



ANÁLISIS MATEMÁTICO I

DEPARTAMENTO DE
CIENCIA Y TECNOLOGÍA
2017

UNQ - DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

AÑO 2017

PROGRAMA

I- Límite y continuidad

Repaso de funciones. Noción intuitiva de límite. Límites laterales. Propiedades y cálculo. Teorema de intercalación. Comportamiento cuando x se hace muy grande. Límites infinitos. Asíntotas horizontales y verticales. Continuidad en un punto y en un intervalo. Propiedades de las funciones continuas. Teorema de Bolzano. Método de bisección para el cálculo aproximado de raíces.

II- Derivadas

Noción de recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Noción de velocidad instantánea. Definición de derivada. Relación entre derivabilidad y continuidad. Reglas de derivación de sumas, productos, cocientes y composición de funciones. Derivación sucesiva.

III- Aplicaciones de la derivada

Derivación implícita. Razón de cambio. Diferencial. Aproximación lineal. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio para derivadas (Lagrange). Crecimiento y decrecimiento de funciones. Extremos absolutos y relativos. Concavidad y puntos de inflexión. Estudio y gráfica de funciones.

IV- Integración

Antiderivadas o primitivas inmediatas. Integral definida : definición y propiedades. Teorema del valor medio del cálculo integral. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Área entre curvas. Cálculo aproximado: Regla de los trapecios.

V- Función logaritmo y exponencial

Función logarítmica : definición y propiedades. Función exponencial : definición y propiedades. Funciones logarítmicas y exponenciales generales. Funciones hiperbólicas.

VI- Métodos de integración

Método de sustitución- Método de integración por partes. Método de fracciones simples cuyo denominador sólo tiene raíces reales.

VII- Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

Funciones trigonométricas inversas. Gráficas, derivadas y primitivas. Método de fracciones simples cuyo denominador tiene al menos un par de raíces no reales. Funciones hiperbólicas inversas.

VIII- Otras aplicaciones de la derivada y la integral

Problemas de máximos y mínimos.

Regla de L'Hospital

Volumen de sólidos de revolución y por secciones.

BIBLIOGRAFÍA

1- Cálculo

James Stewart- Grupo Editorial Iberoamérica

2- Cálculo con Geometría Analítica

Earl W. Swokowski - Grupo Editorial Iberoamérica

3- Cálculo con Geometría Analítica

Dennis Zill- Grupo Editorial Iberoamérica

4- Cálculo y Geometría Analítica

Larson- Hostetler - McGraw- Hill

5- El cálculo con Geometría Analítica

Louis Leithold- Editorial Harla

6- Cálculo y Geometría Analítica

Stein - McGraw- Hill

7- Cálculo

Serge Lang- Addison Wesley Iberoamericana

8- Cálculo- Tomo I

Smith- Minton- McGraw- Hill

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

2017

**Práctico
Nº1**

Funciones: dominio, imagen, gráfica. Funciones definidas por tramos. Traslaciones y reflexiones de gráficas. Función valor absoluto. Funciones seno y coseno. Funciones periódicas. Funciones pares e impares. Gráficas y aplicaciones.

Guía teóricaFunción numérica

Si a cada elemento x de un conjunto A de números reales, al que llamamos dominio, le hacemos corresponder un **único** número real, decimos que hemos definido una función de A en $\mathbf{R}$. Si llamamos a dicha función f indicamos: $f : A \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \rightarrow f(x)$$

y decimos que $f(x)$ es la **imagen** del elemento x de A .

Ejemplos: $f(x) = mx + b$ (si $m \neq 0$, función lineal; si $m = 0$, función constante)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \quad (\text{función cuadrática})$$

Gráfica de una función

Dada $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ con $A \subseteq \mathbf{R}$, se llama gráfica de la función f al conjunto:

$$\text{Graf}(f) = \{(x, y) / x \in A \wedge y = f(x)\}$$

Observar que **Graf(f)** está contenido en el plano coordenado al que indicamos $\mathbf{R}^2$

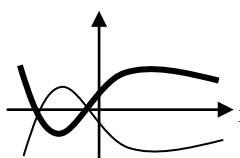
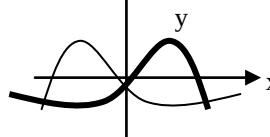
Desplazamientos horizontales y verticales

Dada una función $y = f(x)$ y un número $c > 0$, se verifica que:

la gráfica de:	es como la gráfica de:
$y = f(x) + c$	$y = f(x)$ pero desplazada c unidades hacia arriba
$y = f(x) - c$	$y = f(x)$ pero desplazada c unidades hacia abajo
$y = f(x + c)$	$y = f(x)$ pero desplazada c unidades hacia la izquierda
$y = f(x - c)$	$y = f(x)$ pero desplazada c unidades hacia la derecha

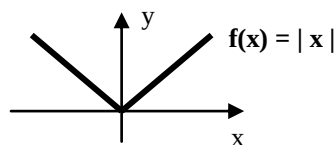
Reflexiones

Dada una función $y = f(x)$, se verifica que

la gráfica de: $y = -f(x)$	es como la gráfica de: $y = f(x)$ pero reflejada respecto del eje x	 Gráfica de $f(x)$ — Gráfica de $-f(x)$ —
la gráfica de: $y = f(-x)$	es como la gráfica de: $y = f(x)$ pero reflejada respecto del eje y	 Gráfica de $f(x)$ — Gráfica de $f(-x)$ —

Función valor absoluto:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Propiedades del valor absoluto**

a) $ x = -x $	b) $ x \geq x$
c) $\sqrt{x^2} = x $	d) $ x_1 - x_2 = x_2 - x_1 $
e) Si a es un número real positivo: $ x < a \Leftrightarrow -a < x < a$	f) Si a es un número real positivo : $ x > a \Leftrightarrow (x > a \vee x < -a)$
g) El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos : $ x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2 $	h) El valor absoluto de un cociente es igual al cociente de los valores absolutos : $\frac{ x_1 }{ x_2 } = \frac{ x_1 }{ x_2 }$ si $x_2 \neq 0$
i) El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos : $ x_1 + x_2 \leq x_1 + x_2 $	j) El valor absoluto de una resta es menor o igual que la suma de los valores absolutos y mayor o igual que la resta de los valores absolutos $ x_1 - x_2 \leq x_1 - x_2 \leq x_1 + x_2 $

Observación:

* Si a es un número real **positivo**, valen las siguientes equivalencias:

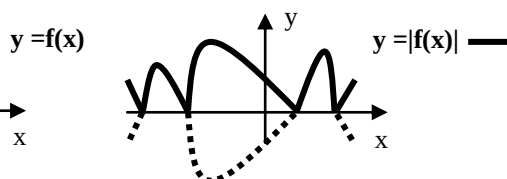
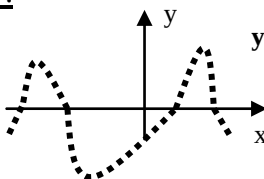
$$1- x^2 < a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{a} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{a} \Leftrightarrow -\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$$

$$2- x^2 > a \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{a} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{a} \Leftrightarrow (x > \sqrt{a}) \vee (x < -\sqrt{a})$$

* Si a es un número real **negativo**, ningún número real x verifica la desigualdad $x^2 < a$ y todos los números reales verifican la desigualdad $x^2 > a$

Valor absoluto de una función :

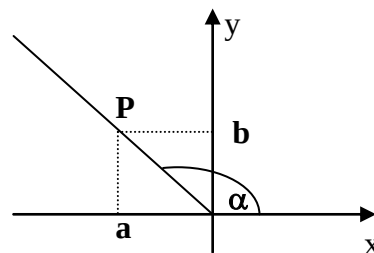
$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

**Funciones seno y coseno**

Consideramos un ángulo α en el plano coordenado con su vértice en el origen de coordenadas y su lado inicial en el eje x positivo. Si $P(a, b)$ es un punto del lado terminal y si $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ es la distancia entre el punto P y el origen, recordemos que:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{d} = \frac{\text{ordenada del punto } P}{\text{distancia entre el punto } P \text{ y el origen}}$$

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{a}{d} = \frac{\text{abscisa del punto } P}{\text{distancia entre el punto } P \text{ y el origen}}$$



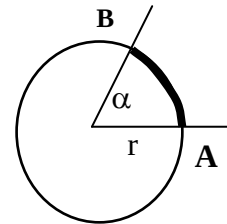
Si el punto P se toma de modo que $d = 1$ entonces:

$$\text{sen } \alpha = y = \text{ordenada de P}$$

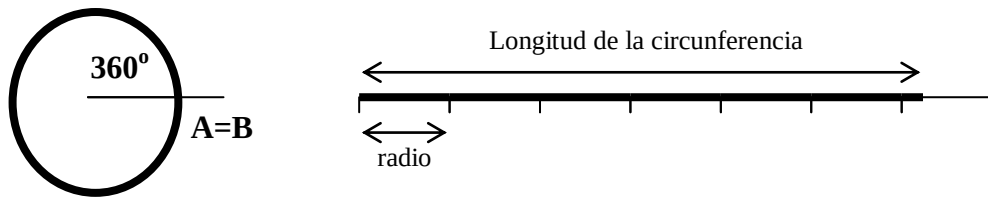
$$\text{cos } \alpha = x = \text{abscisa de P}$$

Para que seno y coseno resulten ser funciones de variable real es necesario encontrar un número real que represente la medida del ángulo α .

Recordemos que si se traza una circunferencia con centro en el vértice del ángulo, se denomina **ángulo de 1 radián** a aquel cuyo arco **AB** mide igual que su radio.



Si el ángulo mide 360° , la longitud del arco **AB** resulta ser la longitud de la circunferencia completa y es conocido que su longitud es $L = 2\pi r$, esto significa que el radio r entra $2\pi \cong 6,28$ veces en la longitud.

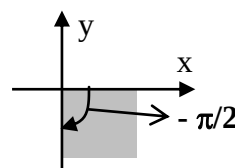
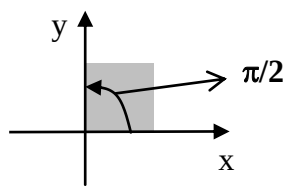


Según esto podemos decir que a 360° le corresponde una medida en radianes de 2π ; a su mitad le corresponde la mitad, es decir a un ángulo de 180° le corresponde $\pi \cong 3,14$ radianes; a 90° le corresponde $\pi/2 \cong 1,57$; a 1° le corresponde $\pi/180$ y a un ángulo cuya medida es α° le corresponde $\alpha\pi/180$.

También podemos pasar de radianes a grados: como la medida de un ángulo de π radianes es 180° , entonces la medida en grados de un ángulo de 1 radián es igual a $(180/\pi)^\circ = 57^\circ 19'$, y el de x radianes es igual a $x \cdot (180/\pi)^\circ$.

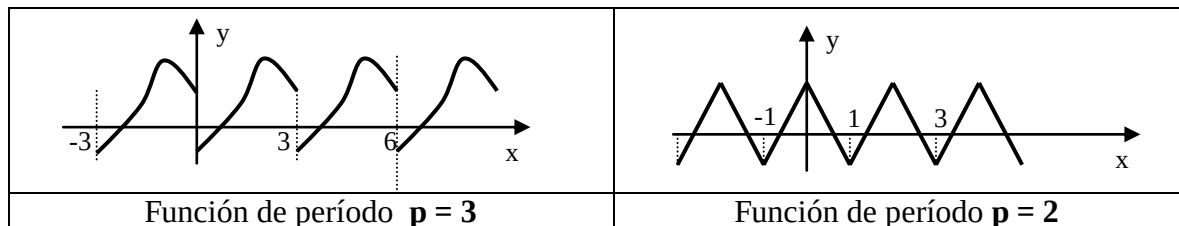
La medida en radianes es un número real, no tiene unidades.

Si un ángulo se obtiene haciendo girar el lado inicial hasta el lado terminal en sentido contrario a las agujas del reloj, el ángulo se considera positivo; si el giro se produce a favor de las agujas del reloj, el ángulo se considera negativo.



Funciones periódicas

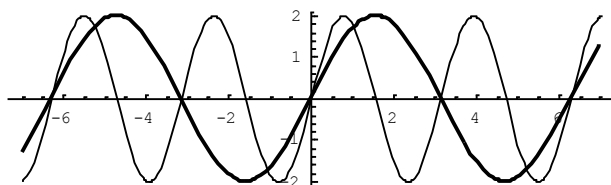
Se dice que $f(x)$ es periódica y que su período es el número p , si p es el menor número positivo para el cual se verifica la igualdad: $f(x + p) = f(x)$



Propiedad : Las funciones $f(x) = a \text{ sen } bx$ y $g(x) = a \text{ cos } bx$, con a y b números reales y $b > 0$ tienen período $2\pi/b$.

Ejemplos:

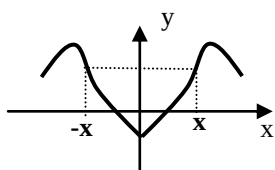
- 1- En el siguiente gráfico se observa la gráfica de $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$, trazada con línea gruesa y la gráfica de $g(x) = 2 \operatorname{sen} 2x$, trazada con línea fina.



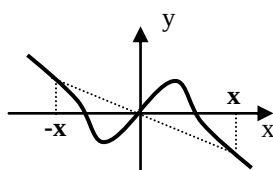
- 2- Para hallar el período de la función $h(x) = \cos(4x + 2)$ es conveniente escribirla del siguiente modo $h(x) = \cos[4x + 2] = \cos[4(x + \frac{1}{2})]$, de este modo vemos que su gráfica es como la de $h_1(x) = \cos(4x)$ pero desplazada $\frac{1}{2}$ hacia la izquierda, por lo tanto su período es $2\pi/4 = \pi/2$.

Paridad de funciones

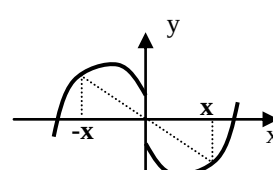
Sea $f(x)$ una función cuyo dominio es $\mathbf{R}$ o un intervalo de la forma $(-a, a)$ o $[-a, a]$ entonces:
 si $f(-x) = f(x)$ decimos que $f(x)$ es **par**, y su gráfica es simétrica respecto al eje y,
 si $f(-x) = -f(x)$ decimos que $f(x)$ es **impar**, y su gráfica es simétrica respecto al origen.



Función par: su gráfico es simétrico respecto al eje y



Función impar: su gráfico es simétrico respecto al origen



Función impar: su gráfico es simétrico respecto al origen

Ejercicios

- 1) Dadas las funciones de dominio $\mathbf{R}$: $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 5$, $f_2(x) = -1$ y $f_3(x) = -2x$
 a) Averiguar para qué valores de x se verifican las desigualdades siguientes
 $f_3(x) > f_2(x)$ $f_1(x) < f_3(x) < f_2(x)$ $f_1(x) > f_2(x) \geq f_3(x)$
 b) Representar gráficamente las funciones dadas y comprobar gráficamente los resultados obtenidos en a)

- 2) a) Dada la función cuadrática $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, hallar la expresión de las funciones $g(x) = f(-x)$, $h(x) = -f(x)$, $t(x) = f(x) + 2$ y $u(x) = f(x + 2)$ y representarlas gráficamente.

- 3) Hallar el dominio más amplio de las funciones y representarlo gráficamente.
 (Recordar que no se puede dividir por cero y las raíces de índice par sólo existen si el radicando es mayor o igual a cero.)

$$I(x) = \sqrt{3x - 2}$$

$$J(x) = \sqrt{-x(x+7)}$$

$$K(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$$

$$L(x) = \frac{x+2}{x^3 - 2x^2 - 3x}$$

$$M(x) = \frac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt{2-3x}}$$

$$N(x) = \frac{x-6}{\sqrt{x^2-9} - \sqrt{45-3x}}$$

- 4) a) Hallar el dominio más amplio de las funciones: $R(t) = \sqrt{\frac{4-2t}{6-t}}$, $S(t) = \frac{\sqrt{4-2t}}{\sqrt{6-t}}$
- b) Sabiendo que : “**dos funciones son iguales cuando coinciden sus dominios y en cada uno de sus puntos las funciones toman exactamente el mismo valor**”, indicar para qué valores de t las funciones R y S son iguales?.
- 5) a) Representar gráficamente las funciones $h(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{2x}$ e indicar el dominio más amplio de cada una de ellas.
- b) Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en a), hallar el dominio y graficar las funciones: $h_1(x) = x^3 + 2$, $h_2(x) = (x+1)^3$, $h_3(x) = -x^3$,
 $f_1(x) = -\sqrt{2x}$, $f_2(x) = -\sqrt{2(x+1)}$, $f_3(x) = -\sqrt{2(x+1)} - 3$
- 6) Representar gráficamente las siguientes funciones
- $$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 0 \\ 2-x & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq -1 \\ -x & \text{si } x < -1 \end{cases}$$
- $$h(u) = \begin{cases} 2 & \text{si } u < -1 \\ -2u & \text{si } -1 \leq u \leq 2 \\ -1 & \text{si } u > 2 \end{cases} \quad i(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \vee x = -2 \\ 4-x^2 & \text{si } x < -2 \vee x > 2 \end{cases}$$
- 7) Si x representa la ganancia anual de un empleado y $f(x)$ es el impuesto que debe abonar anualmente, construir la función $f(x)$ y luego representarla gráficamente sabiendo que: si $0 < x \leq 5.000$, el impuesto es 15% de x ; si $5.000 < x \leq 15.000$, el impuesto es \$750 más el 20% de la cantidad que exceda a \$5.000; si $15.000 < x$, el impuesto es \$5.250 más el 40% de la cantidad que exceda a \$15.000
- 8) Graficar las funciones $h_1(x) = 4 - 2x$, $h_2(x) = |4 - 2x|$, $h_3(x) = 4 - 2|x|$,
 $h_4(x) = (x-2)^2 - 4$, $h_5(x) = |(x-2)^2 - 4|$ y expresar $h_2(x)$, $h_3(x)$ y $h_4(x)$ sin barras de valor absoluto.
- 9) A partir del gráfico de $f(x) = |x|$, averiguar para qué valores de x se verifica
 $f(x) < 3$, $f(x) > 1$, $f(x) < 0$, $f(x) > 0$, $f(x) < -2$, $f(x) > -2$
- 10) Para cada una de las siguientes funciones, hallar una expresión equivalente sin barras de valor absoluto, indicar el dominio y graficarlas.
- a) $f(x) = x|x|$ b) $g(x) = \frac{x}{|x|}$ c) $h(x) = |5 - 3x|$
- d) $i(t) = |t^2 - 9|$ e) $j(x) = |x - 3| - |x|$ f) $k(x) = |x + 2| + |x - 3| - |x|$
- 11) Teniendo en cuenta el gráfico de $F(x) = \text{sen } x$, graficar las siguientes funciones:
- $$\begin{array}{lll} F_1(x) = 2 \text{ sen } x & F_2(x) = \text{sen}(x - \pi) & F_3(x) = (\text{sen } x) - \pi \\ F_4(x) = |\text{sen } x| & F_5(x) = \text{sen}|x| & F_6(x) = -\text{sen } x \end{array}$$
- 12) Para las siguientes funciones, hallar el período y representarlas gráficamente
- $$\begin{array}{lll} f(x) = \text{sen}(\pi x) & , & g(x) = 3 \text{ sen}(4x) & , & h(x) = \frac{1}{2} \cos(3x) & , \\ i(x) = 2 \cos(\frac{1}{2} x) & , & j(x) = \text{sen}(2x - \pi) & , & k(x) = \cos(\pi x + \pi/2) \end{array}$$

13) ¿Cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas?

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 5, & g(x) &= \sin x - 2x, & h(x) &= x^2 - 3|x|, \\ i(x) &= |\sin(3x)|, & k(x) &= x^2 - |x - 1| \end{aligned}$$

Ejercicios adicionales

1- Indicar el dominio más amplio y representar gráficamente las siguientes funciones

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad g_1(x) = \frac{1}{x-3} \quad g_2(x) = \frac{1}{x} - 3 \quad g_3(x) = \frac{1}{x-3} + 3$$

2- Expresar las siguientes funciones sin barras de valor absoluto, indicar el dominio de cada una y representarlas gráficamente

$$g(x) = \frac{3-x-|3+2x|}{|x|} \quad h(x) = \frac{|3-x|-(3+2x)}{|x|} \quad f(x) = \left| \frac{x^2-9}{x+3} \right|$$

3-Si $g(x) = x^3 - 2x^2 + 3$, calcular $g(-x)$ y justificar que $G(x) = g(x) + g(-x)$ es una función par y $H(x) = g(x) - g(-x)$ es una función impar

4-Si $f(x) = 5x - x^2 - 4$, graficar $g(x) = |f(x)|$ y $h(x) = f(|x|)$ y expresarlas sin barras de valor absoluto. Analizar la paridad de las funciones dadas.

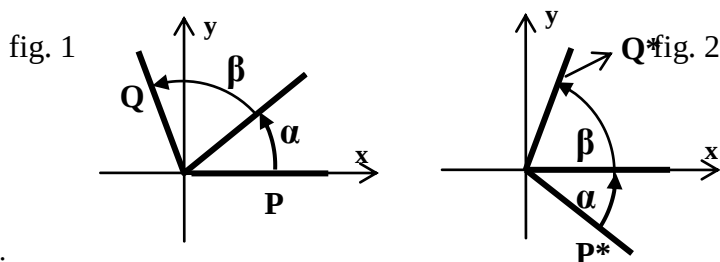
5- Averiguar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguna de las dos cosas:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x + \pi) & g(x) &= \sin(x + 3) & h(x) &= \sin(3x) + \sin 3 \\ i(x) &= x \sin x & j(x) &= x \cos x & k(x) &= \sin x + \cos x \end{aligned}$$

6- Hallar el dominio y representar gráficamente los tres dominios.

$$f(x) = \sqrt{35 - x^2 - 2x}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{2+x}{3-x}} - 3, \quad i(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 4x} - \sqrt{3}}{x^2 + x}$$

7- En la figura 1 se observan dos ángulos consecutivos α y β y dos puntos, P y Q , que distan una unidad del origen. La figura 2 muestra los mismos ángulos y los mismos puntos pero ubicados de otra manera.



a) Justificar que:

Coordenadas del punto P son $(1,0)$
 Coordenadas del punto Q son $(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$
 Coordenadas del punto P^* son $(\cos \alpha, -\sin \alpha)$
 Coordenadas del punto Q^* son $(\cos \beta, \sin \beta)$

b) Calcular las distancias $d(P, Q)$ y $d(P^*, Q^*)$ en términos de α y β (usar a) y teniendo en cuenta que $d(P, Q) = d(P^*, Q^*)$ deducir la expresión:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

c) Usando la fórmula anterior, justificar que:

$$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin \alpha$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

8- Dada $h(x) = \sin x + \cos x$, ¿es posible reescribirla como $h(x) = A \sin(x+b)$? Si la respuesta es afirmativa hallar A y b .

Respuestas de los Ejercicios

1) Si $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ entonces $f_3(x) > f_2(x)$

Si $x \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ entonces $f_1(x) < f_3(x) < f_2(x)$

Si $x \in (2, +\infty)$ entonces $f_1(x) > f_2(x) \geq f_3(x)$

$$\begin{array}{ll} 2) & g(x) = -x^2 - 2x + 3 \quad h(x) = x^2 - 2x - 3 \\ & t(x) = -x^2 + 2x + 5 \quad u(x) = -x^2 - 2x + 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3) & D I = \left[\frac{2}{3}, +\infty\right) \quad D J = [-7, 0] \\ & D K = \mathbb{R} \quad D L = \mathbb{R} - \{-1, 0, 3\} \\ & D M = \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \quad D N = (-\infty, -9) \cup (-9, -3] \cup [3, 6) \cup (6, 15] \end{array}$$

$$4) \quad D R = (-\infty, 2] \cup (6, +\infty) \quad D S = (-\infty, 2]$$

$$\begin{array}{l} 5) \quad D h = D h_1 = D h_2 = D h_3 = \mathbb{R} \\ D f = D f_1 = [0, +\infty) \quad D f_2 = D f_3 = [-1, +\infty) \end{array}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} 0,15x & \text{si } 0 < x \leq 5000 \\ 0,20x - 250 & \text{si } 5000 < x \leq 15000 \\ 0,40x - 750 & \text{si } x > 15000 \end{cases}$$

$$8) h_2(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{si } x \leq 2 \\ -4 + 2x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad h_3(x) = \begin{cases} 4 - 2x & \text{si } x \geq 0 \\ 4 + 2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$h_5(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & \text{si } x \notin (0, 4) \\ -x^2 + 4x & \text{si } x \in (0, 4) \end{cases}$$

- 9) Si $x \in (-3, 3)$ entonces $f(x) < 3$
 Si $x \notin [-1, 1]$ entonces $f(x) > 1$
 No existe x tal que $f(x) < 0$,
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$,
 No existe x tal que $f(x) < -2$,
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > -2$

$$10) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad Dg = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$h(x) = \begin{cases} 5-3x & \text{si } x \leq \frac{5}{3} \\ -5+3x & \text{si } x > \frac{5}{3} \end{cases} \quad i(t) = \begin{cases} t^2-9 & \text{si } t \notin (-3, 3) \\ -t^2+9 & \text{si } t \in (-3, 3) \end{cases}$$

$$j(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ -2x+3 & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ -3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad k(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < -2 \\ x+5 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 5-x & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ x-1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- 12) Período de f : 2 Período de g : $\frac{\pi}{2}$ Período de h : $\frac{2\pi}{3}$
 Período de i : 4π Período de j : π Período de k : 2
- 13) $f(x)$ es una función par
 $g(x)$ es una función impar
 $h(x)$ es una función par
 $i(x)$ es una función par
 $k(x)$ no es una función par y tampoco es impar

Respuestas de los Ejercicios Adicionales

- 1) $Dg = \mathbb{R} - \{0\}$ $Dg_1 = \mathbb{R} - \{3\}$
 $Dg_2 = \mathbb{R} - \{0\}$ $Dg_3 = \mathbb{R} - \{3\}$

$$2) \quad g(x) = \begin{cases} 1-\frac{6}{x} & \text{si } x < -\frac{3}{2} \\ 3 & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x < 0 \\ -3 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ -3 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ -1-\frac{6}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -x+3 & \text{si } x < 3 \wedge x \neq -3 \end{cases}$$

- 4) $h(x)$ es una función par.
- 5) $f(x)$ es una función par. $i(x)$ es una función par.; $j(x)$ es una función impar.

