha función entonces escribiremos

$$g(x) = \arctan(x).$$

La función g es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$g'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

6. Hallar las derivadas de cada una de las siguientes funciones:
   (a) $\operatorname{arc\,sen}(x^3)$
   (b) $x \arccos(x)$
   (c) $\operatorname{arc\,sen}^3(x)$
   (d) $\arccos(\cos(x) - x^2)$
   (e) $\arctan(\frac{1}{x})$
   (f) $\arctan(\operatorname{sen}(2x) + 1)$
   (g) $\frac{\arctan^3(\operatorname{sen}(3x))}{x^2+1}$
7. (a) Calcular $\arctan'(1)$.
   (b) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función arcotangente en el punto $(1, \frac{\pi}{4})$.
   (c) Graficar la función $y = \arctan(x)$ y la recta hallada en un mismo sistema de ejes coordenados.
8. Hacer un estudio completo y un gráfico de la función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \arctan(x^2)$.
9. (a) Consideremos $f(x) = \frac{x-2}{\operatorname{arc\,sen}(x-2)}$. Determinar el dominio de f.
   (b) Definamos a la función g como $g(x) = f(x)$ si x pertenece al dominio de f, y $g(2) = 1$ Probar que g es continua en $x = 2$, y analizar si g es derivable en $x = 2$.
10. Sea $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función dada por $F(x) = \arctan(x) + \arctan(x^{-1})$.
   (a) Probar que $F'(x) = 0$ para todo x en $(0, \infty)$.
   (b) Probar que para cada x en $(0, \infty)$ vale que $F(x) = \frac{\pi}{2}$.