Práctica 2:

Parametrización- Función vectorial - Cinemática -Longitud de Curvas

Profesor: Cecilia Jarne (adaptada a partir de la práctica de Marcos Sirchia)

1. Para las siguientes curvas:

   a) Hallar una ecuación paramétrica de cada curva, indicar el intervalo paramétrico y graficarlas.
   b) Parametrizar las curvas cambiando la orientación indicada en el enunciado e indicar el nuevo intervalo paramétrico.

   a) $C_1 : y = 5x + 3$ desde A(0,3) a B(2,13)

   b) $C_2 : 4x^2 + 25y^2 = 100$

   c) $C_3 : (x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 32$

2. Si C_2* es el trozo de la curva C_2 desde (5,0) a (0,-2) en sentido horario y C_3* es el trozo de C_3 contenido en el primer cuadrante y recorrido en sentido antihorario, parametrizar ambas curvas e indicar el intervalo paramétrico en cada caso. Representarlas gráficamente.

3. a) Representar gráficamente las siguientes curvas e identificar las superficies que intervienen.
   b) Hallar la proyección de cada curva sobre los planos coordenados.

$$C_1 : \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ z = 2x \end{cases} \tag{1}$$

$$C_2 : \begin{cases} y = x^2 \\ y + z = 4 \end{cases} \tag{2}$$

$$C_3 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ y = x \end{cases} \tag{3}$$

$$C_4 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases} \tag{4}$$

$$C_5 : \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 4y \end{cases} \tag{5}$$

$$C_6 : \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases} \tag{6}$$

$$C_7 : \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ y = x \end{cases} \tag{7}$$

4. Encontrar una ecuación paramétrica y paramétrica vectorial de las curvas del ejercicio anterior e indicar el intervalo paramétrico teniendo en cuenta el trozo que se indica a continuación. Luego parametrizarla cambiando la orientación.

   a) C_1 desde $(0, 2, 0)$ a $(4/3, 0, 8/3)$

   b) C_5 desde $(0, 4, 16)$ a $(0, 0, 0)$ de modo que $(3, 1, 4)$ pertenezca a la curva.

5. Las siguientes funciones vectoriales representan la posición de una partícula en el tiempo t:

$$\vec{r_1}(t) = cos(\pi t)\hat{\mathbf{i}} + sen(\pi t)\hat{\mathbf{j}} + 2sen(\pi t)\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{r_2}(t) = e^t\hat{\mathbf{i}} + ln(t)\hat{\mathbf{j}} + t^2\hat{\mathbf{k}}$$

   a) Hallar la posición de las partículas en el tiempo $t = 1$ y $t = 2$.
   b) Hallar el dominio más amplio de cada componente y el dominio de cada función vectorial.
   c) Averiguar si las partículas pasan en algún instante por los puntos $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 1, 2)$, $C(e, 0, 1)$, $D(e, -ln(2), 1/4)$ y en caso afirmativo indicar en qué instante pasan por ellos.
   d) Calcular $|\vec{r_1}(t)|$, $t^2\vec{r_2}(t)$, $3\vec{r_2}(t) - 2\vec{r_1}(t)$, $\vec{r_1}(t).\vec{r_2}(t)$, $\vec{r_1}(t) \times \vec{r_2}(t)$ e indicar si son funciones escalares o vectoriales.
   e) Expresar las dos curvas dadas como intersección de dos superficies.

6. Encontrar una ecuación cartesiana de las siguientes curvas:

$$C_1 : \vec{r_1}(t) = (2t, t^2–3)$$

$$C_2 : \vec{r_2}(t) = (t\sin(t), tcos(t), t)$$

7. Calcular la longitud del trozo de curvas que se indica:
   $r(t) = (\sin(2t), 2\sin(t^2))$, desde $(0, 2)$ a $(1, 1)$ en sentido horario

8. Calcular los vectores tangente, normal y binormal en los puntos indicados:
   a) $\vec{r}(t) = (2t, t^2)$ en $(2, 1)$ b) $\vec{r}(t) = (3t, 1 - 2t, t)$ en $(-3, 3, -1)$

9. Una partícula parte en $t = 0$ del punto (1,2,3) con velocidad 2 y viaja en línea recta hacia el punto (4,1,4) con aceleración constante $3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$. Hallar su posición en el tiempo t.