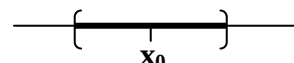
$$6) D f = [-7, 5] \quad D g = \left[\frac{7}{4}, \frac{11}{2} \right] - \{3\} \quad D I = [-2, -1) \cup (-1, 0) \cup [2, +\infty)$$

$$8) A = \sqrt{2} \wedge b = \frac{\pi}{4} \quad A = -\sqrt{2} \wedge b = \frac{5\pi}{4}$$

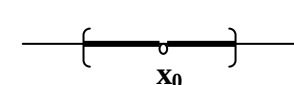
UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología	
<u>ANÁLISIS MATEMÁTICO I</u>	
2017	
Práctico Nº2	Noción intuitiva de límite. Límites laterales. Propiedades y cálculo. Teorema de intercalación. Comportamiento cuando x se hace muy grande. Límites infinitos. Asíntotas horizontales y verticales.

Guía teórica

Entorno

Un intervalo abierto centrado en x_0 se denomina **entorno de x_0** 

Entorno reducido

Si a un entorno de x_0 le quitamos el punto x_0 se obtiene un conjunto que se denomina **entorno reducido de x_0** **Límite**

Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de x_0 , se dice que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende al valor x_0** es el número L , y escribimos $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, si $f(x)$ puede

aproximarse arbitrariamente al número L ($f(x)$ puede tomar valores tan cercanos a L como se quiera) cuando x toma valores suficientemente cercanos al valor x_0 con $x \neq x_0$

Nota importante: Cuando se pide calcular $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, interesa conocer que le sucede

a $f(x)$ cuando x está cercano a x_0 y **no interesa para nada** que le sucede a la función f en el valor x_0

Límites laterales

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto (a, x_0) , se dice que el **límite por la izquierda de $f(x)$ cuando x tiende a un valor x_0** es el número L_1 , y escribimos

$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L_1$, si $f(x)$ puede aproximarse arbitrariamente al número L_1 cuando x toma

valores suficientemente cercanos al valor x_0 con $x < x_0$

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto (x_0, b) , se dice que el **límite por la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a un valor x_0** es el número L_2 , y escribimos

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L_2$, si $f(x)$ puede aproximarse arbitrariamente al número L_2 cuando x toma

valores suficientemente cercanos al valor x_0 con $x > x_0$

Teorema:

a) Si los límites laterales $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existen y son iguales a un número L

→ el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe y su valor es L .

- b) Si el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe y su valor es $L \rightarrow$ los límites laterales $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existen y son iguales a L

Corolario:

- a) Si los límites laterales $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existen y son distintos $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe
- b) Si alguno o ambos de los límites laterales $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ no existen $\rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ no existe

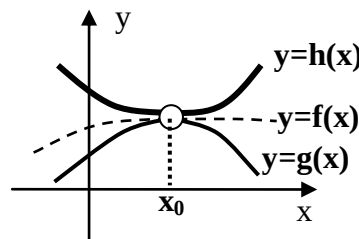
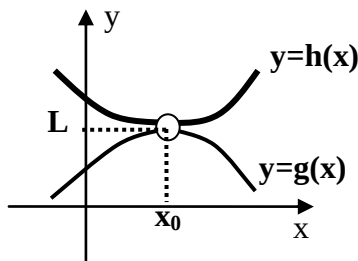
Propiedades de los límites

Si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ y existe $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ entonces:

- a- $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kA$, siendo k una constante
- b- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$
- c- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$
- d- Si $B \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

Teorema de intercalación (o teorema del sandwich)

Si $g(x) \leq h(x)$ para los x de un entorno reducido de x_0 y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$ y si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ en un entorno reducido de x_0 entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$



Consecuencias:

- 1- $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ (Observar que : $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$)
- 2- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$ y $|g(x)| \leq M$ para los x de un entorno reducido de x_0 entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

(como $g(x)$ se encuentra entre $-M$ y M , recordar que esto significa que la función $g(x)$ está acotada y por ello esta propiedad se conoce con el nombre “producto de cero por acotada”)

Un límite importante: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

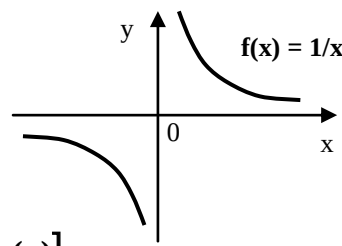
Límites infinitos

Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de x_0 . La expresión $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como se quiera) tomando x valores suficientemente cercanos al valor x_0 pero no igual a x_0 . (Tener en cuenta que el símbolo ∞ no representa ningún número)

En forma similar, la expresión $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer negativos y de valor absoluto tan grande como se quiera, tomando x valores suficientemente cercanos al valor x_0 pero no igual a x_0 .

Límites importantes : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

por lo tanto decimos que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ y no colocamos signo

**Observaciones**

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty$ y

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$ pero $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ son indeterminados, esto

significa que en cada ejercicio donde haya que calcular límites del tipo $\infty - \infty$ o ∞ / ∞ hay que averiguar cuál es su resultado.

Límites al infinito

Sea $f(x)$ una función definida en algún intervalo (a, ∞) , se dice que el límite de $f(x)$ es el número L , cuando x tiende a infinito y escribimos $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, si los valores de $f(x)$

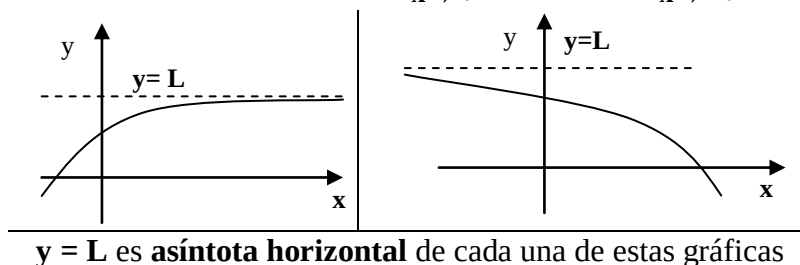
pueden aproximarse arbitrariamente al número L ($f(x)$ puede tomar valores tan cercanos a L como se quiera) cuando x toma valores positivos suficientemente grandes.

En forma similar, si $f(x)$ está definida en algún intervalo $(-\infty, a)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ significa

que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente al número L , cuando x toma valores negativos de valor absoluto suficientemente grandes.

Asíntotas horizontales

Se dice que la recta de ecuación $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$ si se verifica uno de los siguientes resultados: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

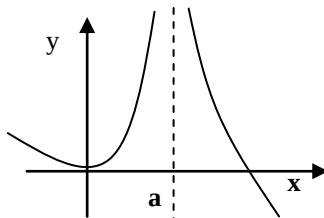


Asíntotas verticales

Se dice que la recta de ecuación $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$ si se verifica uno de los siguientes resultados: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$,

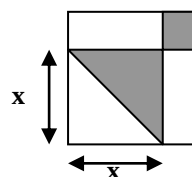
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$x = a$ es asíntota vertical

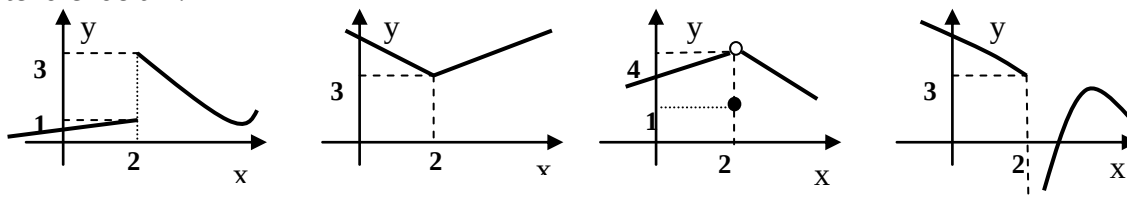


Ejercicios

- 1) La figura de la derecha es un cuadrado de lado 10 y x es un número real que verifica $0 < x < 10$
 - a) Razonando geoméricamente, averiguar a qué valor se acerca el área sombreada si x se acerca a 0. Idem si x se acerca a 10.
 - b) Hallar una expresión para el área sombreada $A(x)$ y calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x)$, $\lim_{x \rightarrow 10^-} A(x)$ y corroborar los resultados obtenidos en a)



- 2) Teniendo en cuenta los gráficos siguientes, hallar los límites laterales y el límite para x tendiendo a 2.



- 3) Calcular, si existen, los límites laterales y el límite en el punto x_0 indicado

$$\text{a) } u(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x > -2 \\ 7 - x & \text{si } x \leq -2 \end{cases} \quad x_0 = -2 \quad \text{b) } v(x) = \begin{cases} 4x - 3 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x = 2 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$$

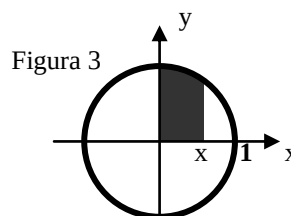
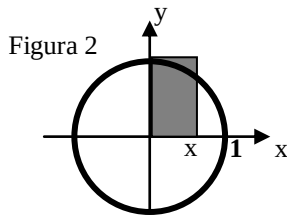
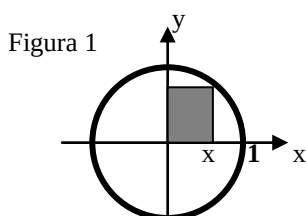
- 4) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 2x + 4}$ y $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$

- a) Hallar el dominio de cada una.
- b) ¿Tiene sentido calcular los siguientes límites $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$? En cada caso justificar la respuesta y calcular los límites que tengan sentido

$$\begin{aligned} \text{5) Calcular} \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{3x-3} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{3x-3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x+1}} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 4x^2 + 6}{4x^2 + 6x + 2} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x^2 - 27|}{x-3} \end{aligned}$$

- 6) Dada $f(x) = \frac{\sqrt{15-|x-5|} - \sqrt{|x|-4}}{(x+7)(x-4)}$, hallar su dominio y calcular, si tienen sentido $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$.

7) Teniendo en cuenta los gráficos



- a) Calcular el área de los rectángulos sombreados de la figuras 1 y 2 (el radio vale 1)
 b) Si $A(x)$ es el área de la zona sombreada de la figura 3, calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A(x)}{x}$. Usar los resultados obtenidos en a) y el teorema de intercalación de límites.

8) Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x \sin x|}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

9) Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{3x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\tan(bx)}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \sin(x-1)}{1 - \cos(x-1)}$

10) Dada $g(x) = \begin{cases} 4x-6 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\sin(2x-2)}{x^2-x} & \text{si } 1 < x < 2 \\ x-1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, calcular $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

11) Hallar los límites laterales en los puntos indicados y hacer un gráfico aproximado en las cercanías del mismo

a) $f(x) = \frac{3}{x-2}$ $x = 2$ b) $g(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$ $x = -1$
 c) $h(t) = \frac{2t+3}{4t^2-9}$ $t = 3/2$, $t = -3/2$ d) $F(x) = \frac{1 - \sin(3x)}{x}$ $x = 0$

12- Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x^2 + 2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+2}}$ e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+2}}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 - 3x}$
 g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x}$ i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x}$

13- Determinar los valores de **a** y **b** sabiendo que:

$$a) f(x) = \frac{ax+2}{bx-1} \quad y \quad f(-2) = 1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$$

$$b) f(x) = \frac{\sin(ax)}{x} + \frac{bx^2-3x}{x^2+1} \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

Ejercicios adicionales

1- Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| [1+\cos(\pi x)]}{x-3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-\sin(3x)}$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-\cos h}{h} \quad d)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-1}-1}{x^4+x^2-2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4-4}{x^2-2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 2x}$$

2- Hallar el dominio más amplio de $F(x) = \sqrt{x+x^{-1}} - \sqrt{x-x^{-1}}$ y $G(x) = \frac{\sqrt{x^3+8x^2} - \sqrt{x^2-6x}}{x^2+x}$. ¿Tiene sentido calcular los siguientes límites $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} G(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} G(x)$? Teniendo esto en cuenta, calcular $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1} G(x)$.

3- a) Dadas las funciones $f_1(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ y $f_2(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{9}{x^2+x-2}$, justificar

que $f_1(x) \leq f_2(x)$ para los x de un entorno reducido de $x = 1$ (restar ambas ecuaciones y observar el signo del resultado)

b) Si $f(x)$ es una función que verifica $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ para los x de un entorno reducido de $x = 1$, calcular si existe, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

4- Si $|g(x)| \leq \frac{\sin(2x)}{\sqrt[3]{x}}$ para los x de un entorno reducido de $x = 0$, calcular $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

5- Si $h(x)$ en un entorno reducido de $x = -2$ verifica: $-|x+2| \leq |h(x)| \leq |2x+4|$, interpretar gráficamente la información dada y calcular $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$,

$\lim_{x \rightarrow -2} h(x) \cos\left(\frac{1}{x+2}\right)$ justificando todos los pasos

6- Indicar el dominio más amplio de $g(t) = \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)$. Verificar que

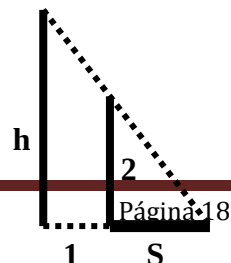
$g(1) = g(1/2) = g(1/3) = g(1/4) = \dots = g(1/n) = 0$, siendo n un número entero

$g(2) = g(2/41) = g(2/401) = g(2/4001) = \dots = g(1/(4 \cdot 10^n + 1)) = 1$,

$g(2/3) = g(2/39) = g(2/399) = g(2/3999) = \dots = g(2/(4 \cdot 10^n - 1)) = -1$

A partir de las verificaciones propuestas, ¿se puede afirmar que $\lim_{t \rightarrow 0} g(t)$ existe?

7- Un farol ilumina desde una altura h un poste de 2 metros de altura. Para $h > 2$, el poste proyecta una sombra de longitud $S = s(h)$. Si la base del poste se encuentra a 1 metro de la base del farol, calcular

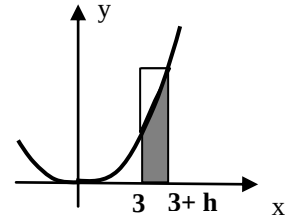


intuitivamente $\lim_{h \rightarrow 2^+} s(h)$ y luego verificar analíticamente el resultado hallando previamente $s(h)$

8- Si $f(x) = x^2$ y $A(h)$ es el área entre la gráfica de $f(x)$ y el eje x comprendida entre las rectas $x = 3$ y $x = 3 + h$

(zona sombreada), calcular $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(h)}{h}$

Ayuda: Observar que $A(h)$ está comprendida entre el área de dos rectángulos, uno por defecto y otro por exceso.



Respuestas de los Ejercicios

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = 100$ $\lim_{x \rightarrow 10^-} A(x) = 50$

2) No existe 3 4 N existe

3) a) No existe b) 5

4) a) $D f = [-1, 2]$ $D g = [-2, 2]$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 0$

5) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{3x-3} = \frac{-1+\sqrt{2}}{3}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{3x-3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3+1}{\sqrt{x+1}} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 - 4x^2 + 6}{4x^2 + 6x + 2} = -7$

e) No existe $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|3x^2 - 27|}{x-3}$

6) $D f = [-10, -7) \cup (-7, -4] \cup (4, 20]$

$\lim_{x \rightarrow -7} f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{33}$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$

7) a) Figura 1 Área = $x\sqrt{1-x^2}$

Figura 2 Área = x

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A(x)}{x} = 1$

8) a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x \sin x|}{x} = 0$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

9) a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{3x} = \frac{4}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\operatorname{tg}(bx)} = \frac{a}{b}$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x)}{x^2} = 2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \sin(x-1)}{1 - \cos(x-1)} = 2$$

$$10) \text{ No existe } \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

$$11) a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$c) \lim_{t \rightarrow (\frac{3}{2})^-} \frac{2t+3}{4t^2-9} = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow (\frac{3}{2})^+} \frac{2t+3}{4t^2-9} = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{2t+3}{4t^2-9} = -\frac{1}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sin(3x)}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sin(3x)}{x} = +\infty$$

$$12) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x^2 + x + 2} = \frac{3}{2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x + 2} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{2x^2+2} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+2}} = \frac{3}{2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+2}} = -\frac{3}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2 - 3x} = \frac{3}{2}$$

$$g) \text{ No existe } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$13) a) a = \frac{9}{8}, \quad b = -\frac{3}{8}$$

$$b) a = 6, \quad b = 2$$

Respuestas de los Ejercicios adicionales

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3| [1 + \cos(\pi x)]}{x-3} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - \sin(3x)} = -\frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|1 - \cos h|}{h} = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-1} - 1}{x^4 + x^2 - 2} = -\frac{1}{6}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2} = 4$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\sin 2x} = -\frac{1}{2}$$

$$2) Df = [1, +\infty)$$

$$Dg = [-8, -1) \cup (-1, 0) \cup [6, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} G(x) = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

$$3) b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

5) $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -2} h(x) \cos\left(\frac{1}{x+2}\right) = 0$

6) $D g = \mathbb{R} - \{0\}$

7) $\lim_{h \rightarrow 2^+} s(h) = +\infty$

8) $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(h)}{h} = 9$

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología	
<u>ANÁLISIS MATEMÁTICO I</u>	
2017	
Práctico Nº3	Continuidad en un punto y en un intervalo. Propiedades de las funciones continuas. Teorema de Bolzano. Método de bisección para el cálculo aproximado de raíces.

Guía teóricaContinuidad en un punto

Una función $f(x)$ es **continua** en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, lo cual significa que:

- 1- existe $f(x_0)$, es decir x_0 pertenece al dominio de f
- 2- existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- 3- el límite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ coincide con el valor $f(x_0)$

Continuidad en un intervalo abierto

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo abierto (a, b) , si es continua en cada punto de (a, b) .

Continuidad en un intervalo cerrado

Una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, si es continua en cada punto de (a, b) y se verifica $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

Propiedades de las funciones continuas

Si k es una constante y $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en x_0 entonces las funciones $k f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ son continuas en x_0 . Si $g(x_0) \neq 0$ entonces $\frac{f(x)}{g(x)}$ es continua en x_0

Más propiedades de las funciones continuas

1- Regla del corrimiento del límite : Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$ y

f es continua en $x = L$ entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(L)$.

2- Composición de funciones continuas: Si g es continua en x_0 y f es continua en $g(x_0)$ entonces $f(g(x))$ es continua en x_0

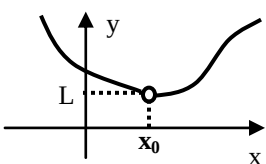
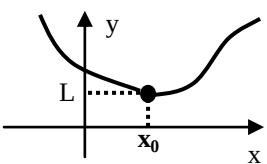
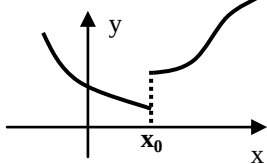
Discontinuidad evitable

Si $f(x_0)$ no existe, es decir x_0 no pertenece al dominio de f , pero existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se dice

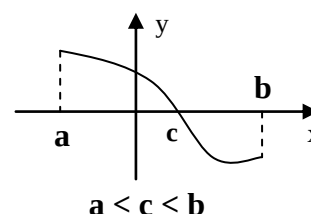
que la función $f(x)$ tiene una **discontinuidad evitable** en x_0 .

Observar que : si x_0 es una singularidad evitable de $f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ entonces la

función $f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ L & \text{si } x = x_0 \end{cases}$ es continua en x_0 .

		
f tiene una discontinuidad evitable en x_0	gráfica de la función $f^*(x)$, definida arriba	f no tiene límite en x_0 , la discontinuidad no es evitable

Teorema de Bolzano: Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y la evaluación de f en los extremos del intervalo tiene signos contrarios (si $f(a)$ es positivo y $f(b)$ es negativo o al revés) entonces existe al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = 0$



Raíz de una ecuación o cero de una función

Si $f(c) = 0$, se dice que c es una **raíz de la ecuación $f(x) = 0$** o que c es un **cero** de la función $f(x)$.

Localización de raíces de una ecuación o ceros de una función

Si $y = f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el signo de $f(a)$ es contrario al signo de $f(b)$, sabemos por el T. de Bolzano que entre a y b hay al menos una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, ¿cómo encontrar dicha raíz?

Supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ y evaluemos la función en un número c_1 comprendido entre a y b :

- si $f(c_1) = 0$ encontramos la raíz que buscábamos
- si $f(c_1) > 0$, por aplicación del T. de Bolzano, podemos afirmar que en el intervalo $[c_1, b]$ hay una raíz, pues f toma valores con signos contrarios en los extremos de dicho intervalo
- si $f(c_1) < 0$, entonces el T. de Bolzano asegura que hay una raíz en el intervalo $[a, c_1]$, pues f toma valores con signos contrarios en los extremos del intervalo.

Si la raíz está en el intervalo $[c_1, b]$, consideramos un número c_2 entre c_1 y b y repetimos los pasos anteriores, ídem si la raíz está en $[a, c_1]$. Por aplicación reiterada del teorema de Bolzano podemos encontrar la raíz con la precisión que deseemos.

Si c_1 es el punto medio del intervalo $[a, b]$, el método se denomina "**método de bisección**".

Ejercicios

1) Analizar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$a) F(x) = \begin{cases} \frac{\sin(6x)}{\sin(3x)} & \text{si } x \in (0, \pi/3) \\ 2 & \text{si } x \notin (0, \pi/3) \end{cases} \quad \text{en } x_0 = 0 \text{ y } x_1 = \pi/3$$

$$b) G(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x - \pi} & \text{si } x \neq \pi \\ -1 & \text{si } x = \pi \end{cases} \quad \text{en } x = \pi$$

$$c) H(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 3}{|x - 1| - 2} & \text{si } -1 < x < 3 \\ 2x^2 - 4x - 2 & \text{si } x \leq -1 \text{ ó } x \geq 3 \end{cases} \quad \text{en } x_0 = -1 \text{ y } x_1 = 3$$

2) Sabiendo que x , $\sin x$, $\cos x$ y las funciones constantes son continuas en toda la recta real, estudiar la continuidad de las siguientes funciones y enunciar la propiedad que utiliza para responder.

$$a) f(x) = 3x^2 - \cos^2 x \quad b) g(t) = \frac{\sin(2t)}{t^2 - 2t - 3} \quad c) h(u) = \frac{\cos(u - 1)}{u^2 + 4}$$

$$3) \text{ Dadas } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 5 \\ 4 & \text{si } x = 5 \\ 3x - x^2 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de f y de g en todo su dominio.

b) Determinar si los siguientes límites son correctos o no y justificar

$$: \lim_{x \rightarrow 0} f(x + 1) = f(1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} g(5 + h) = g(5)$$

4) Hallar los puntos donde cada función es continua, justificar la respuesta. Si hay puntos de discontinuidad evitable, redefinir la función para hacerla continua:

$$a) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x - x^2} \quad b) g(x) = \frac{\sin x}{x \sqrt[3]{x - 8}}$$

$$c) h(x) = \frac{\cos(x^2)}{1 + \cos^2 x} \quad d) h(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si } |x - 1| < 1 \\ 6 \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) & \text{si } |x - 1| > 1 \end{cases}$$

5) a) Averiguar cuánto debe valer a y b para que F sea continua en $x_0 = 2$ y $x_1 = -2$

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + 3 & \text{si } |x| \leq 2 \\ bx + 2 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$$

b) Indicar el dominio de G y hallar, si existe el valor de A para que G resulte continua en todo su dominio

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} & \text{si } |x| \leq \pi \text{ y } x \neq \pi/2 \\ A & \text{si } x = \pi/2 \end{cases}$$

c) Hallar, si existen los valores de a y b para que H resulte continua en todo punto.

$$H(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax + a)}{x + 1} & \text{si } x < -1 \\ bx & \text{si } |x - 1| \leq 2 \\ \frac{9 - x^2}{3 - x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

6) a) Dar un ejemplo de una función $f(x)$ tal que $f(3)$ no exista, pero $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ sí exista

b) Proponer un ejemplo de una función $f(x)$ que verifique $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$

c) ¿Cómo debe ser $f(x)$ en x_0 para que se verifique $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} x)$?

