Práctica 4:

Integrales dobles-Teorema de Green

Profesor: Cecilia Jarne (adaptada a partir de la práctica de Marcos Sirchia)

1. Calcular las siguientes integrales iteradas y representar gráficamente el recinto de integración:

   a) $\int_1^2 [\int_0^3 [x+y]dx]dy$

   b) $\int_0^2 [\int_0^{x^2} [2x-2y]dy]dx$

   c) $\int_0^2 [\int_{x^2}^4 [x]dy]dx$

   d) $\int_{-1}^1 [\int_{-1}^{y-1} [xy]dx]dy$

   e) $\int_{-1}^2 [\int_{y^2-2}^{\sqrt{8-y^2}} [2x]dx]dy$

   f) $\int_{-2}^1 [\int_{1-x}^{2-x^2} [3]dy]dx$

2. Representar gráficamente los recintos **R** que se dan a continuación y calcular de dos maneras distintas la integral iterada de $f(x,y)$ sobre **R** (límites constantes para x y variables para y, y viceversa).

   a) **R** limitado por $y = x^2$, $y = x$, $f(x,y) = 2x - 3$.
   b) **R** es el triángulo limitado por las rectas $y = 2x - 3$, $y = -1$, $y = x$, $f(x,y) = 2$.
   c) **R** limitado por la curva: $\vec{r}(t) = 2cos(\pi t)\hat{\imath} + sin(\pi t)\hat{\jmath}$, con $0 \ll t \ll 2\pi$ y $f(x,y) = xy$.

3. Calcular $\int\int_R f(x,y)dxdy$ mediante integrales iteradas:

   a) $f(x,y) = e^x$, **R** limitado por $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 1$.

   b) $f(x,y) = |xy|$, **R** limitado por $y = x^2$, $y + 2 = x$.

4. Calcular el área de los recintos que se indican a continuación usando integrales dobles:

   a) R_1 es el triángulo limitado por las rectas $y = -2x + 4$, $x = 0$ e $y = 2x$.
   b) R_2 es el triángulo limitado por las rectas $y = x^2$, $y = x^2 - 1$ e $y = 1$.

5. Plantear las seis integrales dobles que permiten calcular el volumen del sólido limitado por $x+2y+3z = 6$ y los tres planos coordenados. Resolver al menos dos.

6. Si **V** es el sólido limitado por las superficies que se indican en cada caso, describir la proyección de **V** sobre los tres planos coordenados y calcular, usando integrales dobles, el volumen de **V** considerando su proyección sobre el plano x,y. Verificar el resultado obtenido considerando la proyección de **V** sobre los otros dos planos coordenados.

   a) $x + z = 2$, z=0, $y = 0$, $y = x$
   b) $y = x^2$, $z + 2y = 2$, $z = 0$

7. Plantear en coord. polares la integral: $\int\int_R f(x,y)dxdy$ Siendo **R**= $\{(x,y)/x^2 + y^2 \ll 4, x \ll y\}$.

8. Pasar a coordenadas polares y calcular:

   a) $\int_{-a}^0 [\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} [y]dy]dx$
   b) $\int_0^1 [\int_1^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{x}dx]dy$

9. Calcular $\int\int_R ydxdy$ siendo **R** la región $x^2 + (y-1)^2 \ll 1$ con $x \gg 0$

   a) Usando coordenadas polares b) Usando $x = rcos(\theta)$, $y - 1 = r\sin(\theta)$

10. Calcular el volumen del solido $V_1 = \{(z,y,z)/1 \ll z \ll 4 -^2 -y^2\}$ y graficarlo.

11. Comprobar que en los siguientes ejercicios puede aplicarse el teorema de Green y verificarlo:

    a) $P(x,y) = 2x–y$, $Q(x,y) = x^2$, $\mathbf{R}$ limitada por $y = x^2–3$, $y = 6$

    b) $P(x,y) = 2$, $Q(x,y) = y(x-1)$, $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$

12. Calcular las siguientes integrales usando el teorema de Green de ser posible. Considerar todas las curvas recorridas en sentido antihorario.

    a) $\oint_C (x-y)dx + x^2 dy$, $C : |x| + |2y| = 2$

    b) $\oint_C (2x^2 + 2y)dx + dy$, C es la frontera del triángulo de vértices (1,1), (2,3), (0,4).

13. Dado el campo vectorial: $\vec{G}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{\imath}} + \frac{x}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{\jmath}}$

    a) Demostrar que $\oint_C \vec{G}.d\vec{r} = 0$ Para toda curva cerrada C_1 suave por tramos que no contenga el origen.
    b) Calcular $\oint_{C_2} \vec{G}.d\vec{r}$ siendo $C_2 : x^2 + y^2 = 1$
    c) Puede decir cuanto vale $\oint_{C_3} \vec{G}.d\vec{r}$ siendo C_3 cualquier curva cerrada que contiene al origen? Justificar la respuesta.

14. Calcular el area de las siguientes regiones planas usando interales de línea

    a) $R_1 = \{(x,y)/b^2x^2 + a^2y^2 \ll a^2b^2\}$

    b) $R_2 = \{(x,y)/x^2 + y^2 \ll 2, x^2 + (y-1)^2 \gg 1\}$

15. Dado $\vec{F}(x,y) = ((x-1)^2 + y^2)^{-1}(-y\hat{\mathbf{\imath}} + (x-1)\hat{\mathbf{\jmath}})$ y la region $\mathbf{R}$ limitada por las curvas C_1 : $(x-1)^2 + y^2 = 1$ y $C_2 : 9(x-1)^2 + 4y^2 = 36$

    a) Calcular $\oint_{C_1} \vec{F}.d\vec{r}$ y calcular $\int\int_R rot(\vec{F}).\hat{\mathbf{k}}dxdy$, (usar el teorema de Green de ser posible)

    b) Calcular $\oint_{C_1} \vec{F}.d\vec{r}$ teniendo en cuenta los resultados obtenidos en a).