7) Enunciar las propiedades las propiedades que justifican las siguientes igualdades y calcular los límites indicados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right| \quad \lim_{x \rightarrow 1/3} \sqrt[3]{\frac{x-1/3}{9x^2-1}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{x-1/3}{9x^2-1}}$$

- 8) a) Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene una raíz entre -2 y -1 , otra raíz entre 0 y 1 y la tercera entre 1 y 2
 b) Calcular la raíz comprendida entre 1 y 2 con dos decimales exactos usando bisección. Ayuda: hallar un intervalo de longitud $0,01$ que contenga la raíz
- 9) a) Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $f(a) = 8$ y $f(b) = 32$, justificar que existe al menos un número c entre a y b tal que $f(c) = 20$
 Ayuda: considerar la función $F(x) = f(x) - 20$ y aplicar el teorema de Bolzano)
 b) Si $g(x)$ y $h(x)$ son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y $g(a) = 7$, $g(b) = -4$, $h(a) = 2$ y $h(b) = 1$, justificar que existe al menos un número c entre a y b tal que $g(c) = h(c)$ Ayuda: considerar la función $T(x) = h(x) - g(x)$ y aplicar el teorema de Bolzano)
- 10) Graficar en un mismo sistema coordenado las funciones $g(t) = t^3$ y $h(t) = 1 - t$ y hallar con un decimal exacto el número c para el cual $g(c) = h(c)$

Ejercicios adicionales

1- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en su dominio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}-1} & \text{si } x > 0 \\ -1/\sqrt{3} & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } |x| \leq 2 \\ \frac{4}{x+2} + \frac{16}{x^2-4} & \text{si } |x| > 2 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} (x-2) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2-4}\right) & \text{si } |x| \neq 2 \\ 0 & \text{si } |x| = 2 \end{cases} \quad j(x) = \begin{cases} \frac{x^3-64}{\sqrt[3]{x}-4} & \text{si } x > 4 \\ 5 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ \frac{|4x|-|5-x|}{x-1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

2- Hallar, si existen, los valores de a y b para que cada función sea continua en todo punto.

$$f_1(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{si } x \leq 4 \\ ax-1 & \text{si } x > 4 \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} ax-1 & \text{si } x < 2 \\ ax^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ ax+b & 1 < x < 4 \\ -2x & x \geq 4 \end{cases} \quad f_4(x) = \begin{cases} -1 & x \leq 0 \\ ax+b & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

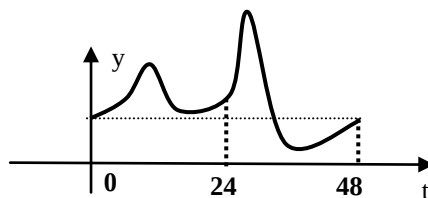
3- Hallar A para que la función $H(t) = \begin{cases} \cos t & \text{si } t \neq \pi/2 \\ \pi-2t & \text{si } t = \pi/2 \end{cases}$ resulte continua en $t = \pi/2$

Ayuda: Llamar $x = \pi - 2t$ y tener en cuenta que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

4-Sea $f(t)$ una función continua en el intervalo $[0,48]$ que verifica $f(0) = f(48) \neq f(24)$

a) Justificar que existe un número c en el intervalo $[0,24]$ tal que $f(c) = f(c + 24)$

Ayuda : aplicar el teorema de Bolzano a la función $g(t) = f(t) - f(t + 24)$ en el intervalo $[0,24]$, verificando previamente sus hipótesis.



c) Un monje sube y baja de una montaña por el mismo camino en 48 horas, (parte a las 0 horas de un día y llega a las 24 horas del día siguiente). Justificar que independientemente de la velocidad a la que vaya y de los descansos que realice hay un punto del camino por el cual pasó ambos días a la misma hora.

5- Dada $F(x) = \frac{x^3 - x - 4}{3x + 2}$, ¿puede asegurar que la ecuación $F(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1,0)$? ¿puede asegurar que la ecuación $F(x) + 1 = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo $(0,1)$? Justificar las respuestas enunciando la propiedad o el teorema que utiliza (si existen las raíces, no se pide calcularlas)

6- Dada $F(x) = \begin{cases} x^3 + 3x - 1 & \text{si } x < 3/2 \\ 7 - x^3 - x & \text{si } x \geq 3/2 \end{cases}$, averiguar si la función $F(x)$ se anula al menos una vez en cada uno de los siguientes intervalos $[0,1]$, $[1,2]$ y $[2,3]$. Justificar las respuestas enunciando el teorema que utiliza (si existen las raíces, no se pide calcularlas)

7- Dada la función $f(x) = \frac{\sin x (x^2 - 1)}{\sqrt{(x-1)x}}$, justificar que el dominio más amplio es $D = \mathbb{R} - [0,1]$ y averiguar si puede definirse en $x = 0$ y en $x = 1$ para que $f(x)$ sea continua en $(-\infty, 0]$ y en $[1, \infty)$.

8- ¿Puede aplicarse el teorema de Bolzano a la función $F(x) = \frac{\sqrt[4]{x^2 + 4x + 1}}{\cos(\pi x/4)} - 2$ en los intervalos $[0,1]$, $[0,4]$? Enunciar el teorema y justificar la respuesta

9- Estudiar la continuidad de

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{5} + \frac{|x-5|\sin[\pi(x+10)]}{x^2 + 5x - 50} & \text{si } x^2 + 5x - 50 \neq 0 \\ -6\pi/5 & \text{si } x^2 + 5x - 50 = 0 \end{cases}$$

¿Existe un número a en el intervalo $[-10,0]$ tal que $F(a) = 0$? ¿existe un b en el intervalo $[0, 5]$ tal que $F(b) = 0$? Justificar las respuestas.

10- Expresar $F(x) = \frac{|x^2 - 4| - |x - 2|}{2x - 4}$ sin barras de valor absoluto y representarla gráficamente. ¿Puede definirse $F(2)$ para que $F(x)$ resulte continua en $x = 2$?

Respuestas de los Ejercicios

1) a) $F(x)$ es continua en $x_0 = 0$ y discontinua en $x_1 = \frac{\pi}{3}$.

b) $G(x)$ es continua en $x = \pi$.

c) $H(x)$ es continua tanto en $x_0 = 1$ como en $x_1 = 3$.

2) a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $g(t)$ es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$

c) $h(u)$ es continua en $\mathbb{R}$.

3) a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$

$g(x)$ es discontinua en $x = 5$

4) a) $f(x)$ es discontinua en $x_0 = 0$ y en $x_1 = 2$
$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

b) $g(x)$ es discontinua en $x_0 = 0$ y en $x_1 = 8$
$$g^*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq 8 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

d) $h(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

e) $i(x)$ es discontinua en $x_0 = 0$ y en $x_1 = 2$
$$i^*(x) = \begin{cases} i(x) & \text{si } x \neq 0 \text{ y } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 6 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

5) a) $a = -\frac{1}{4}$, $b = 5$

b) No tiene solución

c) $a = -2$, $b = 2$

8) b) 1, 53209

Respuestas de los Ejercicios Adicionales

1) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

$g(x)$ es continua en $x \neq 2$

$h(x)$ es continua en $x \neq 0$

$i(x)$ es continua en $x = 2$ y discontinua en $x = -2$

$j(x)$ es continua en $x \neq 4$

2) Para f_1 $a = 5$

Para f_2 $a = -\frac{1}{2}$

Para f_3 $a = -3$ $b = 4$

Para f_4 $a = 2$ $b = -1$

3) $A = \frac{1}{2}$

10)
$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{2x - 4} & \text{si } x \leq -2 \\ -\frac{x^2 + x + 2}{2x - 4} & \text{si } -2 < x < 2 \\ \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

2017

**Práctico
N°4**

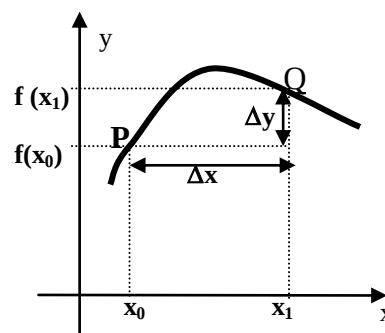
Noción de recta tangente a la gráfica de una función en un punto. Noción de velocidad instantánea. Definición de derivada. Relación entre derivabilidad y continuidad. Reglas de derivación de sumas, productos, cocientes y composición de funciones. Derivación sucesiva.

Guía teórica**Incremento, cociente incremental y recta tangente**

Sea $y = f(x)$ una función definida en un intervalo abierto al cual pertenecen los puntos x_0 y x_1 (x_1 puede ser mayor o menor que x_0), la diferencia $f(x_1) - f(x_0)$ se denomina **incremento de la función en x_0** y se indica :

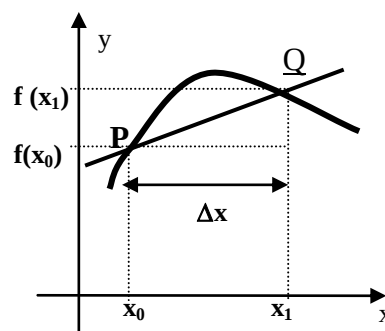
$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) \quad \text{ó} \quad \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

Observación : si escribimos $x_1 = x_0 + \Delta x$ (Δx puede ser positivo o negativo) entonces el incremento puede escribirse $\Delta y = \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$



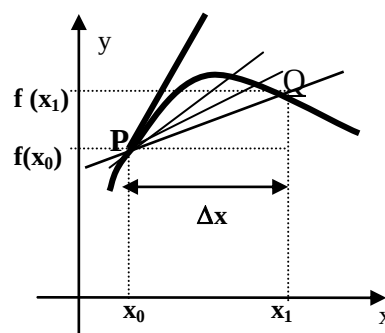
El cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se denomina **cociente incremental o razón de cambio media** y es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(x_0, f(x_0))$ y $Q(x_1, f(x_1))$, a la que se denomina **recta secante**.

Anotamos : $m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

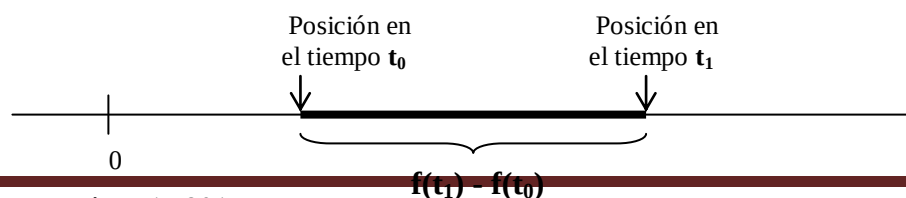


Si existe $\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = m$,

decimos que m es la pendiente de la **recta tangente** a la gráfica de f en el punto P , lo que equivale a decir que **la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P**.

**Velocidad**

Si $s = f(t)$ nos indica la posición, en el tiempo t , de un objeto que se mueve sobre una recta entonces en el intervalo de tiempo $t = t_0$, $t = t_1$ el cambio de la posición es $f(t_1) - f(t_0)$.



La **velocidad media** en el intervalo $[t_0, t_1]$ es: $v_M = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$

La **velocidad instantánea** en el tiempo t_0 es: $v(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$

Observación: Es interesante notar que definimos la pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ como: $m = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$,

también vimos que la velocidad en el tiempo t_0 de un objeto cuya posición en el tiempo t está dada por $s = f(t)$ es: $v(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$. En ambas situaciones

aparecen límites del mismo tipo y como además esta clase de límites se presentan con mucha frecuencia en otras aplicaciones, se les asigna un nombre y una notación especial como lo indica la definición siguiente.

Definición de derivada

Si $y = f(x)$ está definida en un entorno de x_0 y existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, se dice que f es derivable en x_0 , su resultado se anota $f'(x_0)$ y se denomina derivada de la función en x_0

Si $y = f(x)$ es derivable en x_0 , se puede utilizar como **definición** equivalente a la siguiente:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$\downarrow$

considerando $\Delta x = x - x_0$

Otras notaciones de la derivada: $f'(x_0) = Df(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$

Razón de cambio instantánea

Si $f(x)$ es derivable en x_0 , decimos indistintamente que: $f'(x_0)$ es la **derivada** de la función $y = f(x)$ en el punto x_0 o que $f'(x_0)$ es la **razón de cambio instantánea de $f(x)$** en el punto x_0

Teorema que relaciona la derivabilidad con la continuidad

Si $f(x)$ es derivable en x_0 entonces $f(x)$ es continua en x_0

Corolario

Si $f(x)$ no es continua en x_0 entonces $f(x)$ no es derivable en x_0

Observación

El recíproco del teorema que relaciona la derivabilidad con la continuidad no vale, es decir, una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en el mismo.

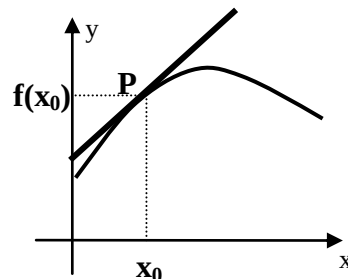
Un ejemplo de esto es la función $f(x) = |x|$, ya que en $x = 0$ es continua pero no es derivable.

Ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función

Ya sabemos que la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es la recta que pasa por P y tiene

$$\text{pendiente } m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

siempre que este límite exista.



Como sabemos que si este límite existe es igual a la derivada $f'(x_0)$, podemos enunciar:

Si $f'(x_0)$ existe, la **recta tangente** a $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es la recta que pasa por P y cuya pendiente es igual a $f'(x_0)$, por lo tanto, la **ecuación de la recta tangente** en el punto $(x_0, f(x_0))$ es: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Derivadas de algunas funciones

1- Si $f(x) = k$ (constante) $\rightarrow f'(x) = 0$

2- Si $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$

3- Si $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

4- Si $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

Reglas de derivación

1- Si $f(x)$ es derivable entonces $k f(x)$ es derivable y se cumple: $(k f(x))' = k f'(x)$

2- Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones con derivadas $f'(x)$ y $g'(x)$, respectivamente entonces:

$f(x) + g(x)$ tiene derivada y se cumple: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

$f(x) \cdot g(x)$ tiene derivada y se cumple: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene derivada si $g(x) \neq 0$ y se cumple: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Derivada de funciones compuestas: Regla de la cadena

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$ entonces $f(g(x))$ es derivable en x y se verifica que $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Observación

Si $u = g(x)$ e $y = f(u)$ entonces $y = f(g(x))$ y la derivada de esta última por la regla de

la cadena puede expresarse: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ evaluada en $u = g(x)$

Ejemplo

Para derivar la función $y = (4x^2 + x)^3$, llamamos $u = (4x^2 + x)$ entonces $y = u^3$, de

donde $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2(8x + 1) = 3(4x^2 + x)^2(8x + 1)$

Derivadas laterales

Si $f(x)$ está definida en un intervalo $[x_0, b)$ y existe $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, se dice que la función tiene **derivada lateral derecha** en x_0 y se indica $f_+'(x_0)$ o $f_D'(x_0)$

Si $f(x)$ está definida en un intervalo $(a, x_0]$ y existe $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, se dice que la función tiene **derivada lateral izquierda** en x_0 y se indica $f_-'(x_0)$ o $f_I'(x_0)$

Observación: Si $f(x)$ es derivable en x_0 entonces existen las derivadas laterales en x_0 y se verifica que $f'(x_0) = f_+'(x_0) = f_-'(x_0)$

Propiedad:

Si $f(x)$ es **continua** en x_0 y existe $f'(x)$ en un entorno reducido de x_0 y se cumple que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = A$ entonces $f(x)$ es derivable en x_0 y se verifica $f'(x_0) = A$

Observación

En la propiedad anterior es requisito prioritario que la función sea **continua** en x_0 , por ejemplo la función $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \geq 1 \\ 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ tiene derivada $f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ y se cumple $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 0$, sin embargo $f'(1)$ no existe pues la función no es continua en $x = 1$ y la propiedad anterior no puede aplicarse.

Derivación sucesiva

Si $f'(x)$ es derivable, podemos calcular su derivada a la que se denomina **derivada segunda** de $f(x)$ y se define e indica del siguiente modo: $f''(x) = (f'(x))'$

La derivada segunda también puede indicarse de las siguientes formas: $f^{(2)}(x)$, $y''(x)$, $y^{(2)}(x)$, y'' , $\frac{d^2 f}{dx^2}$ (esta última se lee: derivada segunda de f respecto de x dos veces)

En forma similar si $f''(x)$ es derivable, se define la **derivada tercera** como $f'''(x) = (f''(x))'$, y puede indicarse de las siguientes maneras: $f^{(3)}(x)$, $y'''(x)$, $y^{(3)}(x)$, $\frac{d^3 f}{dx^3}$ (esta última se lee: derivada tercera de f respecto de x tres veces)

En general: la **derivada de orden n** de $f(x)$ es la derivada de la derivada de orden $(n-1)$ de $f(x)$: $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ejercicios:

- 1) Calcular el incremento de las siguientes funciones, el cociente incremental y la pendiente de la recta tangente en los valores indicados. Representar gráficamente la función y la recta tangente.

$$f(x) = 2x^2, x_0 = 1; \quad g(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4; \quad h(x) = 1/x, x_0 = 1$$

- 2) Usando la definición, calcular la derivada en los puntos indicados:

$$a) f(x) = x^3 \quad \text{en un } x \text{ cualquiera} \quad b) g(x) = 1/x^2 \quad \text{en } x_0 = -2$$

$$c) h(x) = \sin x \quad \text{en un } x \text{ cualquiera} \quad d) u(x) = \sqrt{2x} \quad \text{en } x_0 = 1$$

- 3) Si $s(x) = x f(x)$ y $t(x) = f(x)/x$ siendo $f(x)$ una función derivable, demostrar usando la **definición** de derivada que

$$s'(x) = f(x) + x f'(x); \quad t'(x) = f'(x)/x - f(x)/x^2 \quad \text{para } x \neq 0$$

- 4) a) Demostrar que $g(x) = |x|$ no es derivable en $x = 0$

- b) Demostrar que $h(x) = x|x|$ es derivable para todo x y calcular su derivada.

- 5) Usando reglas de derivación, hallar las derivadas de:

$$a) f(x) = \sqrt{x} - 5x^5 \quad b) u(x) = x^{3/5} \sin x \quad c) q(x) = \cotg x$$

$$d) h(t) = \frac{2t^3 - t}{3t^2 + 1} \quad e) g(y) = (y^2 - y^{-2})(y^2 + y^{-1}) \quad f) p(x) = \frac{x \operatorname{tg} x}{x^2 + 4}$$

6) Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables y $f_1(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$, $f_2(x) = \frac{f(x)g(x)}{2x+1}$ calcular $f_1'(0)$ y $f_2'(0)$ sabiendo que $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$, $g(0) = 1$ y $g'(0) = -4$

7) Calcular la derivada de: a) $f(x) = (-2x)^{25}$ b) $g(x) = 3x - \cos(\pi x)$

c) $h(x) = (3x^2 + 2x)^{-4}$ d) $f(x) = \sin^3(2x - 1)$ e) $f(x) = 7 + \sqrt{\frac{\sin(4x)}{x^2 + 1}}$

8) a) Si F es derivable $\forall x \in \mathbb{R}$, justificar que $\frac{d}{dx}[F(3x)] = [F(3x)]' = 3F'(3x)$

b) Si $\frac{d}{du}[G(u)] = G'(u) = \frac{1}{u}$, justificar que $\frac{d}{dx}[G(x^3)] = \frac{3}{x}$, $\frac{d}{dx}[G(2+x^2)] = \frac{2x}{2+x^2}$

c) Si H es derivable y $g(x) = H(\cos(\pi x))$, hallar $g'(1/2)$ sabiendo que $H'(0) = 2$

9) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 + 1$ en los puntos $P(1,3)$, $Q(0,1)$, $R(-1,3)$. Graficar la curva y las rectas tangentes halladas.

10) Si $f(x) = ax^2 + bx + 2$, hallar a y b de manera que su gráfica pase por el punto de coordenadas $(1,3)$ y la recta tangente en dicho punto tenga pendiente 4.

11) Dadas las funciones $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \geq 2 \\ 2+3x & \text{si } x < 2 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}$

Estudiar la continuidad y hallar, donde exista, la función derivada

12) Determinar el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ teniendo presente que en él la recta tangente es horizontal. Corroborar completando cuadrados o algún otro método.

13) a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = (\tan(x))^{1/4}$ en el punto de abscisa $x = \pi/4$.

b) Hallar las coordenadas de los puntos de la gráfica de $g(x) = (3x-2)(x+1)^{-1}$ donde la recta tangente es paralela a $y = 5x - 21$

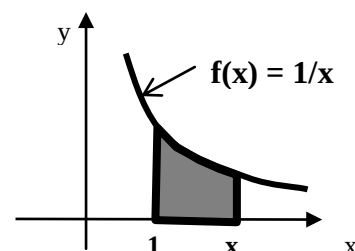
c) Hallar las coordenadas de los puntos pertenecientes a la gráfica de $h(x) = \sqrt{2x}$ donde la recta tangente es perpendicular a $y = -4x + 13$.

d) Hallar las coordenadas de los puntos donde la recta tangente a la gráfica de $t(x) = x^5 + 5x^3 - 20x + 1$ es horizontal y hallar la ecuación de dichas rectas.

e) Hallar la ecuación de la recta normal (perpendicular a la recta tangente) a la gráfica de $u(x) = 2x^2 - 8x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$.

14) Si $A(x)$ = el área bajo la curva $f(x) = 1/x$ comprendida entre 1 y x , con $x > 1$ (área sombreada de la figura)

a) Justificar que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{A(x) - A(1)}{x - 1} = 1$ (Ayuda: usar el teorema del sándwich y observar que $A(1) = 0$)



- b) Justificar que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$ (Ayuda: tener en cuenta que el numerador es el área bajo la curva $f(x) = 1/x$ comprendida entre x y $x + \Delta x$ y usar el teorema del sándwich comparando dicha área con la de dos rectángulos)
- c) Justificar que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{A(x + \Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \frac{1}{x}$ (Ayuda: ídem a b), tener en cuenta que $x + \Delta x$ es menor que x)
- d) Por b) y c) podemos concluir que la función $A(x)$ resulta ser derivable para todo $x > 1$ y $A'(x) = 1/x$. La función $A(x)$ definida para $x > 1$, se denomina **logaritmo natural de x** y se indica $\ln x$, por lo tanto $(\ln x)' = 1/x$ si $x > 1$
- En un trabajo práctico posterior veremos que la función logaritmo natural se puede definir para todos los $x > 0$, por ahora supondremos que su dominio es $(1, \infty)$

15) Dadas las funciones $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = (1 + ax)^{-1}$, $h(x) = 2x^8 - 3x^3$, $i(x) = x^n$ calcular : $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$, $f^{(4)}(x)$, $g^{(3)}(x)$, $h^{(9)}(x)$, $i'(x)$, $i''(x)$, $i^{(3)}(x)$, $i^{(n)}(x)$

Ejercicios adicionales

- Determinar los valores de $x \in [0, 2\pi]$ en los que la recta tangente a las funciones que se indican a continuación son horizontales y hallar su ecuación:
 $f(x) = \sin x + \cos x$ $g(x) = \sqrt{3} x + 2 \cos x$
- a) Si $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son derivables , verificar que :
 $[f(x) g(x) h(x)]' = f'(x) g(x) h(x) + f(x) g'(x) h(x) + f(x) g(x) h'(x)$
b) Calcular, usando la parte a) , la derivada de : $y = 3x^4 \sin(2x) \sqrt{x^2 - 1}$
c) Justificar, usando la parte a), que : $\{[f(x)]^3\}' = 3 [f(x)]^2 f'(x)$
- a) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = 2 - x^2$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ y determinar el valor x_0 sabiendo que la recta tangente pasa por el punto $(1, 5)$.
b) Graficar la función y la recta tangente hallada en a)
- a) Demostrar que $y = |x|$, $y = \sin |x|$ no son derivables en $x = 0$, pero su producto $y = |x| \sin |x|$ si lo es. ¿Contradice esto a la regla de “derivada de un producto”?
b) Si $g(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Demostrar que g es derivable y continua $\forall x$.
- Una partícula se mueve sobre una recta y luego de t segundos está en la posición $x(t) = 2t^2 - 3t$. Hallar su posición y su velocidad en $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ ¿En qué instante/s la velocidad es cero?
- Calcular usando la **definición** la derivada de las funciones
a) $f_1(x) = \sqrt{g(x)}$, siendo $g(x)$ derivable y $g(x) > 0$ para todo x
b) $f_2(x) = (f(x))^2$, siendo $f(x)$ derivable para todo x

Respuestas de los Ejercicios

1)

Función	x_0	Incremento de la función	Cociente incremental	Pendiente de la recta tangente en x_0
$f(x)$	1	$2 \Delta x(2 + \Delta x)$	$2(2 + \Delta x)$	4
$g(x)$	4	$\sqrt{4 + \Delta x} - 2$	$\frac{\sqrt{4 + \Delta x} - 2}{\Delta x}$	$\frac{1}{4}$
$h(x)$	1	$-\frac{\Delta x}{1 + \Delta x}$	$-\frac{1}{1 + \Delta x}$	-1

2) a) $f'(x) = 3x^2$ b) $g'(-2) = \frac{1}{4}$

c) $h'(x) = \cos x$ d) $u'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

5) a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 25x^4$ b) $u'(x) = \frac{3 \operatorname{sen} x}{5 \sqrt[5]{x^2}} + \sqrt[5]{x^3} \cos x$

c) $q'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$ d) $h'(t) = \frac{6t^4 + 9t^2 - 1}{(3t^2 + 1)^2}$

e) $g'(y) = 4y^3 + 1 + \frac{3}{y^4}$ f) $p'(x) = \left(\operatorname{tg} x (4 - x^2) + \frac{x(x^2 + 4)}{\cos^2 x} \right) \frac{1}{(x^2 + 4)^2}$

6) $f_1'(0) = -\frac{3}{4}$ $f_2'(0) = -9$

7) a) $f'(x) = -50(2x)^{24}$ b) $g'(x) = 3 + \pi \operatorname{sen}(\pi x)$

c) $h'(x) = \frac{-8(3x+1)}{(3x^2+2x)^5}$ d) $f'(x) = 6 \operatorname{sen}^2(2x-1) \cos(2x-1)$

e) $f'(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{\operatorname{sen}(4x)}} \frac{2 \cos(4x)(x^2+1) - x \operatorname{sen}(4x)}{(x^2+1)^2}$

9) La recta tangente a la función en P es $y = 4x - 1$
 La recta tangente a la función en Q es $y = 1$
 La recta tangente a la función en R es $y = -4x - 1$

10) $a = 3$ $b = -2$

11) Si $x \neq 2$ entonces $f(x)$ es continua. $f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Si $x \neq 0$ entonces $g(x)$ es continua. $g'(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } x < 0 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } 0 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$

13) a) $y = \frac{x}{2} - \frac{\pi}{8} + 1$ b) $(0, -2)$ y $(-2, 8)$ c) $(8, 4)$ d)

$y = -13$

$y = 15$

e) $y = \frac{1}{4}x - \frac{17}{4}$

15) $f'(x) = \pi \cos(\pi x)$ $f''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x)$ $f^{(3)}(x) = -\pi^3 \cos(\pi x)$

$f^{(4)}(x) = \pi^4 \sin(\pi x)$ $g^{(3)}(x) = -\frac{6a^3}{(1+ax)^4}$ $h^{(9)}(x) = 0$

$i'(x) = n x^{n-1}$ $i''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ $i^{(3)}(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$ $i^{(n)}(x) = n!$

Respuestas de los Ejercicios adicionales

1) Para $f(x)$: $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$,

para $g(x)$: $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 1\right)$ y $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\sqrt{3}\pi}{3} - 1\right)$

2) b) $y' = 12x^3 \sin(2x) \sqrt{x^2 - 1} + 6x^4 \cos(2x) \sqrt{x^2 - 1} + \frac{3x^5 \sin(2x)}{\sqrt{x^2 - 1}}$

3) a) $y = 2x + 3$ recta tangente a la función en el punto $(-1, 1)$

b) $y = -6x + 11$ recta tangente a la función en el punto $(3, -7)$

4) Si $t = \frac{3}{4}$ la velocidad es cero.

t	Posición	Velocidad
0	0	-3
1	-1	1
2	2	5
3	9	9

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología	
<u>ANÁLISIS MATEMÁTICO I</u>	
2017	
Práctico Nº5	Derivación implícita. Teorema de Rolle. Teorema del valor medio para derivadas (Cauchy y Lagrange). Crecimiento y decrecimiento de funciones. Máximos y mínimos absolutos y relativos. Concavidad y puntos de inflexión.

Guía teórica**Derivación implícita**

Hasta ahora se han derivado funciones donde la variable y está expresada **explícitamente** en función de x , es decir expresiones del tipo $y = f(x)$.

Cuando y no está expresada explícitamente en función de x , como por ejemplo en la ecuación $x^3 + y^5 - 27y - 5 = 0$, podemos suponer que es posible despejar y como función de x , es decir suponer que existe $y = f(x)$ tal que $x^3 + f(x)^5 - 27 f(x) - 5 = 0$, en este caso se dice que la ecuación $x^3 + y^5 - 27y - 5 = 0$ define **implícitamente** a $y = f(x)$

Para encontrar la derivada de $y = f(x)$ (que no podemos explicitar porque no se puede despejar) usamos un método, denominado **derivación implícita**, que consiste en:

1- derivar respecto de x la expresión $x^3 + f(x)^5 - 27 f(x) - 5 = 0$

obteniendo : $3x^2 + 5f(x)^4 f'(x) - 27 f'(x) = 0$

2- despejar $f'(x)$: $f'(x) = \frac{-3x^2}{5f(x)^4 - 27}$ (*) o equivalentemente $y' = \frac{-3x^2}{5y^4 - 27}$

Si se quiere conocer la pendiente de la recta tangente en el punto de coordenadas $(3, 2)$ perteneciente a la gráfica de la ecuación $x^3 + y^5 - 27y - 5 = 0$, se reemplaza $x = 3$ y

$f(3) = 2$ en (*) obteniendo $f'(3) = \frac{-3 \cdot 3^2}{5 \cdot 2^4 - 27} = \frac{-27}{53}$

Luego $-27/53$ es el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto $(3, 2)$.

Es interesante observar que en la propuesta anterior se siguieron los siguientes pasos: 1) derivar implícitamente, 2) despejar la derivada, 3) reemplazar x y $f(x)$ por las coordenadas del punto

Muchas veces es conveniente invertir los últimos dos pasos, procediendo así:

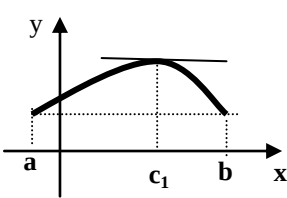
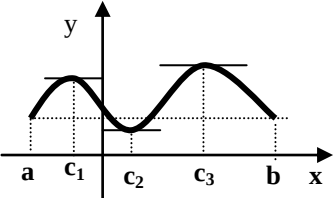
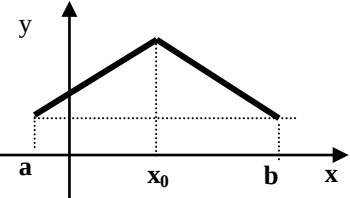
1) derivar implícitamente: $3x^2 + 5f(x)^4 f'(x) - 27 f'(x) = 0$

2) reemplazar $x = 3$ y $f(3) = 2$: $3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 2^4 f'(3) - 27 f'(3) = 0$
 $27 + 80 f'(3) - 27 f'(3) = 0$

3) despejar $f'(3)$: $f'(3) = -27/53$

Teorema de Rolle (1652-1719)

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, derivable en el intervalo abierto (a,b) y $f(a) = f(b)$ entonces **existe** al menos un número c en (a,b) tal que $f'(c) = 0$

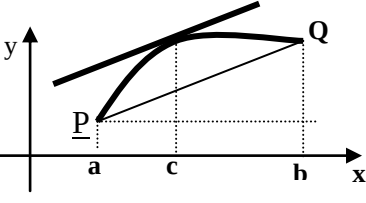
Las funciones que se observan en estas dos gráficas verifican las hipótesis del T. de Rolle : $f(a) = f(b)$, f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) por lo tanto existe al menos un número c entre a y b tal $f'(c) = 0$		El gráfico muestra que $f(a) = f(b)$ y f es continua en $[a,b]$ pero f no es derivable en x_0 , por lo tanto no puede aplicarse el T. de Rolle
		
En el punto de abscisa c_1 la recta tangente es horizontal, por lo tanto $f'(c_1) = 0$	En los puntos de abscisa c_1, c_2 y c_3 , la recta tangente es horizontal, por lo tanto $f'(c_1) = 0, f'(c_2) = 0, f'(c_3) = 0$	No existen puntos donde la recta tangente es horizontal, de donde $f'(x) \neq 0$

Teorema del valor medio de Cauchy (1789- 1867)

Si f y g son continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivables en el abierto (a,b) entonces existe un número c en (a,b) tal que: $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ si $g(b) \neq g(a)$

Teorema del valor medio para derivadas o T. de Lagrange (1736- 1813)

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) entonces existe un número c en (a,b) tal que: $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

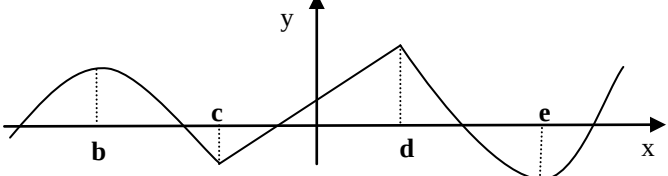
Como $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente de la recta que pasa por $P(a,f(a))$ y $Q(b,f(b))$, el teorema afirma que “existe al menos un número c en (a,b) tal que la pendiente de la recta tangente trazada en el punto $(c,f(c))$ es igual a la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q ”	
--	--

Funciones crecientes o decrecientes

Una función f es **creciente** en un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 de I con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \leq f(x_2)$; si para $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) < f(x_2)$, decimos que f es **estrictamente creciente** en I

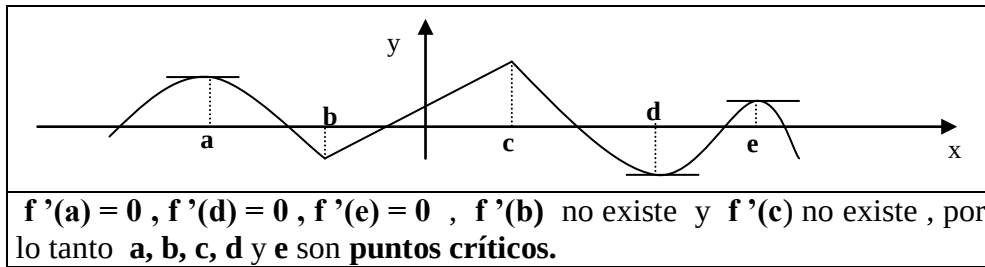
Una función f es **decreciente** en un intervalo I si para todo par de puntos x_1 y x_2 de I con $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) \geq f(x_2)$; si para $x_1 < x_2$ se verifica $f(x_1) > f(x_2)$, decimos que f es **estrictamente decreciente** en I

Si f es creciente en I (o decreciente en I) se dice que f es **monótona** en I

f crece en $(-\infty, b]$, $[c, d]$ y $[e, \infty)$ f decrece en $[b, c]$ y $[d, e]$ f es monótona en cada intervalo mencionado, pero f no es monótona en $(-\infty, \infty)$	
---	--

Punto crítico

Un punto crítico de una función f es un número x_4 del dominio de f , tal que $f'(x_4) = 0$ o bien $f'(x_4)$ no existe.



Relación entre el signo de $f'(x)$ y el crecimiento o decrecimiento de $f(x)$

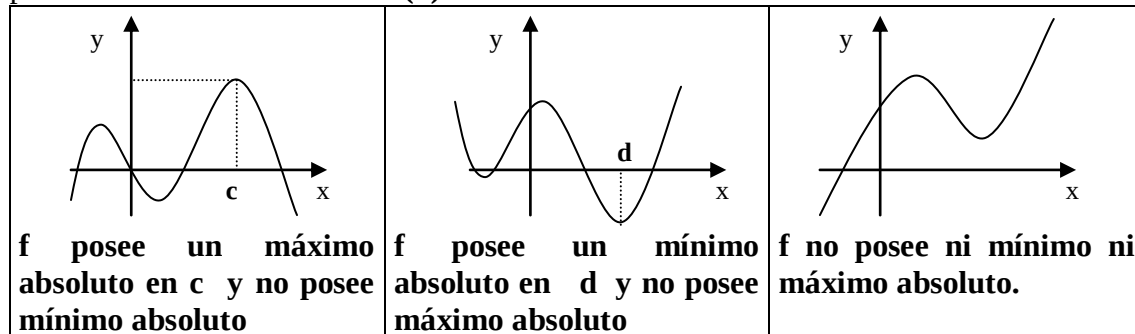
Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el abierto (a,b) ,

- Si $f'(x) > 0$ para todo x de (a,b) entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$
- Si $f'(x) < 0$ para todo x de (a,b) entonces f es estrictamente decreciente en $[a,b]$
- Si $f'(x) = 0$ para todo x de (a,b) entonces f es constante en $[a,b]$

Máximos y mínimos absolutos

Una función f posee un **máximo absoluto** en c si $f(c) \geq f(x)$, para todo x perteneciente a D , siendo D su dominio. El número $f(c)$ se denomina **valor máximo** de f en D .

Análogamente, una función f posee un **mínimo absoluto** en d si $f(d) \leq f(x)$, para todo x perteneciente a D . El número $f(d)$ se denomina **valor mínimo** de f en D .



Teorema de Weierstrass

Si $f(x)$ es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ entonces f posee máximo absoluto y mínimo absoluto en $[a,b]$

Búsqueda de máximos y mínimos absolutos

Para obtener los máximos y mínimos absolutos de una función continua f en el intervalo cerrado $[a,b]$ proceder del este modo:

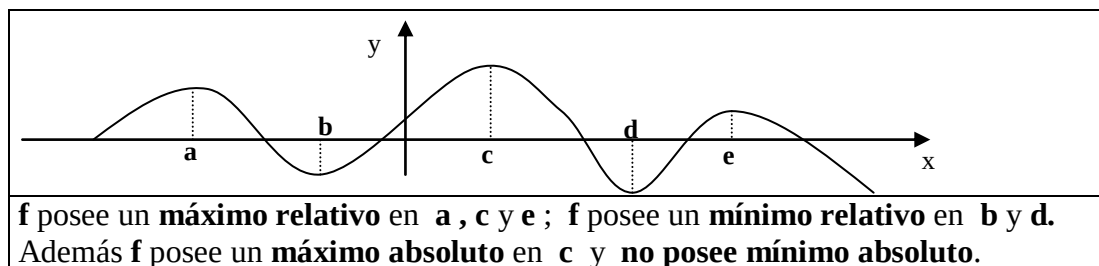
- Hallar, si existen, los puntos críticos de f en el intervalo abierto (a,b) y evaluar la función en ellos
- Evaluar la función en los extremos del intervalo, es decir calcular $f(a)$ y $f(b)$
- El mayor de los valores obtenidos en los pasos 1- y 2- es el máximo absoluto y el más pequeño es el mínimo absoluto.

Máximos y mínimos relativos

Una función f posee un **máximo relativo** (o local) en x_1 si existe un intervalo abierto I_1 que contiene a x_1 tal que $f(x_1) \geq f(x)$, para todo x perteneciente a I_1 .

Análogamente, una función f posee un **mínimo relativo** en x_2 si existe un intervalo abierto I_2 que contiene a x_2 tal que $f(x_2) \leq f(x)$, para todo x perteneciente a I_2 .

Los máximos y mínimos relativos se denominan **extremos relativos**.

**Teorema de Fermat** (1601-1665)

Si f posee un **extremo relativo** en x_3 y si **existe** $f'(x_3)$ entonces $f'(x_3) = 0$

Condición necesaria de existencia de extremo relativo

Si f posee un extremo relativo en x_5 entonces x_5 es un punto crítico.

Criterio de la primera derivada para clasificar puntos críticos

Si $f(x)$ es continua en (a,b) y posee punto crítico en c perteneciente al intervalo (a,b)

- Si $f'(x) > 0$ en (a,c) y $f'(x) < 0$ en (c,b) entonces f posee un **máximo relativo** en c .
- Si $f'(x) < 0$ en (a,c) y $f'(x) > 0$ en (c,b) entonces f posee un **mínimo relativo** en c .
- Si $f'(x)$ **no cambia de signo** en c entonces f **no tiene extremo relativo** en c

Concavidad

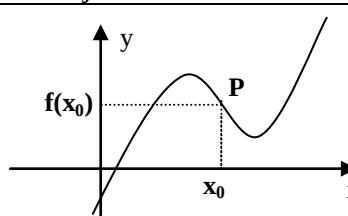
Si f es derivable en el intervalo abierto I y su gráfica se encuentra arriba de todas sus tangentes en I , decimos que f es **cóncava hacia arriba** en I .

Si f es derivable en el intervalo abierto I y su gráfica se encuentra debajo de todas sus tangentes en I , decimos que f es **cóncava hacia abajo** en I .

Punto de inflexión

Un punto P de la gráfica de una función continua se llama **punto de inflexión** si la gráfica cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa en P .

f es **cóncava hacia abajo** en $(-\infty, x_0)$, f es **cóncava hacia arriba** en (x_0, ∞) , por lo tanto $(x_0, f(x_0))$ son las coordenadas de un **punto de inflexión**

**Criterio de concavidad**

Sea f una función que admite derivada segunda en los puntos de un intervalo abierto I ,

- Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I .
- Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I .

Observaciones:

- Por el criterio de concavidad, si la función es continua en x_0 y la derivada segunda cambia de signo al pasar por x_0 , hay punto de inflexión en $(x_0, f(x_0))$
- Si se verifica que $f''(x_0) = 0$, esto no alcanza para afirmar que en $(x_0, f(x_0))$ hay punto de inflexión (por ejemplo $f(x) = x^4$ cumple $f''(0) = 0$ y sin embargo en $x = 0$ no hay cambio de concavidad, por lo tanto el punto $(0,0)$ no es de inflexión)

Ejercicios

- 1) a) Hallar, usando derivación implícita, la pendiente de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(-3, 4)$, verificar el resultado derivando la expresión explícita
 b) Hallar $y' = dy/dx$ usando derivación implícita sabiendo que $x + \sqrt{xy} + y = 1$.
 c) Comprobar que el punto $P(2, -3)$ pertenece a la gráfica de la curva $2x^3 - x^2y + y^3 - 1 = 0$ y hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P .
- 2) Si $V(t)$ representa el volumen de un globo esférico en el tiempo t y se bombea aire a razón de 600 cm^3 por minuto, es decir $V'(t) = 600$, hallar la razón de cambio del radio en función del tiempo y calcular dicha razón cuando el radio es 30 cm . *Indicación: si $R(t)$ es el radio del globo en el tiempo t , calcular $R'(t)$, y recordar que el volumen de una esfera de radio R es $V = 4/3 \pi R^3$ (usar derivación implícita)*
- 3) Averiguar si puede aplicarse el teorema de Rolle en el intervalo dado y, si es así, hallar todos los c que cumplen la conclusión del teorema.
 a) $f(x) = (x^2 - 1)^2$ en $[-1/2, 1/2]$ b) $f(x) = -\frac{5x+6}{x^2}$ en $[-3, -2]$ y en $[-1, 1]$
- 4) Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el cerrado $[a, b]$ y derivables en el abierto (a, b) , demostrar el teorema de Cauchy (Justificar que puede aplicarse el teorema de Rolle en el intervalo $[a, b]$ a la función $G(x) = [g(b) - g(a)] f(x) - [f(b) - f(a)] g(x)$ y aplicarlo)
- 5) a) Justificar que si b está entre 0 y $\pi/2$, entonces existe un número c entre 0 y b tal que $\frac{\sin^2 b}{1 - \cos b} = 2 \cos c$
 (Ayuda: aplicar el teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = \sin^2 x$ y $g(x) = 1 - \cos x$ en el intervalo $[0, b]$).
 b) Usando la parte a) deducir que $\lim_{b \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 b}{1 - \cos b} = 2$
- 6) Si $f(x)$ es continua en el cerrado $[a, b]$ y derivable en el abierto (a, b) , demostrar el teorema de Lagrange (Ayuda: Aplicar el teorema de Cauchy a las funciones $g(x) = x$ y a la función $f(x)$ dada en el enunciado).
- 7) Averiguar si puede aplicarse el teorema de Lagrange en el intervalo dado y, si es así, hallar todos los c que cumplen la conclusión del teorema.
 a) $f(x) = 4 + \sqrt{x-1}$ en $[1, 5]$
 b) $f(x) = \cos 2x$ en $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
 c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ en $[3, 5]$ y en $[-2, 3]$
- 8) Hallar el dominio y determinar los intervalos en que f es creciente o decreciente y
 a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ b) $f(x) = x^{1/2} + x^{-1/2}$

c) $f(x) = x^5 + 5x^3 - 20x$

d) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{25-(x+7)^2} & \text{si } -12 \leq x \leq -3 \\ 12-x^2 & \text{si } x > -3 \end{cases}$

9) Graficar una función continua $f(x)$ continua tal que: $f(-2) = -1$, $f(1) = 1$, $f'(-2) = f'(1) = 0$, $f'(x) < 0$ si $x < -2$ o $-2 < x < 1$, $f'(x) > 0$ si $-2 < x < 1$

10) Demostrar que:

a) $f(x) = x + 1/x$ es creciente en $[1, \infty)$ y deducir que $a + \frac{1}{a} < b + \frac{1}{b}$ para $1 < a < b$

b) $g(x) = \sin x - x$ es decreciente en $[0, \infty)$ y deducir que $x \geq \sin x$ para todo $x \geq 0$

11) Graficar funciones f que verifiquen las condiciones indicadas en cada caso:

a) f tiene un máximo absoluto en $x = 3$ y $f(3) = 2$ y **no** tiene mínimo absoluto

b) f tiene un máximo absoluto en $x = -1$ y $f(-1) = 4$, tiene mínimo absoluto en $x = 5$ y $f(5) = -2$

c) f tiene un mínimo absoluto en $x = -2$ y $f(-2) = 0$, **no** tiene máximo absoluto y tiene un máximo relativo en $x = 0$ y $f(0) = 5$ y un mínimo relativo en $x = 4$ y $f(4) = 2$

12) Graficar funciones **continuas** f en el intervalo $[-2, 5]$ sabiendo que:

a) f tiene un máximo absoluto en $x = -2$, mínimo absoluto en $x = 5$ y no posee derivada en $x = 2$

b) f tiene máximo absoluto en $x = -1$ y en $x = 2$ y mínimo absoluto en $x = -2$

13) Dadas $f(x) = x + \cos x$, $g(x) = x + 2 \sin x$, $h(x) = 2 \sin x + \cos 2x$, hallar los máximos y mínimos absolutos de cada función en el intervalo $[0, 2\pi]$

14) Hacer un estudio completo (dominio de la función y de las derivadas, paridad e imparidad, intersección con los ejes coordenados cuando sea posible, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad, puntos de inflexión y asíntotas) y un gráfico aproximado de las siguientes funciones. Indicar también la imagen

a) $f(u) = u + \frac{1}{u}$

b) $f(x) = \frac{x}{1+3x^2}$

c) $f(x) = \frac{4-x}{(x+2)^2}$

d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

e) $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2-4}}$

f) $f(x) = x + \sin x$

g) $f(x) = 2 - x + |x^2 - 4|$

h) $f(x) = x^{1/3} + 2x$

i) $f(v) = v^{2/3} - 2v^{1/3}$

15) Determinar valores de a , b y c tales que la gráfica de $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión $(1, 1)$.

Ejercicios adicionales

1- a) Sea $f(x) = \tan x$. Verificar que aunque $f(0) = f(\pi)$, no existe ningún c entre 0 y π tal que $f(c) = 0$. Explicar por qué no contradice al teorema de Rolle.

b) ¿Puede aplicarse el teorema de Lagrange a la función $f(x) = |2x + 3|$ en $[-2, 0]$?

2- Un automovilista entra a una autopista y recibe un talón con la hora **13:15** hs. Sale de ella **135** km más adelante a las **14:42** hs. y recibe una boleta de infracción por exceso de

velocidad. Explicar esto por el teorema del valor intermedio para derivadas suponiendo que la velocidad máxima era de **90** km/h.

3- a) ¿Puede aplicarse el teorema de Rolle a la función $f(t) = t \sqrt{25 - t^2}$ en los intervalos $[-3,3]$ y $[3,4]$? Si la respuesta es afirmativa, aplicarlo.

b) ¿Puede aplicarse el teorema del valor medio de Lagrange a la función $h(x) = \frac{x^2}{2x+1}$ en los intervalos $[-1,4]$ y $[0,5]$? Si la respuesta es afirmativa, aplicarlo

4- Dada la ecuación $\sin(xy) = 1 - x \cos y$

a) Comprobar que el punto $P(1,0)$ pertenece a su gráfica.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto P

c) Hallar aproximadamente la ordenada de un punto de la gráfica cuya abscisa es **0,9**

Respuestas de los Ejercicios

1) a) $+\frac{3}{4}$ b) $y' = -\frac{2\sqrt{xy} + y}{x + 2\sqrt{xy}}$ c) $y + 3 = -\frac{36}{23}(x - 2)$

2) $\frac{1}{6\pi}$ 3) a) $c = 0$ b) $c = -\frac{12}{5}$

7) a) $c = 2$ b) $c = 0,106916212$ (aprox) c) $c = 4$, $c = 7/5$

8) a) $Df = \mathbb{R}$ $f(x)$ crece en $(-1, 0)$ y en $(1, +\infty)$
 $f(x)$ decrece en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$

b) $Df = \mathbb{R}^+$ $f(x)$ crece en $(1, +\infty)$.
 $f(x)$ decrece en $(0, 1)$

c) $Df = \mathbb{R}$ $f(x)$ crece en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.
 $f(x)$ decrece en $(-1, 1)$

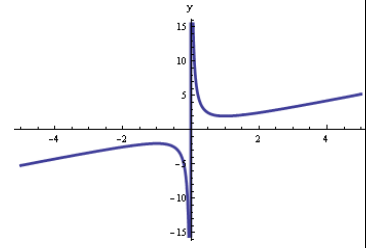
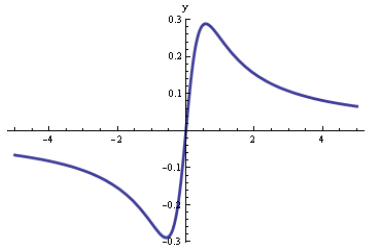
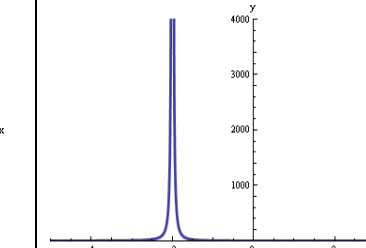
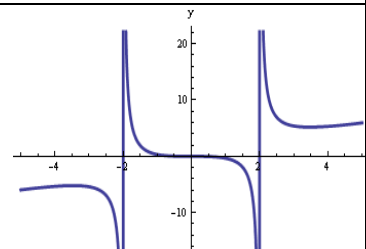
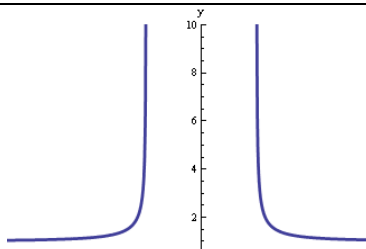
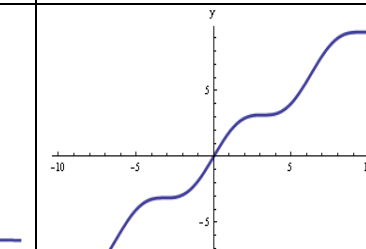
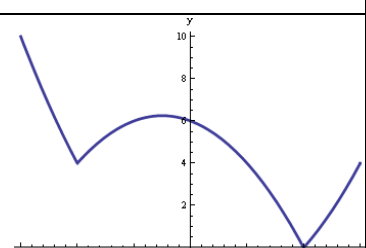
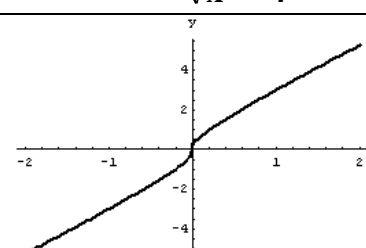
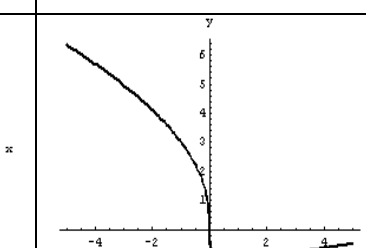
d) $Df = [-12, +\infty)$ $f(x)$ crece en $(-12, -7)$ y en $(-3, 0)$.
 $f(x)$ decrece en $(-7, -3)$ y en $(0, +\infty)$

13) Para $f(x)$: $(0, 1)$ es el mínimo absoluto y $(2\pi, 2\pi + 1)$ es el máximo absoluto.

Para $g(x)$: $(0, 0)$ es el mínimo absoluto y $(2\pi, 2\pi)$ es el máximo absoluto.

Para $h(x)$: $\left(\frac{3\pi}{2}, -3\right)$ es el mínimo absoluto y $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$ son los máximos absolutos.

14)

		
$f(u) = u + \frac{1}{u}$	$f(x) = \frac{x}{1+3x^2}$	$f(x) = \frac{4-x}{(x+2)^2}$
		
$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$	$f(x) = \frac{ x }{\sqrt{x^2-4}}$	$f(x) = x + \text{sen } x$
		
$f(x) = 2 - x + x^2 - 4 $	$f(x) = x^{1/3} + 2x$	$f(v) = v^{2/3} - 2v^{1/3}$

15) $a = 1$ $b = -3$ $c = 3$

Respuestas de los Ejercicios adicionales

4) b) $y = -x + 1$

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

2017

Práctico
Nº6

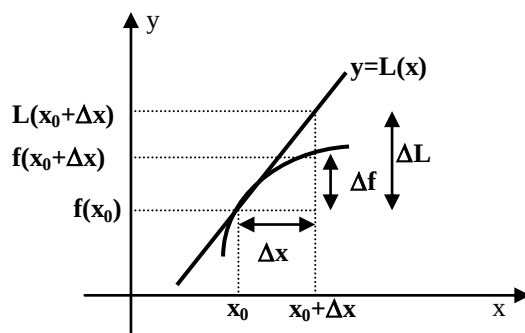
Diferencial. Antiderivadas o primitivas inmediatas. Método de sustitución para búsqueda de primitivas.

Guía teóricaDiferencial

Si $f(x)$ es una función derivable en x_0 , sabemos que existe la recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ y su ecuación es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

El segundo miembro es una función lineal de variable x , a la que denominaremos $L(x)$, es decir: $L(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$



Si calculamos $L(x_0 + \Delta x) = f'(x_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$

y calculamos $L(x_0) = f'(x_0)(x_0 - x_0) + f(x_0) = f(x_0)$

y restamos miembro a miembro obtenemos el incremento de la recta tangente :

$$\Delta L = L(x_0 + \Delta x) - L(x_0) = [f'(x_0)\Delta x + f(x_0)] - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$$

La última expresión obtenida recibe el nombre de **diferencial** de la función en el punto x_0 . Anotamos de la siguiente manera:

$$dy = f'(x_0)\Delta x \quad \text{o} \quad df = f'(x_0)\Delta x$$

y podemos afirmar que **la diferencial** de una función $y = f(x)$ en un punto x_0 **coincide con el incremento de la recta tangente**, es decir $dy = \Delta L = f'(x_0)\Delta x$

Observación:

- Se **define** el incremento de la variable independiente x como su diferencial ; por lo tanto $dx = \Delta x$ y por ello la diferencial de una función se escribe indistintamente:
 $dy = f'(x_0)\Delta x$, $dy = f'(x_0)dx$, $df = f'(x_0)\Delta x$, $df = f'(x_0)dx$
- Si $dx \neq 0$, podemos dividir por dx y obtener la derivada como cociente de diferenciales : $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Propiedad : Si $f(x)$ es derivable en x_0 entonces el incremento de la función y su diferencial en x_0 verifican que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$

Aproximación lineal

De la propiedad anterior se desprende que : si $f(x)$ es derivable en x_0 y Δx es cercano a **cero** entonces:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong df$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0) \Delta x$$

o equivalentemente

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad (1)$$

Si en la expresión anterior reemplazamos $\Delta x = x - x_0$ obtenemos :

$$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0) \quad (2)$$

*La expresión (1) permite calcular en forma aproximada el valor que toma una función f en un punto $x_0 + \Delta x$ conociendo el valor de f y de su derivada en un punto cercano x_0

*La fórmula (2) nos da una aproximación de la curva $y = f(x)$, cuando x está próximo a x_0 , por medio de la recta tangente, por ello se denomina **aproximación lineal de la función**.

Teorema: Funciones que tienen igual derivada

Si dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo abierto entonces difieren en una constante. Más formalmente podemos enunciar este teorema diciendo:

Si $F'(x) = G'(x)$ para los x del intervalo abierto (a,b) entonces $F(x) - G(x) = C$, donde C es una constante arbitraria.

Primitivas

Se dice que $F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x perteneciente a I .

Observación: Conociendo la definición de primitiva, el último teorema puede enunciarse: "Si F y G son **primitivas** de f entonces $F(x) - G(x) = C$, donde C es una constante arbitraria" o "Si F y G son **primitivas** de f entonces difieren en una constante"

Primitivas inmediatas (En todos los casos C es una constante arbitraria)

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------|---|
| a) si $f(x) = k$ (constante) | entonces su primitiva es: | $F(x) = kx + C$ |
| b) si $f(x) = \text{sen } x$ | entonces su primitiva es: | $F(x) = -\cos x + C$ |
| c) si $f(x) = \cos x$ | entonces su primitiva es: | $F(x) = \text{sen } x + C$ |
| d) si $f(x) = \sec^2 x$ | entonces su primitiva es: | $F(x) = \text{tg } x + C$ |
| e) si $f(x) = x^n$ con $n \neq -1$ | entonces su primitiva es: | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ |

Propiedad de linealidad de las primitivas

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$ entonces:

- $F(x) + G(x)$ es una primitiva de $f(x) + g(x)$
- Si k es una constante entonces $kF(x)$ es una primitiva de $kf(x)$

Integral indefinida

Veremos en el práctico siguiente que el concepto de primitiva es importantísimo para calcular integrales. Debido a ello se usa la notación $\int f(x) dx$ para indicar una primitiva de f y se llama **integral indefinida**. De modo que $\int f(x) dx = F(x)$ significa $F'(x) = f(x)$

Con esta nomenclatura, las primitivas ya conocidas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \int k dx &= kx + C & \int \text{sen } x dx &= -\cos x + C & \int \cos x dx &= \text{sen } x + C \\ \int \sec^2 x dx &= \text{tg } x + C & \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1 \end{aligned}$$

No siempre es fácil obtener primitivas, muchas veces hay que utilizar métodos para lograrlo. A continuación se describe uno de ellos.

Método de sustitución

Recordemos que : Si F y g son derivables y $h(x) = F(g(x))$ entonces $h(x)$ es derivable y se cumple

$$h'(x) = F'(g(x)) g'(x)$$

y como una primitiva de $h'(x)$ es $h(x) + C$, podemos afirmar que una primitiva de $F'(g(x)) g'(x)$ es $F(g(x)) + C$ ó con la notación equivalente podemos afirmar que :

$$\int F(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Esta observación es la base del método que explicamos a continuación y que se denomina método de sustitución.

Supongamos que queremos encontrar una primitiva de una función de la forma $f(g(x)) g'(x)$, es decir encontrar el valor de $\int f(g(x)) g'(x) dx$, para ello hacemos la “sustitución” $t = g(x)$, y teniendo en cuenta que $dt = g'(x) dx$ podemos escribir:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int \underbrace{f(g(x))}_{f(t)} \underbrace{g'(x) dx}_{dt} = \int f(t) dt$$

y si F es una primitiva de f entonces la última integral puede escribirse

$$\int f(t) dt = \int F'(t) dt = F(t) + C = F(g(x)) + C$$

Por lo tanto $\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$, siendo F una primitiva de f

Es fundamental observar que si se hace la sustitución $t = g(x)$, es requisito para aplicar este método que en el integrando aparezca $g'(x)$

Observación:

Sabemos que $\int f(x) dx = F(x)$ significa $F'(x) = f(x)$, si multiplicamos ambos miembros de la última igualdad por dx obtenemos $F'(x) dx = f(x) dx$ o su equivalente $d(F(x)) = f(x) dx$ entonces podemos escribir $\int f(x) dx = \int d(F(x)) = F(x)$, así por ejemplo podemos escribir $\int \cos x dx = \int d(\sin x) = \sin x$, $\int \sin x dx = \int d(-\cos x) = -\cos x$, $\int 5x^4 dx = \int d(x^5) = x^5$ y en todos los casos podemos sumar una constante arbitraria

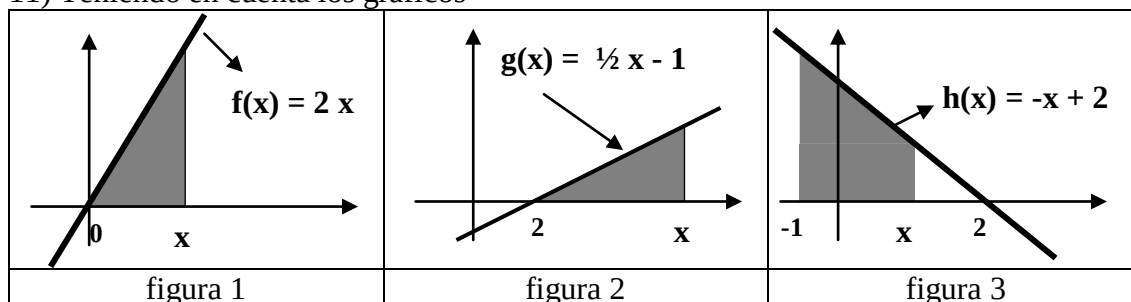
Ejercicios:

1) Calcular la diferencial de las funciones dadas para los valores de x y Δx indicados. Interpretar gráficamente.

$$a) f(x) = \sqrt{x-2}, \quad x = 3, \quad \Delta x = 1 \qquad b) f(x) = x^3, \quad x = 1, \quad \Delta x = 0,2$$

2) a) Calcular usando una aproximación lineal $\sqrt[3]{8,5}$. ¿Qué función debe considerar?, ¿en qué valor cercano a 8,5 es sencillo evaluar la función y su derivada?

- b) Considerando que $\cos 60^\circ = 0,5$, calcular un valor aproximado de $\cos 62^\circ 40'$
Cuidado!: debe reducir los grados a radianes
- 3) Una esfera tiene radio r y un revestimiento de espesor Δr . Hallar el volumen exacto y el aproximado (usando una aproximación lineal) del revestimiento en el caso que $r = 5,5 \text{ cm}$ y $\Delta r = 0,1 \text{ cm}$
- 4) Demostrar que para los valores de x cercanos a los indicados, valen las aproximaciones lineales siguientes:
- a) $\sin x \cong x$ $x = 0$ b) $\sqrt[3]{x+1} \cong 1 + \frac{1}{3}x$ $x = 0$
- c) $\frac{4}{(1+x)^2} \cong 2 - x$ $x = 1$ d) $\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{2x+5}}{x} \cong -x - 3$ $x = -2$
- 5) Hallar la primitiva más general de las siguientes funciones y verificar la respuesta mediante derivación: $f(x) = 4x^3 - 7x + 1$ $g(x) = \sqrt{x} + 4\cos x - \sec^2 x$
- 6) Si: $f'(x) = \sqrt[3]{x^2}$ $g'(x) = x^2 \sqrt{x}$ $h'(z) = 4\operatorname{sen} z - z + 1$
 $u'(t) = \frac{(\sqrt{t} + 3)^2}{\sqrt[5]{t}}$ $v'(x) = 3x^{-4} - \frac{\sqrt{x}}{x^2} - 4$, hallar $f(x)$, $g(x)$, $h(z)$, $u(z)$ y $v(x)$ y verificar lo obtenido mediante derivación.
- 7) Hallar $f(x)$ sabiendo que:
- a) $\frac{df}{dx} = 1 + \frac{1}{x^2}$, $f(1) = 5$ b) $\frac{df}{dx} = x^{3/4} + 4\operatorname{sen} x$, $f(0) = -3$
- 8) Hallar todas las funciones que verifiquen $f'(x) = 0,5x - 6$ ¿Existe alguna que pase por $(3, -1)$? Si es así, hallarla y graficarla.
- 9) La ecuación de la recta tangente a una curva en el punto de coordenadas $(1, 2)$ es $y = x + 1$. Si en cualquier punto (x, y) de la misma es $y' = 6x$, hallar la ecuación de la curva.
- 10) Demostrar que, para un movimiento rectilíneo con aceleración constante 8 , velocidad inicial 5 y desplazamiento inicial 3 , el desplazamiento después de un tiempo t es $s = 4t^2 + 5t + 3$
Ayuda: si $s = f(t)$ es la posición del móvil en el tiempo t , la velocidad es $v = f'(t)$ y la aceleración es $a = f''(t)$, la velocidad inicial es la velocidad en el tiempo $t = 0$, es decir $f'(0)$, el desplazamiento inicial es la posición del móvil en el tiempo $t = 0$, es decir $f(0)$.
- 11) Teniendo en cuenta los gráficos



Calcular el área de las tres figuras sombreadas. Si $F(x)$ es el área sombreada de la fig.1, $G(x)$ es el área sombreada de la fig.2, $H(x)$ es el área sombreada de la fig.3, demostrar que $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, $G(x)$ es una primitiva de $g(x)$ y $H(x)$ es una primitiva de $h(x)$

12) Hallar las primitivas indicadas, en todos los casos usar la sustitución $t = ax$

a) $\int \sin(ax) dx$ b) $\int \cos(ax) dx$ c) $\int \sec^2(ax) dx$

13) Calcular: a) $\int \sqrt[3]{6-2x} dx$ b) $\int \frac{t}{\sqrt{3t^2+1}} dt$ c) $\int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 y} dy$

d) $\int \frac{\operatorname{tg} y}{\cos^3 y} dy$

e) $\int \cos(3x) \sin^4(3x) dx$

f) $\int \cos^4(8x) \sin^3(8x) dx$

Ejercicios adicionales

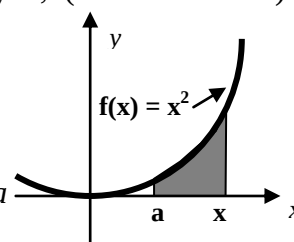
1- Dadas las funciones $f(x) = 3x^2 - \sqrt{4x}$ $g(x) = \sqrt[3]{\sin(2x)+1}$ $h(x) = \frac{\cos^2(4x)}{x^2+1}$

- a) Calcular la diferencial de cada una de ellas en un punto x arbitrario del dominio
b) Calcular usando diferenciales (aproximación lineal) $f(1,02)$, $g(-0,1)$ y $h(-0,01)$.

2-Si $F(x)$ es el área bajo la curva $f(x) = x^2$ comprendida entre a y x , (área sombreada)

c) Justificar que $F_+'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = x^2$

(Ayuda: el numerador del límite propuesto es el área bajo la curva $f(x) = x^2$ comprendida entre x y $x + \Delta x$, usar el teorema del sandwich comparándola con el área de dos rectángulos)



b) Justificar que: si $\Delta x < 0$ vale la desigualdad: $-\Delta x \cdot (x + \Delta x)^2 \leq F(x) - F(x + \Delta x) \leq -\Delta x \cdot x^2$

o su equivalente $\Delta x \cdot x^2 \leq F(x + \Delta x) - F(x) \leq \Delta x \cdot (x + \Delta x)^2$

Usar el teorema de intercalación para probar que la derivada por izquierda es $F_+'(x) = x^2$

Observación: Como $F'(x) = x^2 = f(x)$, entonces $F(x)$ es una primitiva de x^2 , es decir "el área comprendida entre la parábola $f(x) = x^2$, el eje x y las rectas verticales que pasan por a y x , es una primitiva de la parábola que limita dicha área"

3- Hallar $f(x)$ sabiendo que $f'(x) = x \sin(x^2 + \pi/4)$ y que $f(\sqrt{\pi}) = 1$.

4- La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x,y) de una curva es $\frac{4}{\sqrt[3]{2x-4}}$, hallar la ecuación de la curva sabiendo que su gráfica pasa por el punto de coordenadas $(6,-1)$

5- Si $p'(x) = \begin{cases} (x^2-1)^2 x & \text{si } x < 0 \\ 2\sin(2x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$, hallar $p(x)$ sabiendo que es continua y $p(0) = 4$

6- Calcular a) $\int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx$ b) $\int \sin^2 x \, dx$
 $= \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx$

Respuestas de los Ejercicios

1) a) $df = \frac{1}{2}$

b) $dg = 0,6$

2) a) $\frac{49}{24}$

b) 0,459693347

3) Valor exacto: $\frac{4}{3}\pi 9,241$

Valor aproximado= $4 \cdot \pi \cdot 3,025$

5) $F(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^2 + x + C$

$G(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 4 \sin x - \operatorname{tg} x + C$

6) $f(x) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C$

$g(x) = \frac{2}{7}\sqrt{x^7} + C$

$h(z) = -4 \cos z - \frac{z^2}{2} + z + C$

$u(t) = \frac{5}{9}\sqrt[5]{t^9} + \frac{60}{13}\sqrt[10]{t^{13}} + \frac{45}{4}\sqrt[5]{t^4} + C$

$v(x) = \frac{-1}{x^3} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4x + C$

7) a) $f(x) = x - \frac{1}{x} + 5$

b) $f(x) = \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} - 4 \cos x + 1$

8) $f(x) = \frac{x^2}{4} - 6x + \frac{59}{4}$

9) $f(x) = x^3 - 2x + 3$

11) $G(x) = \frac{x^2}{4} - x + 1$

$H(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{2}$

12) a) $-\frac{1}{a} \cos(ax) + C$

b) $\frac{1}{a} \sin(ax) + C$

c) $\frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax) + C$

13) a) $-\frac{3}{8}\sqrt[3]{(6-2x)^4} + C$

b) $\frac{\sqrt{3t^2+1}}{3} + C$

c) $\frac{1}{2 \cos^2 y} + C$

d) $\frac{1}{\cos^3 y} + C$

e) $\frac{\sin^5(3x)}{15} + C$

f) $-\frac{\cos^5(8x)}{40} + \frac{\cos^7(8x)}{56} + C$

Respuestas de los Ejercicios adicionales

$$1) \quad a) \, df = \left(6x - \frac{2}{\sqrt{4x}} \right) dx \quad dg = \frac{2 \cos(2x)}{3 \sqrt[3]{(\sin(2x)+1)^2}}$$

$$b) \, f(1,02) \cong 1,1 \quad g(-0,1) \cong \frac{14}{15} \quad h(-0,01) \cong 1$$

$$3) \, f(x) = -\frac{\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right)}{2} + \frac{4 - \sqrt{2}}{4}$$

$$4) \, f(x) = 3 \sqrt[3]{(2x-4)^2} - 13$$

$$5) \, p(x) = \begin{cases} \frac{(x^2-1)^3}{6} + \frac{25}{6} & \text{si } x < 0 \\ 4 & \text{si } x = 0 \\ -\cos(2x) + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$6) \, a) \, \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

$$b) \, \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

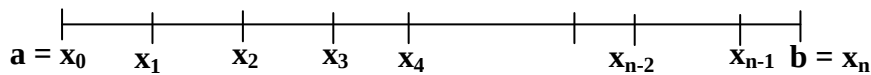
UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología	
<u>ANÁLISIS MATEMÁTICO I</u>	
2017	
Práctico Nº7	Integral definida: definición y propiedades. Teorema del valor medio del cálculo integral. Teorema fundamental del cálculo. Regla de Barrow. Área entre curvas.

Guía teórica

Partición de un intervalo

Para dividir un intervalo $[a,b]$ en n subintervalos más pequeños, se eligen puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, de manera que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ obteniendo los subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$



Esta subdivisión se denomina **partición** del intervalo $[a,b]$ y se denota con **P**.

La longitud del primer intervalo es $x_1 - x_0$ y la indicamos $\Delta x_1 = x_1 - x_0$,

la longitud del segundo intervalo es $x_2 - x_1$ y la indicamos $\Delta x_2 = x_2 - x_1$,

.....

la longitud del n -ésimo intervalo es $x_n - x_{n-1}$ y la indicamos $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

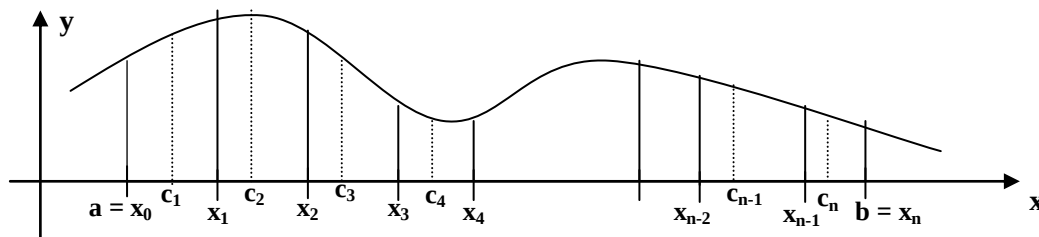
La longitud del subintervalo más grande se denota $\|P\|$ y se denomina **norma** de la partición **P**, de modo que $\|P\| = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots, \Delta x_n \}$

Si las longitudes de los subintervalos son iguales se dice que la partición es **regular**.

Observar que en este caso la longitud de cada subintervalo es $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Definición de integral definida

Sea **f** una función definida en un intervalo $[a,b]$ y **P** una partición de $[a,b]$ con puntos de división $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$,



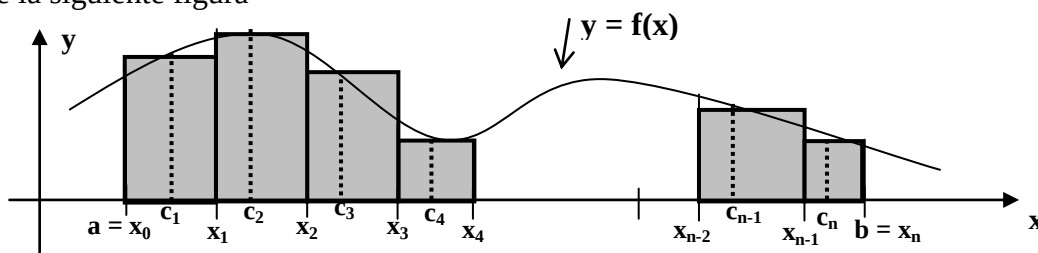
Se eligen puntos arbitrarios en cada subintervalo : $c_1 \in [x_0, x_1], c_2 \in [x_1, x_2], \dots, c_n \in [x_{n-1}, x_n]$, entonces la integral **definida** de **f** entre **a** y **b**, que se indica $\int_a^b f(x) dx$, se

define como : $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$, si este límite existe y no depende de la

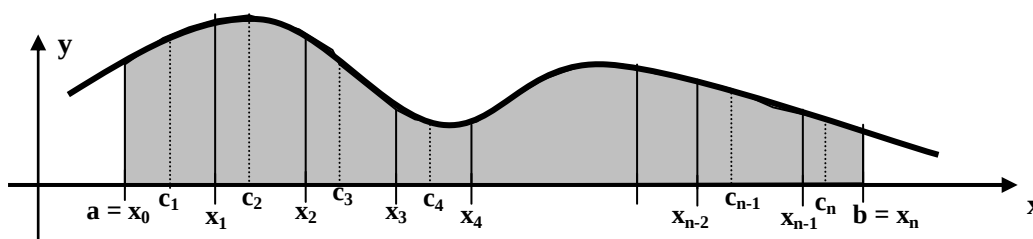
partición elegida ni de la elección de los puntos arbitrarios, en ese caso se dice que f es **integrable** en el intervalo $[a,b]$.

Terminología e interpretación :

- El símbolo $\int$ fue introducido por Leibnitz y se denomina **signo integral**. Es una S alargada y lo escogió porque la integral es un límite de sumas;
- $f(x)$ se denomina **integrando**;
- a y b son los **límites de integración**, a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**;
- la suma $\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ se denomina **suma de Riemann**
- si $f \geq 0$ en $[a,b]$ entonces la suma de Riemann es igual al área de la zona sombreada de la siguiente figura



y si $f \geq 0$ en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x) dx$ es igual al área sombreada bajo la gráfica de f entre a y b



Observaciones:

- La integral $\int_a^b f(x) dx$ sólo representa el área bajo la curva entre a y b si f es positiva en $[a,b]$
- En la definición de la integral definida $\int_a^b f(x) dx$ se supuso que $a < b$, sin embargo a veces es útil considerar los casos donde $a > b$ o $a = b$ y para ello se define:

Si $a > b$: $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$	Si $a = b$: $\int_a^a f(x) dx = 0$
---	-------------------------------------

Teorema: Si f es continua o monótona en $[a,b]$ entonces f es integrable en $[a,b]$

Propiedades: Si todas las integrales siguientes existen entonces:

$$1- \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$2- \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ constante})$$

$$3- \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (c \text{ no necesariamente entre } a \text{ y } b)$$

Propiedades de orden: Dadas f y g integrables en $[a,b]$

$$4- \text{ Si } f(x) \geq g(x) \text{ en } [a,b] \text{ entonces } \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx, \quad 5- \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Teorema del valor medio del cálculo integral: Si f es continua en $[a,b]$ entonces existe

$$\text{un punto } c \text{ entre } a \text{ y } b \text{ tal que } \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Primer Teorema fundamental del cálculo integral: Si f es continua en $[a,b]$ entonces

la función $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ es una primitiva de f en $[a,b]$, es decir $F'(x) = f(x)$ para x perteneciente a $[a,b]$

Segundo Teorema fundamental del cálculo integral – Regla de Barrow: Si f es

continua en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$

Cuidado! : La integral definida $\int_a^b f(x) dx$ es un número, no depende del nombre de la

variable, por ello se verifica que $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(v) dv$

Ejercicios:

- 1) a) Indicar los subintervalos que se obtienen al considerar una partición del intervalo $[-2,3]$ en **10** partes iguales, ¿cuál es la longitud de cada uno?, ¿cuál es el punto medio de cada subintervalo?, ¿cuánto vale la norma de la partición considerada?
- b) Responder los mismos interrogantes propuestos en a) si el intervalo se divide en **n** partes iguales.
- c) Si nos dicen que la norma de la partición considerada en b) tiende a cero, ¿qué característica tiene que tener el número **n**?

$$2) \text{ Calcular usando la definición de integral : a) } \int_0^3 4 dx \quad \text{b) } \int_{-1}^2 (1-x) dx$$

En ambos casos considerar sumas de Riemann correspondientes a particiones regulares y evaluar la función en los extremos derechos de cada subintervalo para la dada en a) y evaluar la función en los extremos izquierdos de cada subintervalo para la dada en b).

3) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

$$G(x) = \int_x^\pi \sqrt[3]{\sin t} dt$$

$$H(x) = \int_1^{x^2+x} \frac{1}{t} dt$$

(Observar que $H(x) = F(x^2 + x)$)

- 4) Calcular:
- a) $\int_0^1 (6x^3 + 5x - 3) dx$ b) $\int_4^9 \frac{(x - \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int_{-4}^4 |2x| dx$
- d) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ e) $\int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^5}} \right)^2 dx$
- f) $\int_{-1}^{10} f(x) dx$ siendo $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{si } |x-1| \leq 7 \\ \frac{1}{2}x-1 & \text{si } |x-1| > 7 \end{cases}$ g) $\int_0^3 |x(2-x)| dx$

5) Graficando previamente en forma aproximada, calcular

- a) el área bajo la curva $y = 4x^2 - 4x + 3$ limitada por $x = -1$ y $x = 2$.
b) el área bajo la curva $y = x^{0,8}$ limitada por $x = -32$ y $x = 1$.
c) el área del trapecio limitado por las rectas $x + 2y = 2$, $x + 2y = 4$, $x = 0$, $y = 0$

6) Hallar el área de la región limitada por:

- a) $y = x^2 - x$, $y = 2x - 2$ b) $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$
c) $y = |2x - 4|$, $y = -3x + 5$, $y = 3x - 7$ d) $x = 2 - y - y^2$, $x = 0$
e) $y = 1/x^2$, $y = 8/x^2$, $y = x$, $y = 4$ f) $y = \sin 2x$, $y = 2x - \pi$, $y = -x$
g) $y = |-2x + 4|$, $y = -x^2 + 2x + 4$
h) $y = \sqrt{4-x}$, $y = -2 + \sqrt{x}$, $y = -x - 2$

7) Graficar los recintos definidos por las desigualdades siguientes y calcular su área:

- a) $y \leq 16 - 2x^2$, $y \geq 8$ b) $0 \leq y \leq |\sin x|$, $-\pi/3 \leq x \leq \pi/2$
c) $y \geq x^2 - 4$, $y + 3x \leq 0$ d) $2x^2 - 5 \leq y \leq |x^2 - 1|$

8) Justificar, sin calcular la integral, los resultados siguientes

- a) $\int_{-3}^3 \sin^5 x dx = 0$ b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^5 x dx$

Ejercicios adicionales

1- Graficar aproximadamente y calcular el área limitada por:

- a) $2y^2 = x + 4$, $x = y^2$ b) $y \geq -x$, $y \leq 2x + 3$, $2y \leq -3x + 13$, $x \leq 3$
c) $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje x d) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $-3\pi/4 \leq x \leq \pi/4$
e) $y = x^3$ y su recta tangente en $x = 1$

2-Dadas las funciones $I(x) = \int_1^x \cos^2 t dt$ y $G(x) = \int_1^{x^3} \cos^2 t dt$, calcular $I'(x)$ y $G'(x)$ (Observar que $G(x) = I(x^3)$)

3- Si $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ con $f(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 5 - 2t & \text{si } t > 1 \end{cases}$

- a) Calcular $F(x)$ si $0 \leq x \leq 1$ y calcular $F(x)$ si $x > 1$ (tener en cuenta que si $x > 1$ entonces $F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 3t^2 dt + \int_1^x (5 - 2t) dt$)
- b) Comprobar que la función $F(x)$ obtenida en a) es continua para $x \geq 0$ y $F'(x) = f(x)$

Respuestas de los Ejercicios

- 4) a) 1 b) $\frac{481}{15}$ c) 32 d) $2 - \frac{\pi^2}{2}$
e) $\frac{220222625}{6718464} \cong 32,7787$ f) $\frac{73}{4}$ g) $\frac{8}{3}$
- 5) a) 15 b) 285 c) 3
- 6) a) $\frac{1}{6}$ b) 1 c) 1 d) $\frac{9}{2}$
e) 2,81371 f) $1 + \frac{\pi^2}{12}$ g) 7,0844 h) $\frac{109}{6}$
- 7) a) $\frac{64}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{125}{6}$ d) $\frac{40}{3}$

Ejercicios adicionales

- 1) a) $\frac{32}{3}$ b) 17 c) $\frac{1}{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) $\frac{27}{4}$
- 3) a) $F(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ -3 + 5x - 2x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología	
<u>ANÁLISIS MATEMÁTICO I</u>	
2017	
Práctico Nº8	Función logaritmo: definición y propiedades. Función exponencial : definición y propiedades. Funciones logarítmicas y exponenciales generales. Funciones hiperbólicas.

Guía teóricaFunción logaritmo natural

Si $x > 0$, el valor de la integral $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ es una función que se denomina **logaritmo**

natural de x, y se indica $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$

Observaciones:

* si $x = 1$, la integral anterior vale **0**, por lo tanto $\ln 1 = 0$

** si $x > 1$, la integral anterior da el área bajo la gráfica de la función $f(t) = 1/t$

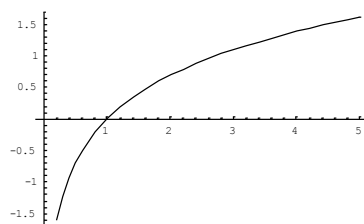
(En una práctica anterior fue definido el logaritmo para $x > 1$ y dicha definición coincide con esta para $x \geq 1$, pero a partir de ahora también existe $\ln x$ para $0 < x < 1$)

Propiedades inmediatas a partir de la definición

- a) El **dominio** de $\ln x$ es el intervalo abierto $(0, \infty)$ b) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$
- c) Si $x > 1 \rightarrow \ln x > 0$, si $0 < x < 1 \rightarrow \ln x < 0$

Más propiedades

- a) $\ln x$ es **continua** en $(0, \infty)$, por ser derivable en todo su dominio.
- b) $\ln x$ es **creciente** en $(0, \infty)$, por tener derivada positiva en todo su dominio.
- c) Como $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$, la gráfica de $f(x) = \ln x$ es **cóncava hacia abajo**.
- d) El dominio de $\ln |x|$ es $\mathbb{R} - \{0\}$ y $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$
- e) Si $x > 0$ y $a > 0 \rightarrow (\ln(ax))' = (\ln x)' \rightarrow \ln(ax) = \ln x + k$, con k constante.
- f) Si $a > 0$ y $x > 0 \rightarrow \ln(ax) = \ln a + \ln x$ (El logaritmo de un producto de factores positivos es igual a la suma de los logaritmos)
- g) Si $b > 0$ y $x > 0 \rightarrow \ln(x/b) = \ln x - \ln b$ (El logaritmo de un cociente de números positivos es igual a la resta de los logaritmos)
- h) Si $x > 0 \rightarrow \ln x^{m/n} = m/n \ln x$ (El logaritmo de una potencia de base positiva es igual a la potencia por el logaritmo de la base)
- i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Gráfica de $f(x) = \ln x$ **El número “e”**

Indicamos con la letra **e** al número que verifica $\ln e = 1$. Puede demostrarse que **e** es un número irracional y sus primeras cifras son **2,7182.....**

Función exponencial

La función $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente y toma todos los valores reales, por lo tanto admite función inversa, a la que se denomina función exponencial y se anota **exp(x)**, luego: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ y verifica $y = \exp(x) \leftrightarrow \ln y = x$ (*)

Propiedades inmediatas, a partir de la definición de exponencial

a) $\exp(0) = 1$ pues $\ln 1 = 0$ b) $\exp(1) = e$ pues $\ln e = 1$

c) $e^x = \exp(x)$, para x número racional,

pues

$\ln(e^x) = x \ln e = x$ (por propiedad del logaritmo de la potencia y por ser $\ln e = 1$)

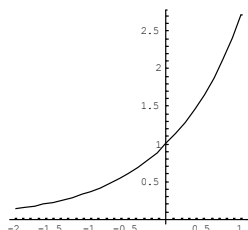
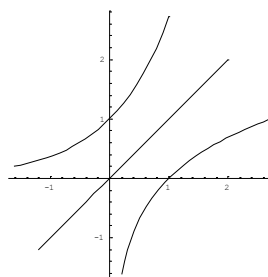
$\ln(\exp x) = x$ (por ser **exp** la inversa de **ln**)

por lo tanto $\ln(e^x) = \ln(\exp x)$, de donde $e^x = \exp(x)$, para x número racional.

Definición de e^x

Dado que $e^x = \exp(x)$ para x número racional, extendemos la definición diciendo que si x es cualquier número real vale $e^x = \exp(x)$.

Con esta notación podemos reescribir la definición (*) diciendo: $y = e^x \leftrightarrow \ln y = x$

Gráfica de $f(x) = e^x$ Gráfica de $f(x) = e^x$ y gráfica de $g(x) = \ln x$ **Propiedades**

a) $\ln(e^x) = x$, para todo x

b) $e^{\ln x} = x$, para $x > 0$

c) $(e^x)' = e^x$

d) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

e) $e^{x-y} = e^x / e^y$

f) $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$

Definición de funciones exponenciales generales o potencia generalizada

$a^x = e^{x \ln a}$, con $a > 0$ y x número real cualquiera

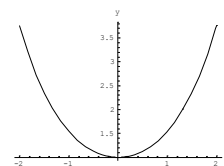
Definición de Funciones logarítmicas generales

$y = \log_a x \leftrightarrow a^y = x$, donde $x > 0$ y $a > 0$

Funciones hiperbólicas

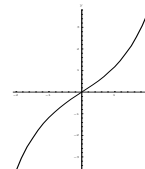
La función $u(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ se denomina **coseno hiperbólico**

y se indica $ch\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$



La función $u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ se denomina **seno hiperbólico**

y se indica $sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$



Ejercicios

1) Hallar el dominio, la función derivada y el dominio de la derivada

a) $F(x) = \ln(2 - 3x)$ b) $G(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$ c) $H(x) = \frac{1}{\ln x}$

2) Teniendo en cuenta el gráfico de la función $f(x) = \ln x$, obtener el gráfico de :
 $f_1(x) = -\ln x$, $f_2(x) = 2 + \ln x$, $f_3(x) = \ln(x - 2)$, $f_4(x) = \ln|x|$

3) Hacer un estudio completo de las siguientes funciones y graficarlas

a) $h(x) = \ln(1 + x^2)$ b) $g(x) = \ln(4 - x^2)$

4) Teniendo en cuenta las gráficas de las funciones

$g(t) = \frac{1}{t}$, $h(t) = -\frac{1}{4}t + 1$ con $1 \leq t \leq 3$ que se

observan en la figura de la derecha.

a) Justificar que la función $h(t)$ es la ecuación de la recta tangente a $g(t)$ en $t = 2$

b) Verificar que el área del trapecio comprendido entre el eje t y las rectas $t = 1$, $t = 3$,

y $h(t) = -\frac{1}{4}t + 1$ es igual a 1

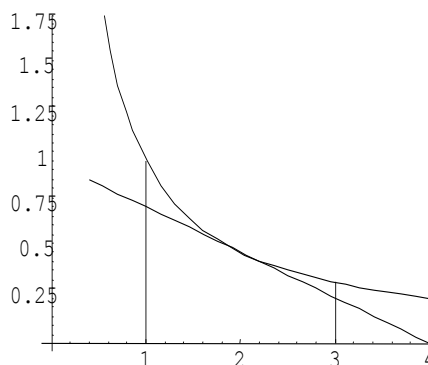
c) Usando el resultado de a) y teniendo en cuenta el gráfico y la definición de $\ln 3$ justificar que $\ln 3 > 1$

d) Calcule el área del trapecio formado por el eje t , las rectas $t = 1$; $t = 2,4$ y la recta que pasa por los puntos $A(1;1)$ y $B(2,4;g(2,4))$ y compruebe que $\ln 2,4 < 1$ comparando áreas.

e) Usando los ítems c) y d) justifique que existe un número $a \in (2,4;3)$ tal que $\ln a = 1$

5) Justificar las igualdades:

a) $e^{3 \ln x} = x^3$, $\forall x > 0$ b) $\ln(e^{5x+4}) = 5x + 4$, $\forall x$ c) $e^{-2 \ln x} = 1/x^2$, $\forall x > 0$



6) Derivar las funciones: $f(x) = e^{2x+3}$, $g(x) = x^2 e^{-x}$, $h(t) = e^{-t^2} \ln(3t)$

7) Justificar que las funciones $f_1(x)$ y $f_2(x)$ satisfacen la ecuación en derivadas dada

a) $f_1(x) = e^{-3x}$, $f_2(x) = x e^{-3x}$, $f''(x) + 6f'(x) + 9f(x) = 0$

b) $f_1(x) = e^{2x} \cos(3x)$, $f_2(x) = e^{2x} \sin(3x)$, $f''(x) - 4f'(x) + 13f(x) = 0$

8) Calcular usando la definición de potencia generalizada : $2^{\sqrt{2}}$, 1^π , $3^{1+\sqrt{6}}$

9) Calcular la derivada de: $f(x) = (2^x + 3^x)^2$, $g(x) = a^x - x^a$, $h(x) = 5^{3x} \cdot 7^{4x+1}$

10) Hallar la solución de las ecuaciones siguientes

a) $e^{2 \ln x} = 3$

b) $e^{-\ln(3x)} = 12$

c) $e^{\ln x} + e^{\ln(0.1x)} = 2x - 1$

d) $2^{x+1} = 7 \cdot 3^x$

e) $e^x + e^{x+1} = e^{2x+1}$

f) $e^x - e^{-3x} = 0$

g) $\ln(2x) - \ln(3x - 1) = 1$

h) $\ln(\ln x) = 1$

11) Expresar las siguientes funciones usando la exponencial, indicar el dominio y calcular la derivada $f(x) = x^x$, $g(t) = (\sin t)^{\cos t}$, $h(u) = (1 + x^2)^{3x}$

12) Hacer un estudio completo de las siguientes funciones y gráfico aproximado

a) $g(x) = 2x^2 + \ln(x+1)$

b) $g(x) = e^{-1/|x|}$

$u(x) = x^2 - 3x + 2 + \ln|x|$

d) $u(x) = e^{2x} + \operatorname{sh}(2x)$

e) $v(x) = \frac{\operatorname{ch}(2x)}{2e^x}$

f) $i(x) = e^x - \ln(e^x - 1)$

g) $f(x) = e^{-x^2}$ ($f(x)$ se denomina “campana de Gauss”)

h) $h(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$ ($h(x)$ se denomina “curva logística”)

13) Calcular: a) $\int \left(\frac{x-4}{x^2} + \frac{x+1}{x} \right) dx$ b) $\int \frac{x}{x^2 + 3} dx$

c) $\int \frac{dx}{3 + 2x}$ d) $\int \operatorname{tg} x dx$

14) Calcular: a) $\int e^{ax} dx$ b) $\int_0^1 \frac{e^{2x} + 1}{e^{-x}} dx$

c) $\int_{-2}^2 \frac{1 - e^{2x}}{e^x} dx$ d) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - 4} dx$

15) Calcular el área limitada por las curvas que se dan en cada caso:

a) $y = e^{2x}$, $y = e^{-2x}$, $y = 4$

b) $y = x \cdot (x+2)^{-1}$, $y = -x$, $y = -x - 2$

16) La función exponencial $W(t) = A e^{Bt}$ describe el crecimiento de una población de bacterias. Si inicialmente había 4000 bacterias y la población se triplica a la media hora .Hallar una expresión para el número de bacterias presentes al cabo de t horas. ¿En qué momento la población será de 20.000 bacterias?

17) Determinar, en cada caso, los dominios de $f(x)$ y $g(x)$. Además indicar en qué dominio se verifica que $f(x) = g(x)$

a) $f(x) = \ln(x^6)$, $g(x) = 6 \ln x$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$, $g(x) = \ln(2x+1) - \ln(x-3)$

18) Hallar el punto de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ donde la recta tangente es paralela $y = x + 3$. Representar gráficamente

Ejercicio de lectura: El número “e” expresado como un límite:

Es interesante seguir la demostración que se da a continuación pues muestra al número e como resultado del siguiente límite: $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e$

Si $f(x) = \ln x$, sabemos que su derivada es $f'(x) = 1/x$ y al evaluarla en 1 se tiene $f'(1) = 1$, pero por definición de derivada podemos poner:

$$1 = f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\Delta x) - \ln 1}{\Delta x} =$$

$$\text{Como } \ln 1 = 0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x} =$$

por la propiedad de la potencia

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln(1+\Delta x)^{1/\Delta x} =$$

por ser $\ln$ continua, podemos usar la regla del corrimiento del límite) $= \ln \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1+\Delta x)^{1/\Delta x} \right]$

Por lo tanto $1 = \ln \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1+\Delta x)^{1/\Delta x} \right]$, como $\ln e = 1$ entonces

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1+\Delta x)^{1/\Delta x} = e$$

Si se cambia $\Delta x = u$, se obtiene lo expresado: $\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u} = e$

Observación:

Si en la expresión anterior se reemplaza $u = 1/v$, entonces el límite puede escribirse:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v} \right)^v = e, \text{ que es otra manera distinta de expresar el número } e.$$

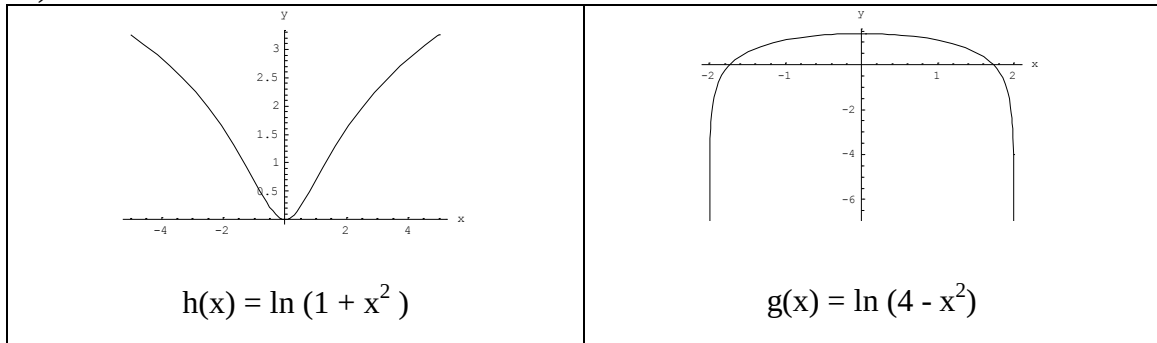
Respuestas de los Ejercicios

1)

Función	Dominio de la función	Derivada	Dominio de la derivada
$F(x)$	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$F'(x) = \frac{-3}{2-3x}$	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$
$G(x)$	$\mathbb{R}$	$G'(x) = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{\ln(x^2+1)}}$	$\mathbb{R} - \{0\}$

H(x)	(0;1) U(1;+∞)	$H'(x) = -\frac{1}{x (\ln x)^2}$	(0;1) U(1;+∞)
------	---------------	----------------------------------	---------------

3)



6) $f'(x) = 2e^{2x+3}$ $g'(x) = xe^{-x}(2-x)$ $h'(x) = e^{-t^2} \left(-2t \ln(3t) + \frac{1}{t} \right)$

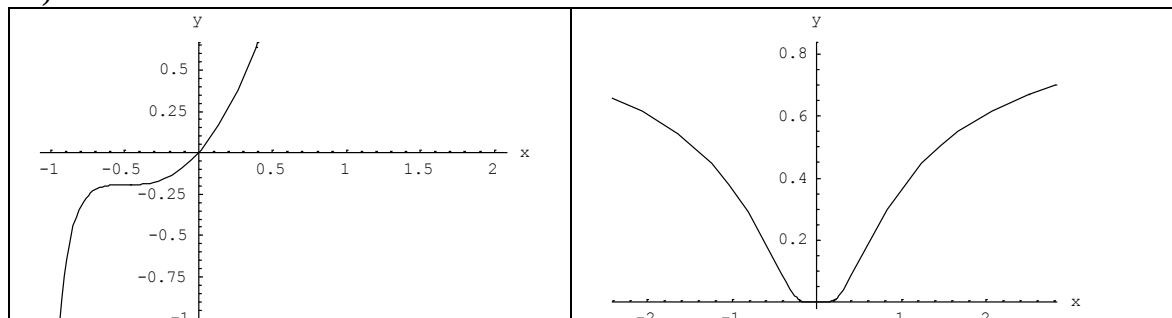
9) $f'(x) = 2(2^x + 3^x)(2^x \ln 2 + 3^x \ln 3)$
 $g'(x) = a^x \ln a + a x^{a-1}$
 $h'(x) = 5^{3x} 7^{4x+1} (3 \ln 5 + 4 \ln 7)$

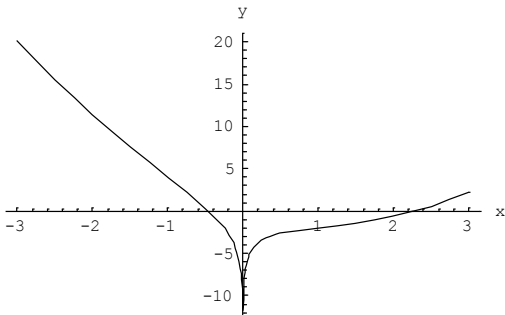
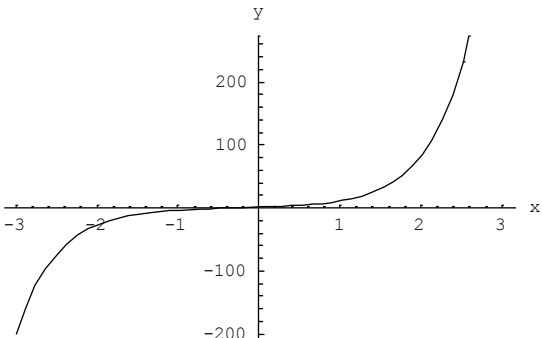
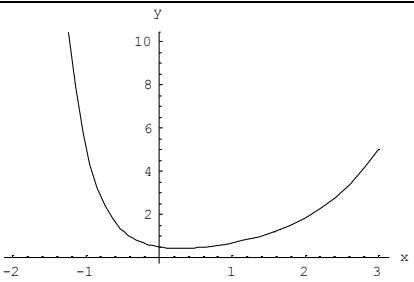
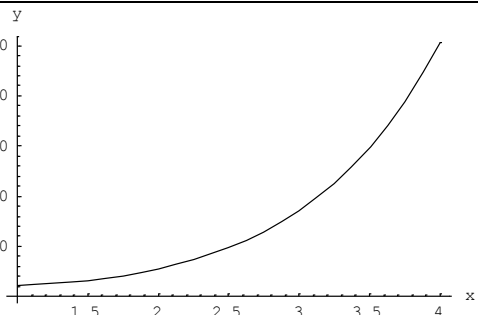
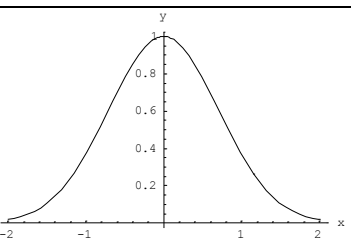
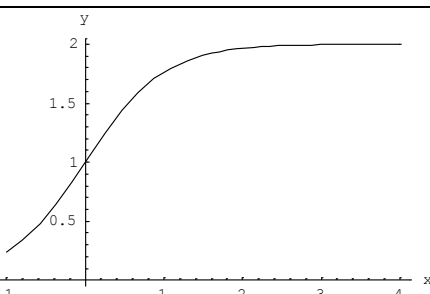
10) a) $x = \sqrt{3}$ b) $x = \frac{1}{36}$ c) $x = \frac{10}{9}$ d) $x = \frac{\ln\left(\frac{7}{2}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$
e) $x = \ln\left(\frac{e+1}{e}\right)$ f) $x = 0$ g) $x = \frac{e}{3e-2}$ h) $x = e^e$

11)

Función	Dominio de la función	Derivada
f(x)	(0; +∞)	$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$
g(t)	$\left(k\pi, \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$	$g'(x) = (\sec(2x))^{\cos x} (-\sin x \ln(\sec(2x)) + 2 \cos x \cot g(2x))$
h(u)	R	$h'(x) = (1+x^2)^{3x} \left(3 \ln(1+x^2) + \frac{6x^2}{1+x^2} \right)$

12)



$g(x) = 2x^2 + \ln(x+1)$	$g(x) = e^{-1/ x }$
	
$u(x) = x^2 - 3x + 2 + \ln x $	$u(x) = e^{2x} + \text{sh}(2x)$
	
$v(x) = \frac{\text{ch}(2x)}{2e^x}$	$i(x) = e^x - \ln(e^x - 1)$
	
$f(x) = e^{-x^2}$	$h(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$

13) a) $x + 2 \ln x + \frac{4}{x} + k$
c) $\frac{\ln(3+2x)}{2} + k$

b) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 3) + K$
d) $-\ln(\cos x) + k$

14) a) $\frac{e^{ax}}{a} + k$
c) 0

b) $\frac{e^3}{3} + e - \frac{4}{3}$
d) $\frac{\ln(e^{3x} - 4)}{3} + k$

15) a) $8 \ln 2 - 3$

b) $4 \ln 2 + 3$

16) $w(t) = 4.000.9^t$

$$17) \quad a) \quad D f = \mathbb{R} - \{0\} \qquad D g = (0; +\infty)$$

$$f(x) = g(x) \quad \text{en} \quad (0; +\infty)$$

$$b) \quad D f = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty) \qquad D g = (3, +\infty)$$

$$f(x) = g(x) \quad \text{en} \quad (3, +\infty)$$

$$18) (1, 0)$$

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología	
<u>ANÁLISIS MATEMÁTICO I</u>	
2017	
<u>Práctico</u> <u>Nº9</u>	Método de integración por partes. Método de fracciones simples cuyo denominador sólo tiene raíces reales.

Guía teórica

A continuación se describen otros dos métodos para hallar primitivas.

Método de integración por partes

Si $u(x)$ y $v(x)$ son derivables entonces $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Integrando ambos miembros respecto de x obtenemos:

$$\int [u(x) \cdot v(x)]' dx = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

y despejando la última integral obtenemos:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

que se conoce con el nombre de **fórmula de integración por partes**.

Integración de funciones racionales (cociente de polinomios)**Método de fracciones simples**

Se quiere calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son **polinomios** y **el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$** (si no fuera así comenzar realizando el cociente entre ambos).

Supondremos que el coeficiente principal del polinomio $Q(x)$ es **1**, (si no fuera así, se factoriza : $Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = a_n \left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \right)$

Cuando la primitiva no es inmediata ni puede obtenerse por una sustitución inmediata, debe factorizarse el denominador $Q(x)$ teniendo en cuenta las raíces de $Q(x)$. Pueden darse las siguientes situaciones:

Situación 1 : $Q(x)$ tiene **todas las raíces reales y no están repetidas**, en cuyo caso $Q(x)$ tiene dos o más factores lineales que no están repetidos.

Situación 2 : $Q(x)$ tiene **todas las raíces reales y algunas o todas están repetidas**, en cuyo caso $Q(x)$ tiene dos o más factores lineales y algunos o todos están repetidos.

Situación 3 : $Q(x)$ tiene al menos un par de raíces complejas que no están repetidas y otras raíces, en cuyo caso $Q(x)$ tiene dos o más factores, donde al menos uno de ellos es un polinomio cuadrático sin raíces reales que no está repetido.

A continuación mostramos mediante ejemplos el procedimiento utilizado en la situación 1- , y en la situación 2- , la situación 3- será analizada en el Práctico 10 .

1- $Q(x)$ tiene todas las raíces reales y no están repetidas

Ejemplo 1: $\int \frac{5x-4}{x^2+2x-3} dx = \int \frac{5x-4}{(x-1)(x+3)} dx$ (las raíces del denominador son 1 y -3)

Como el denominador tiene dos factores lineales distintos proponemos la siguiente descomposición en fracciones simples (una letra para cada factor)

$$\frac{5x-4}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$

para obtener los valores de A y B se multiplican ambos miembros por $(x-1)(x+3)$ obteniendo:

$$5x-4 = A(x+3) + B(x-1) \quad (*)$$

para que los dos polinomios sean iguales, deben ser iguales sus coeficientes , por ello se realizan las operaciones del segundo miembro de (*) y se agrupan los términos semejantes :

$$5x-4 = (A+B)x + (3A-B)$$

teniendo en cuenta que :

coeficiente de x del 1^{er} miembro = coeficiente de x del 2^{do} miembro

término independiente del 1^{er} miembro = término independiente del 2^{do} miembro

se obtiene $\begin{cases} A+B=5 \\ 3A-B=-4 \end{cases}$ cuya solución es $A=1/4$ y $B=19/4$

$$\begin{aligned} \text{por lo tanto } \int \frac{5x-4}{x^2+2x-3} dx &= \int \left(\frac{1/4}{x-1} + \frac{19/4}{x+3} \right) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{19}{4} \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln|x-1| + \frac{19}{4} \ln|x+3| + C \end{aligned}$$

Otra forma de determinar el valor de las constantes A y B es simplemente evaluar ambos miembros de la expresión (*) para algunos valores adecuados, por ejemplo si se reemplaza x por -3 se obtiene $5(-3)-4 = A \cdot 0 + B(-4)$, de donde puede obtenerse que $B=19/4$ y reemplazando x por 1 en (*) se obtiene $5-4 = A \cdot 4 + B \cdot 0$, de donde se obtiene que $A=1/4$

Ejemplo 2: $\int \frac{2x^2-3}{x(x^2-4)} dx = \int \frac{2x^2-3}{x(x-2)(x+2)} dx$ Como el denominador tiene tres

factores lineales distintos, su descomposición en fracciones simples tiene tres constantes,

una por $c/$ factor: $\frac{2x^2-3}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}$

Para determinar los valores de A , B y C puede aplicarse cualquiera de los dos procedimientos indicados en el ejemplo anterior y se obtiene en este caso: $A=3/4$, $B=5/8$, $C=5/8$, por lo tanto

$$\int \frac{2x^2-3}{x(x-2)(x+2)} dx = \int \left(\frac{3/4}{x} + \frac{5/8}{x-2} + \frac{5/8}{x+2} \right) dx = \int \frac{3/4}{x} dx + \int \frac{5/8}{x-2} dx + \int \frac{5/8}{x+2} dx =$$

$$= 3/4 \ln |x| + 5/8 \ln |x - 2| + 5/8 \ln |x + 2| + C$$

2- Q(x) tiene todas las raíces reales y algunas o todas están repetidas

Ejemplo 3: $\int \frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)} dx$ Como el denominador tiene dos factores lineales distintos pero uno de ellos está repetido proponemos la siguiente descomposición en fracciones simples $\frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}$

(observar que el factor que está repetido aparece primero con potencia uno y luego con potencia dos, en cambio el otro factor sólo aparece una vez, como vimos en el caso anterior)

Para obtener los valores de **A**, **B** y **C** se multiplican ambos miembros por $(x-2)^2(x+1)$ obteniendo: $x+2 = A(x-2)(x+1) + B(x+1) + C(x-2)^2$ (***)

para que los dos polinomios sean iguales, deben ser iguales sus coeficientes, por ello operamos en el segundo miembro agrupando los términos semejantes:

$$x+2 = (A+C)x^2 + (-A+B-4C)x + (-2A+B+4C)$$

de donde : $\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B-4C=1 \\ -2A+B+4C=2 \end{cases}$ cuya solución es $\begin{cases} A=-1/9 \\ B=4/3 \\ C=1/9 \end{cases}$, entonces:

$$\int \frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)} dx = \int \left(\frac{-1/9}{(x-2)} + \frac{4/3}{(x-2)^2} + \frac{1/9}{x+1} \right) dx = \left(\text{estas se obtienen usando} \right.$$

sustituciones adecuadas obteniendo) $= -\frac{1}{9} \ln |x-2| - \frac{4}{3(x-2)} + \frac{1}{9} \ln |x+1| + C$

Otra forma para determinar el valor de las constantes **A**, **B** y **C** es evaluando la expresión (***) en $x=2$, obteniendo en este caso que $B=4/3$, evaluando la expresión (***) en $x=-1$, obteniendo $C=1/9$ y evaluando (***) en otro valor de x , por ejemplo si se evalúa en $x=0$ se obtiene $2 = A(-2) \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 4$, y reemplazando **B** y **C** por los valores ya obtenidos se obtiene que $A = -1/9$

Ejemplo 4: $\int \frac{2x^4+3x+2}{x^3(x-4)^2(x-1)} dx$ Aquí el denominador tiene tres factores lineales distintos, uno de ellos está repetido tres veces, otro está repetido dos veces y el tercero no está repetido

Proponemos la siguiente descomposición en fracciones simples :

$$\frac{2x^4+3x+2}{x^3(x-4)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-4} + \frac{E}{(x-4)^2} + \frac{F}{x-1}$$

los pasos a seguir son similares a los del ejemplo anterior: multiplicar ambos miembros por el denominador de la primera y plantear 6 ecuaciones con 6 incógnitas o evaluar la expresión obtenida para valores adecuados de x para poder encontrar los valores de **A**, **B**,

C, D, E y F y luego se busca la primitiva de cada una de ellas, que resultan ser inmediatas usando sustituciones adecuadas.

Ejercicios

1) Integrar por partes

a) $\int x e^{ax} dx$

b) $\int x \sec^2 x dx$

c) $\int_0^2 x^2 \cos(3x) dx$

d) $\int_1^e x^2 \ln(x^2) dx$

e) $\int_1^e \ln x dx$

f) $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(2x + \pi) dx$

2) Hallar la primitiva de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 \sqrt{3-x}$

b) $g(t) = \frac{1}{2t+3} - t \sin(5t^2)$

c) $h(w) = e^{2w} \cos w$

d) $j(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

3) Calcular

a) $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{x dx}{(2-x^2)^2}$

c) $\int_0^{\pi/4} \sqrt[4]{\cos 2x} \sin 2x dx$

d) $\int e^{\sin 2x} \cos 2x dx$

e) $\int (x^3 + 3)^{1/4} x^5 dx$ (sugerencia: considerar que $x^5 = x^3 \cdot x^2$)

4) Para calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y el grado de $p(x)$ es mayor o igual que el grado de $q(x)$, debe realizarse el cociente entre $p(x)/q(x)$ y si $c(x)$ es el cociente y $r(x)$ es el resto entonces $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int \left(c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) dx$ donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. Aplicar lo dicho para calcular

a) $\int \frac{x^3}{x+2} dx$

b) $\int_0^1 \frac{x^3 - x^2 - 2x + 4}{x-4} dx$

c) $\int \frac{3x+1}{2x-3} dx$

5) Calcular utilizando una descomposición en fracciones simples cuando sea necesario:

a) $\int \frac{dx}{x^3 - 9x}$

b) $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + x}$

c) $\int_{-2}^{-1} \frac{x}{2x^2 + 7x + 3} dx$

d) $\int_0^1 \frac{5x^2 + 9x + 9}{(x-4)(x+1)^3} dx$

e) $\int_0^1 \frac{4x^2 - x}{(x-2)^3} dx$

f) $\int_{-1}^0 \frac{4x^3 - 11x}{(2x-1)^2} dx$

Ejercicios adicionales

1- En cualquier punto de la gráfica de una función $y = f(x)$ se verifica $f'''(x) = 2$. Si se sabe que el punto $(1,3)$ pertenece a la gráfica de la función, que en dicho punto la recta tangente tiene pendiente -2 y que $f''(1) = 0$, hallar la función $f(x)$.

2- Calcular

$$a) \int \frac{4x+1}{(2x+3)^2} dx \quad b) \int \cos^3 \theta d\theta \quad c) \int \sin^4 t \cos^3 t dt$$

(sugerencias: en a) hacer la sustitución $u = 2x + 3$,

en b) y c) escribir $\cos^3 \theta = \cos^2 \theta \cos \theta = (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta$

3- Derivar el resultado para verificar que $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ y calcular $\int 2^{3x} dx$
(cuidado!, primero hacer la sustitución $u = 3x$)

$$4- \text{ Si } p(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x < 1 \\ 5 - 2\sin(\pi x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ y } p'(x) = \begin{cases} (x-1)^2 x + \sqrt[3]{x} & \text{si } x < 1 \\ -2\pi \cos(\pi x) & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ hallar}$$

$u(x)$ sabiendo que $p(x)$ es continua en $x = 1$

$$5- \text{Calcular } \int_{-1}^5 f(x) dx \text{ siendo } f(x) = \begin{cases} (3x+1)^{1/4} & \text{si } x \geq 0 \\ x^3(2-x^2)^{-4} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$6- \text{Calcular } a) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x - \cos^3 x} dx \quad b) \int \frac{\ln^4 x}{x(1 - \ln^2 x)} dx$$

7- Hallar $f(x)$ sabiendo que

$$a) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{25-3x}} \quad \text{con} \quad f(3) = \frac{1}{3}$$

$$b) f'(t) = t\sqrt{2-t} \quad \text{con} \quad f(2) = 1$$

$$c) f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x}} \quad \text{con} \quad f(0) = \frac{1}{5}$$

$$d) g'(x) = \frac{\sin x \cdot \cos x}{1+3\cos^2 x} \quad \text{con} \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$e) f'(x) = 3x^5 \cdot e^{x^3} \quad \text{con} \quad f(0) = -2$$

Respuestas de las Ejercicios

$$1) a) \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + k$$

$$b) x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + k$$

$$c) \frac{34}{27} \sin 6 + \frac{4}{9} \cos 6$$

$$d) \frac{4}{9} e^3 + \frac{2}{9}$$

$$e) 1$$

$$f) \pi$$

- 2) a) $-6(3-x)^{3/2} + \frac{12}{5}(3-x)^{5/2} - \frac{2}{7}(3-x)^{7/2} + k$ b) $\frac{\ln |2t+3|}{2} + \frac{\cos(5t^2)}{10} + k$
c) $\frac{1}{5}(e^{2w} \operatorname{sen} w + 2e^{2w} \cos w) + k$ d) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + k$
- 3) a) $1 - \frac{\pi}{4}$ b) 0 c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{e^{\operatorname{sen}(2x)}}{2} + k$ e) $\frac{4}{135} \sqrt[4]{(x^3+3)^5} \cdot (5x^3-12) + k$
- 4) a) $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8 \ln |x+2| + k$ b) $\frac{1}{6}(71 + 264 \ln 3 - 264 \ln 4)$
c) $\frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln |2x-3| + k$
- 5) a) $-\ln \sqrt[9]{x} + \ln \sqrt[18]{x^2-9} + k$ b) $\ln |x| - \ln |x+1| + \frac{1}{x+1} + k$
c) $\frac{1}{10}(6 \ln 2 + \ln 3)$ d) $\frac{1}{8}(-3 - 8 \ln 2 + 8 \ln 3 - 8 \ln 4)$
e) $\frac{1}{4}(9 - 16 \ln 2)$ f) $\frac{1}{6}(-7 + 12 \ln 3)$

Respuestas de los Ejercicios Adicionales

- 1) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + \frac{14}{3}$
- 2) a) $\ln |2x+3| + \frac{5}{2(2x+3)} + k$ b) $\operatorname{sen} \theta - \frac{\operatorname{sen}^3 \theta}{3} + k$ c) $\frac{\operatorname{sen}^5 t}{5} - \frac{\operatorname{sen}^7 t}{7} + k$
- 4) $u(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + \frac{25}{6}$
- 5) $\frac{653}{80}$
- 6) a) $\frac{1}{\cos x} - \ln |\cos x| + \ln |1 - \cos x| + k$ b) $-\frac{\ln^3 x}{3} - x \ln x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} \right| + k$
- 7) a) $f(x) = \frac{-2}{3} \sqrt{25-3x} + 3$ b) $f(t) = \frac{-4}{3}(2-t)^{3/2} + \frac{2}{5}(2-t)^{5/2} + 1$
c) $f(x) = 2\sqrt{1+x} \cdot \left[\frac{3}{5}(1+x)^2 - 2(1+x) + 3 \right] - 3$

d) $f(x) = \frac{-1}{6} \ln(1 + 3 \cdot \cos^2 x) - 1$ e) $f(x) = x^3 \cdot e^{x^3} - e^{x^3} - 1$

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

2017

**Práctico
Nº 10**

Funciones trigonométricas inversas: gráficas, derivadas y primitivas de arco seno , arco coseno y arco tangente. Método de fracciones simples cuyo denominador tiene al menos un par de raíces no reales. Inversas hiperbólicas.

Guía teórica**Función inversa del seno :**

Para que la función **seno** admita una función inversa es necesario restringir su dominio y hacer coincidir su codominio con el intervalo $[-1,1]$.

Si tomamos:

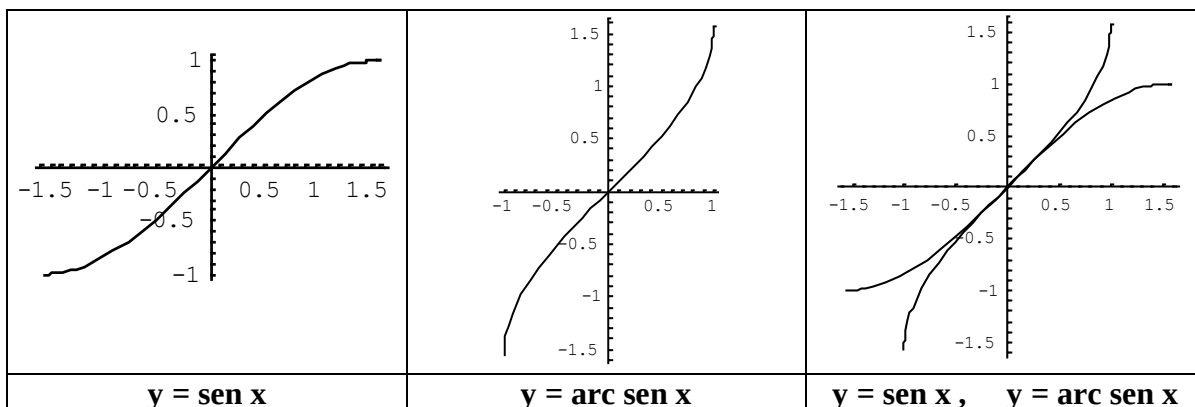
$$\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$$

entonces existe la función inversa, denominada arco seno, que se indica **arc sen** y resulta ser :

$$\text{arc sen} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

que verifica

$$\text{arc sen } x = y \leftrightarrow x = \text{sen } y$$

**Propiedades**

- 1- $\text{sen}(\text{arc sen } x) = x$ si $-1 \leq x \leq 1$ 2- $\text{arc sen}(\text{sen } x) = x$ si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- 3- $(\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ si $-1 < x < 1$

Función inversa del coseno :

Para que la función coseno admita una función inversa es necesario restringir su dominio y hacer coincidir su codominio con el intervalo $[-1,1]$. Si tomamos:

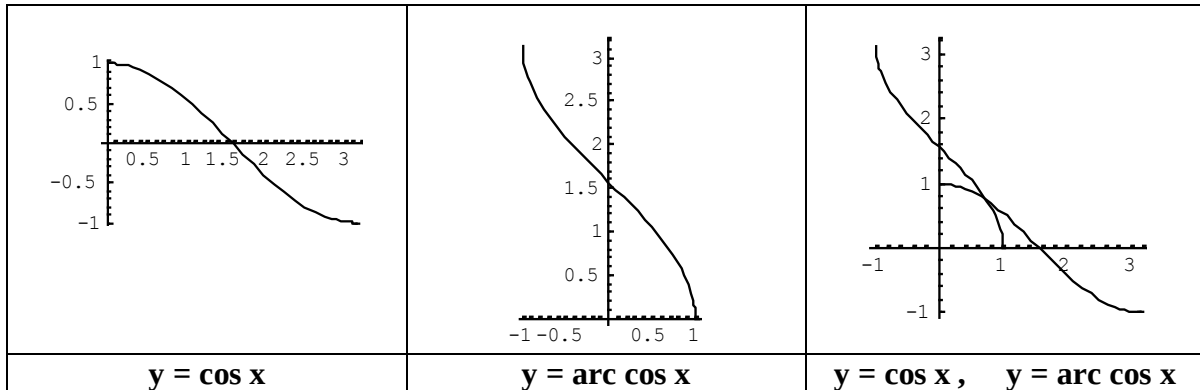
$$\text{cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

entonces existe la función inversa, denominada arco coseno, que se indica **arc cos** y resulta ser :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

que verifica

$$\arccos x = y \leftrightarrow x = \cos y$$



Propiedades:

$$1- \cos(\arccos x) = x \quad \text{si } -1 \leq x \leq 1 \quad 2- \arccos(\cos x) = x \quad \text{si } 0 \leq x \leq \pi$$

$$3- (\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{si } -1 < x < 1$$

Función inversa de la tangente :

Para que la función tangente admita una función inversa es necesario restringir su dominio .

Si tomamos:

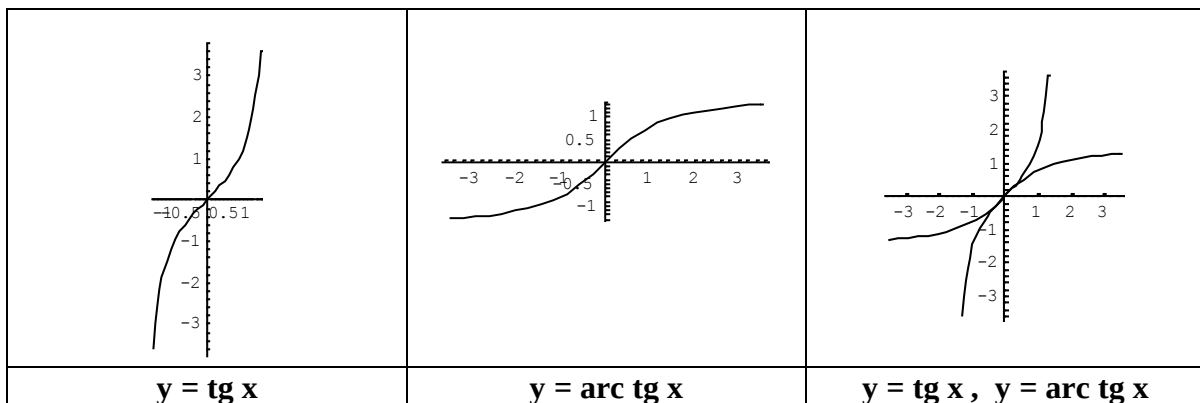
$$\operatorname{tg} : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

entonces existe la función inversa, denominada arco tangente, que se indica **arc tg** y resulta ser :

$$\operatorname{arc tg} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

que verifica

$$\operatorname{arc tg} x = y \leftrightarrow x = \operatorname{tg} y$$



Propiedades:

$$1- \operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} x) = x \quad \text{si } x \text{ es real} \quad 2- \operatorname{arc tg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$3- (\operatorname{arc tg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{si } x \text{ es real}$$

Integración de funciones racionales mediante fracciones parciales o fracciones simples

En el Práctico 8 ya se ha analizado la situación 1 y la situación 2, ahora vemos la tercera.

Situación 3 : $Q(x)$ tiene al menos un par de raíces complejas que no están repetidas y otras raíces, en cuyo caso $Q(x)$ tiene dos o más factores, donde al menos uno de ellos es un polinomio cuadrático irreducible que no está repetido.

Ejemplo 5: $\int \frac{x^2 - 2x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$ Como el denominador tiene dos factores, uno cuadrático irreducible (no tiene raíces reales) y otro lineal, proponemos la siguiente descomposición en fracciones simples (observar que en el numerador del factor cuadrático, se propone un polinomio completo de primer grado):

$$\frac{x^2 - 2x}{(x^2 + 4)(x - 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{x - 1}$$

Para obtener los valores de A , B y C se multiplican ambos miembros por $(x^2 + 4)(x - 1)$ obteniendo:

$$x^2 - 2x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 4)$$

operando en el segundo miembro y escribiéndolo en la forma usual obtenemos:

$$x^2 - 2x = (A + C)x^2 + (-A + B)x + (-B + 4C)$$

para que los dos polinomios sean iguales, deben ser iguales sus coeficientes, por lo tanto :

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ -A + B = -2 \\ -B + 4C = 0 \end{cases} \quad \text{cuya solución es} \quad \begin{matrix} A = 6/5 \\ B = -4/5 \\ C = -1/5 \end{matrix} \quad \text{entonces:}$$

$$\int \frac{x^2 - 2x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx = \int \left(\frac{6/5x - 4/5}{(x^2 + 4)} + \frac{-1/5}{(x - 1)} \right) dx = \int \left(\frac{6}{5} \frac{x}{(x^2 + 4)} - \frac{4}{5} \frac{1}{(x^2 + 4)} - \frac{1}{5} \frac{1}{(x - 1)} \right) dx =$$

$$\frac{3}{5} \ln(x^2 + 4) - \frac{2}{5} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{5} \ln|x - 1| + C$$

donde las últimas primitivas se encuentran haciendo sustituciones adecuadas.

Ejemplo 6: $\int \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 1)} dx$, en este caso los dos factores del denominador tienen raíces complejas, la propuesta por fracciones simples es:

$$\frac{x^3 + 1}{(x^2 + 2x + 5)(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 5} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Operando como siempre se pueden determinar las 4 constantes A , B , C y D y luego haciendo sustituciones adecuadas se pueden encontrar sus primitivas.

Ejemplo 7: $\int \frac{2x+1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$. El denominador tiene un factor lineal: x ; un factor lineal repetido: $(x+1)^2$ y un factor cuadrático: x^2+x+1 , que es irreducible por tener raíces complejas.

Proponemos la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2x+1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

Como vemos es una combinación de las situaciones anteriores. En este se obtendrá un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas que permitirán encontrar el valor de las constantes, para luego usando sustituciones adecuadas encontrar las primitivas de cada una.

Función inversa del seno hiperbólico:

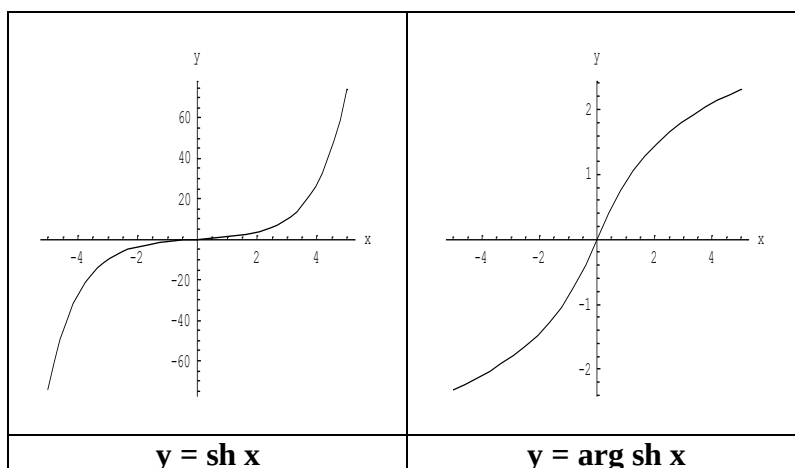
Como la función **seno hiperbólico** es creciente para todo x entonces admite función inversa, a la que se denomina **argumento seno hiperbólico**, que se indica **arg sh**.

$$\text{sh} : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$$

$$\text{arg sh} : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\infty, \infty)$$

que verifican

$$\text{arg sh } x = y \leftrightarrow x = \text{sh } y$$



Propiedades

$$1- \text{sh}(\text{arg sh } x) = x$$

$$2- \text{arg sh}(\text{sh } x) = x$$

$$3- (\text{arg sh } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Función inversa del coseno hiperbólico :

Para que la función coseno hiperbólico admita una función inversa es necesario restringir su dominio y hacer coincidir su codominio con el intervalo $[1, \infty)$.

Si tomamos:

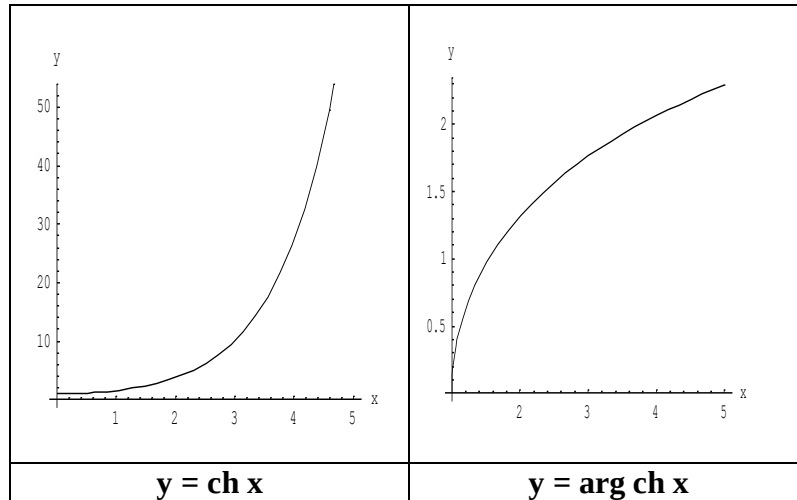
$$\text{ch} : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$$

entonces existe la función inversa, denominada **argumento coseno hiperbólico**, que se indica **arg ch** y resulta ser :

$$\text{arg ch} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

que verifica

$$\text{arg ch } x = y \leftrightarrow x = \text{ch } y$$



Propiedades

- 1- $\text{ch}(\text{arg ch } x) = x$ si $1 \leq x < \infty$ 2- $\text{arg ch}(\text{ch } x) = x$ si $0 \leq x < \infty$
- 3- $(\text{arg ch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ si $1 < x < \infty$

Ejercicios

- 1) Usando la calculadora verificar que:
 $\text{arc sen}(\text{sen } 2) \neq 2$, $\text{arc cos}(\text{cos } 2) = 2$ Explicar por qué.
- 2) Hallar el dominio y la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = x \cdot \text{arc cos} \sqrt{4x+1}$
 $h(x) = \frac{1}{\text{arc tg}[(x+1)]^{3/2}}$, $j(x) = \text{arc sen}(\text{tg } x)$
- 3) Calcular usando una aproximación lineal $\text{arc cos}(0,53)$ (Recordar: $\text{cos}(\pi/3) = 0,5$)
- 4) Hallar usando derivación implícita la pendiente de la recta tangente a la curva
 $8x^2 + 4 \text{arc tg}(\sqrt{xy}) + y^3 = 10 + \pi$ en el punto $(1/2, 2)$
- 5) Calcular:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

b) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$

c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\text{sen}^2 x}} dx$

d) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$
- 6) Calcular

a) $\int \text{arcsen}(3x) dx$

b) $\int \text{arctg}(ax) dx$
- 7) Calcular:

a) $\int \frac{3}{x^2 + 25} dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2 - 2t + 5}$

c) $\int \frac{3x+2}{x^2+4} dx = \int \frac{3x}{x^2+4} + \frac{2}{x^2+4} dx$

d) $\int \frac{3x+8}{x^2+2x+5} dx = \int \frac{3(x+1)+5}{(x+1)^2+4} dx$

8) Las tablas de integrales indican que para $a > 0$ valen los siguientes resultados:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsen\left(\frac{u}{a}\right) + C \quad \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

- a) Justificar los resultados anteriores mediante derivación de los resultados.
b) Calcular las siguientes integrales usando los resultados anteriores (cuidado!!! Primero hay que hacer una sustitución)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} \quad \int \frac{dx}{36x^2 + 25} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{16 - (x - 3)^2}}$$

9) Justificar que la función $f(x) = x + \arcsen\left[\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right] + \arccos\left[\sen\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ es constante y determinar el valor de la constante, suponer que $0 \leq x \leq \pi$

10) Justificar que $\arctg(e^{2x}) + \arctg(e^{-2x}) = \text{constante}$ y determinar el valor de la constante

$$11) \text{ Calcular } a) \int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 + 1} dx \quad b) \int \frac{x^4 - x^2}{x^2 + 4x + 5} dx$$

(como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, comenzar dividiendo ambos polinomios y recordar que $\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{resto}}{\text{divisor}}$)

12) Calcular el área de la región limitada por $y = \arcsen x$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \pi/3$

13) Si $g'(x) = x \arctg(2x)$, hallar $g(x)$ sabiendo que $g(\frac{1}{2}) = \pi$

$$14) \text{ Calcular } a) \int \frac{1}{(x-3)^2 + 16} dx \quad b) \int \frac{x}{(x+2)^2 + 9} dx$$

$$15) \text{ Calcular } a) \int_1^2 \frac{x-1}{x^4 + 9x^2} dx \quad b) \int \frac{4x+10}{x(x^2+6x+10)} dx \quad c) \int \frac{2x^2-6x+8}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$$

16) La gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$ divide al cuadrado $-3 \leq x \leq 1$; $-2 \leq y \leq 2$ en tres zonas. Calcular el área de cada una de ellas.

17) Considerando las siguientes funciones $f(x) = \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ y $g(x) = \arctg x$:

a) Justificar que $f'(x) = g'(x)$

b) Justificar que si $x > -1$, entonces $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{4}$

c) Justificar que si $x < -1$ entonces $f(x) = g(x) + \frac{3}{4} \cdot \pi$

18) Hallar el dominio y la derivada de las siguientes funciones: $f(x) = x \cdot \arg \operatorname{sh} \sqrt{4x+1}$,
 $g(x) = \arg \operatorname{ch}(2 + \cos 4x)$, $j(x) = \arg \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)$

19) Calcular:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}$ b) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^4}}$ c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9+\operatorname{sen}^2 x}} dx$ d) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{-x} \, dx}{\sqrt{1+e^{-2x}}}$

20) Justificar las siguientes igualdades

a) $\arcsen(\cos 4x) = -4x + \frac{\pi}{2}$ si $x \in (0; \frac{\pi}{4})$

b) $\arcsen(\cos 4x) = 4x + \frac{\pi}{2}$ $x \in (-\frac{\pi}{4}; 0)$

Respuestas de los Ejercicios

1) Se recomienda considerar los respectivos dominios e imágenes.

2)

Función	Dominio	Derivada
$f(x) = x \cdot \arccos \sqrt{4x+1}$	$\left[-\frac{1}{4}, 0\right]$	$f'(x) = \arccos \sqrt{4x+1} - \frac{x}{\sqrt{-x-4x^2}}$
$h(x) = \frac{1}{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1)^{3/2}}$	$(-1; +\infty)$	$h'(x) = \frac{-3(x+1)^{1/2}}{[\operatorname{arctg}(x+1)^{3/2}]^2 \cdot 2 \cdot [1+(x+1)^3]}$
$j(x) = \operatorname{arc} \operatorname{sen}(\operatorname{tg} x)$	$\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$	$j'(x) = \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}$

3) 1,012556

4) $-\frac{4}{5}$

5) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{3} \operatorname{arc} \operatorname{sen}(3x) + C$

b) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{sen}(x^2) + C$

c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\operatorname{sen}^2 x}} dx = \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3}\right) + C$

d) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{-x} \, dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = \operatorname{arc} \cos \frac{1}{3} - \arccos \frac{1}{2}$

6) a) $\int \operatorname{arcsen}(3x) \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{sen}(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C$

$$b) \int \arctg(ax) dx = x \arctg(ax) - \frac{\ln(1+a^2 x^2)}{2a} + C$$

$$7) \quad a) \int \frac{3}{x^2+25} dx = \frac{3}{5} \arctg\left(\frac{x}{5}\right) + C \quad b) \int_{-1}^1 \frac{dt}{t^2-2t+5} = \frac{\pi}{8}$$

$$c) \int \frac{3x+2}{x^2+4} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+4) + \arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$d) \int \frac{3x+8}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) + \frac{5}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

$$8) \int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{2x}{3}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{36x^2+25} = \frac{1}{30} \arctg\left(\frac{6x}{5}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-3)^2}} = \arcsen\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$$

$$9) \text{ constante } k = \pi$$

$$10) \text{ constante } k = \frac{\pi}{2}$$

$$11) \quad a) \int \frac{x^3-x+1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} - \ln(1+x^2) + \arctg x + C$$

$$b) \int \frac{x^4-x^2}{x^2+4x+5} dx = 10x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} - 10 \arctg(2+x) - 10 \ln(5+4x+x^2) + C$$

$$12) 0,104226$$

$$13) \quad g(x) = \frac{x^2}{2} \arctg(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \arctg(2x) + \frac{1}{8} + \frac{15}{16} \pi$$

$$14) \quad a) \int \frac{1}{(x-3)^2+16} dx = \frac{1}{4} \arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C$$

$$b) \int \frac{x}{(x+2)^2+9} dx = -\frac{2}{3} \arctg\left(\frac{x+2}{3}\right) + \frac{1}{2} \ln(13+4x+x^2) + C$$

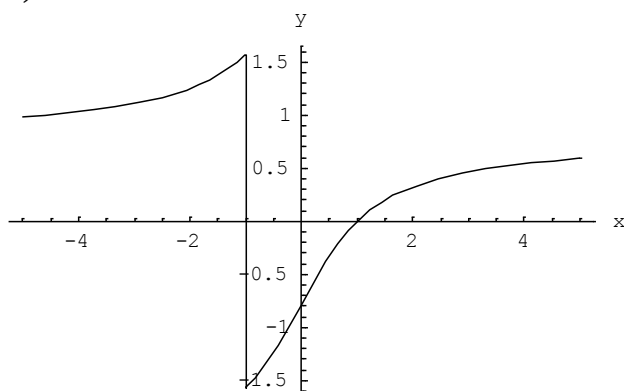
$$15) \quad a) \int_1^2 \frac{x-1}{x^4+9x^2} dx = 0,0167462$$

$$b) \int \frac{4x+10}{x(x^2+6x+10)} dx = \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+6x+10) + \arctg(3+x) + C$$

$$c) \int \frac{2x^2-6x+8}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = 2 \arctg x - \ln(1+x^2) + \ln(4+x^2) + C$$

16) Zona 1= $1 - \ln 2$; Zona 2 = $5 - \ln 6$; Zona 3 = $10 + \ln 12$

17)



18)

Función	Dominio	Derivada
$f(x) = x \cdot \arg \operatorname{sh} \sqrt{4x+1}$	$\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$	$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+4x}\sqrt{2+4x}} + \arg \operatorname{sh} \sqrt{1+4x}$
$g(x) = \arg \operatorname{ch}(2 + \cos 4x)$	$\mathbb{R}$	$g'(x) = \frac{-4 \operatorname{sen}(4x)}{\sqrt{1+\cos(4x)}\sqrt{3+\cos(4x)}}$
$j(x) = \arg \operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \operatorname{con} k \in \mathbb{Z} \right\}$	$j'(x) = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$

19) a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}} = \frac{1}{3} \arg \operatorname{sh}(3x) + C$

b) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \arg \operatorname{sh} x^2 + C$

c) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9+\operatorname{sen}^2 x}} dx = \arg \operatorname{sh}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{3}\right) + C$

d) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^{-x} \, dx}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = -\arg \operatorname{sh} \frac{1}{3} + \arg \operatorname{sh} \frac{1}{2}$

UNQ - Departamento de Ciencia y Tecnología

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

2017

**Práctico
Nº 11**

Aplicaciones de la derivada: Regla de L'Hospital y Problemas de máximos y mínimos.

Aplicaciones de la integral: Cálculo de volúmenes

Guía teóricaRegla de L'Hospital(indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ para $x \rightarrow x_0$)Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ y $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un entorno reducido de x_0 ,y $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno reducido y existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y vale L entonces existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y también vale L , es decir $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ para $x \rightarrow \infty$)Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ y $f(x)$ y $g(x)$ son derivables para $x > M$ y $g'(x) \neq 0$ para x $> M$ y existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y vale L entonces existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y también vale L , es decir $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ para $x \rightarrow x_0$)Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm \infty$ y $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en un entorno reducido de x_0 y $g'(x) \neq 0$ en dicho entorno reducido y existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y vale L entonces existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y también vale L , es decir $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ (indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ para $x \rightarrow \infty$)Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm \infty$ y $f(x)$ y $g(x)$ son derivables para $x > M$ y $g'(x) \neq 0$ para $x > M$, y existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ y vale L entonces existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ y también vale L , esdecir $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Ejercicios

1) Evaluar aplicando la regla de L'Hospital cuando sea posible.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x + x^2}$

b) $\lim_{t \rightarrow \pi} \frac{5\sin^2 t}{1 + \cos t}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cot g 2x}{\cot g x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln \sqrt{x}}{x - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2} - e^{2x}}{x - 2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln 2x}{\ln 3x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot g x - \operatorname{cosec} x)$

k) $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{\frac{1}{x-1}}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x + 1} \right)^x$

ll) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - \frac{1}{x}}{e^x + \frac{1}{x}}$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x}$

n) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\ln(1 + \cos x)} \right)$

2) a) Justificar que para $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, vale $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$

b) Justificar que si k es un número real mayor que 0 , vale $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0$

3) Calcular, si existen, las asíntotas horizontales y verticales de las funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = \frac{\ln(x-4)}{(x-5)} + \frac{1}{x(x-5)}$

4) ¿Es posible aplicar la regla de L'Hopital en los siguientes casos?. ¿Por qué?

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x}$

5) a) Hallar dos números no negativos cuya suma sea **36** y su producto sea máximo.

b) Hallar dos números no negativos cuyo producto sea **36** y su suma sea mínima.

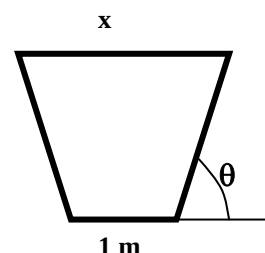
6) Encontrar el punto de la gráfica de $y = x^2 + 1$ más cercano al punto **(5,0)**. ¿Tiene sentido encontrar el más alejado?

7) Demostrar que entre todos los rectángulos que pueden inscribirse en una circunferencia de radio conocido R , el cuadrado es el que tiene el área máxima. Demostrar que el cuadrado es también el que tiene el perímetro máximo.

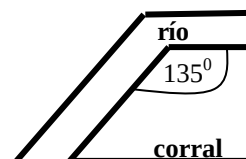
8) Una recta pasa por el punto **(4,3)** y determina con los ejes coordenados un triángulo en el primer cuadrante. Hallar la pendiente de la recta que determina el triángulo de área mínima.

- 9) Se desea construir un tanque rectangular sin tapa y con una capacidad de 60 m^3 , de modo que el largo de la base sea el doble del ancho de la base. Determinar las dimensiones del tanque más económico sabiendo que el material de la base cuesta \$10 el m^2 y el material de los laterales cuesta \$6 el m^2 .
- 10) Determinar el punto de la gráfica de $y = 5x^2 - 9x^{5/3} + x$ en que la recta tangente tenga pendiente mínima.
- 11) Un rectángulo de perímetro P gira alrededor de uno de sus lados para generar un cilindro circular recto. Calcular la longitud de los lados del rectángulo que determina el cilindro de máximo volumen. (Recordar que el volumen de un cilindro es el producto del área de la base por la altura)
- 12) Los márgenes superior e inferior de una página impresa deben ser de 1 cm y los márgenes laterales de 2 cm cada uno. El área de la sección impresa debe ser de 32 cm^2 . Determinar las dimensiones de la página de manera que se utilice la menor cantidad de papel.

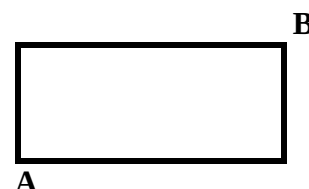
- 13) Un canal de riego tendrá una sección transversal con forma de trapecio isósceles, con tres lados de longitud 1 m. (ver figura). Hallar las dimensiones para que tenga volumen máximo (el volumen es máximo cuando el área de la sección es máxima). Resolver el ejercicio de dos maneras, expresando el área:
- a) en función de x b) en función de θ



- 14) Se desea construir un corral como indica la figura: dos lados bordeados por el río y los otros dos por 1000 metros de cerco. Hallar las dimensiones del corral de área máxima.



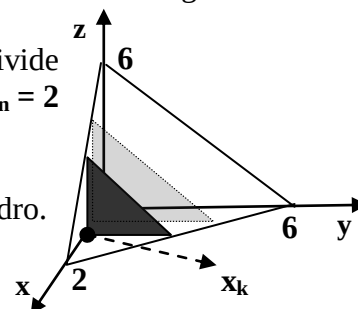
- 15) Un nadador está en el punto A del borde de una pileta de 90 metros de largo por 50 metros de ancho y desea ir al punto B, nadando hasta un punto P del borde opuesto y caminando luego desde P hasta B. Si nada a 100 pies por minuto y camina a 150 pies por minuto, ¿a qué punto P se debe dirigir para minimizar el tiempo de recorrido?



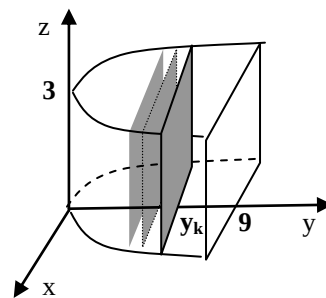
- 16) Una tetraedro (pirámide de base triangular) tiene tres caras perpendiculares entre sí y su base es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 2 cm y 6 cm de longitud. Si se corta el tetraedro con planos perpendiculares al eje x se obtienen triángulos isósceles (como los sombreados). Calcular el área del triángulo sombreado correspondiente al valor x_k y observar que si se divide el intervalo $[0,2]$ en n trozos: $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = 2$ y $A(x_k)$ es el área del triángulo que pasa por x_k entonces

$$\sum_{k=1}^n A(x_k) \Delta x_k \text{ da una aproximación del volumen del tetraedro.}$$

Calcular el volumen exacto del tetraedro.



- 17) La base de un sólido es la región del plano xy limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2$, $y = 9$. Si se corta el sólido con planos perpendiculares al eje y , se obtienen rectángulos de altura 3 (como los sombreados). Calcular el área del rectángulo sombreado correspondiente al valor $y = y_k$, plantear una aproximación del volumen del sólido y calcular el volumen exacto del sólido.



- 18) a) Si se hace girar la figura limitada por $x = -2$, $x = 0$, $y = 0$, $y = x^2 + 1$, alrededor del eje x se obtiene un sólido, graficarlo y calcular su volumen.
b) Calcular el volumen del sólido que se obtiene haciendo girar la figura anterior alrededor del eje y .
- 19) Calcular el volumen de una esfera de radio a . (girar una semicircunferencia de radio a respecto a un eje coordenado)
- 20) a) Si se hace girar el triángulo determinado por las rectas $y = x$, $y = 0$, $y = 6 - 2x$ alrededor del eje x se obtiene un sólido, graficarlo y calcular su volumen.
b) Calcular el volumen del sólido que se obtiene haciendo girar el triángulo anterior respecto al eje y .
- 21) Si la base de un sólido es un círculo de radio 4 y las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos equiláteros. hallar su volumen.
- 22) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región R alrededor del eje indicado. Graficar.
- $R = \begin{cases} x + y = 1 \\ y = x + 1 \\ x = 2 \end{cases}$ a) alrededor del eje y b) alrededor de $y = -2$
- 23) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región comprendida entre $y = x^2$ e $y = 4$ alrededor de: (Graficar)
- a) $y = 4$ b) eje x c) $y = 5$ d) $x = 2$

Respuestas de los Ejercicios

- 1) a) $\frac{1}{3}$ b) 10 c) d) $\frac{1}{2}$
e) $2e^4$ f) 1 g) $-\frac{1}{2}$ h) 1
i) 1 j) 0 k) e l) $e^{-1/3}$
ll) 1 m) 1 n) $-\frac{1}{2}$
- 3) a) $x = 0$ $y = 0$
b) $x = 4$ $x = 5$ $y = 0$

4) a) no
b) 1

5) a) 18 18
b) 6 6

6) (1, 2)

8) $-\frac{3}{4}$

9) 3 m, 6 m, $\frac{30}{9}$ m

10) (1, -3)

11) $\frac{P}{3}$ y $\frac{P}{6}$

12) 6 cm por 12 cm

13) $\theta = \frac{\pi}{3}$ $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $x = 2$

14) $\frac{1000}{3}$ m por $\frac{2000}{3}$ m

15) 44,72

17) 324

18) a) $\pi (x^2 + 1)^2$ b) $\frac{23}{2}\pi$

19) $\frac{4}{3}\pi a^3$ 20) $\frac{76}{3}\pi$ 21) $\frac{256}{3}\sqrt{3}$

22) a) $\frac{8}{3}\pi$ b) 24π

23) a) $\frac{512}{15}\pi$ b) $\frac{256}{5}\pi$ c) $\frac{832}{15}\pi$ d) $\frac{128}{3}\pi$