

Práctica 4:

Integrales dobles-Teorema de Green

Profesor: Cecilia Jarne (adaptada a partir de la práctica de Marcos Sirchia)

- Calcular las siguientes integrales iteradas y representar gráficamente el recinto de integración:
 - $\int_1^2 [\int_0^3 [x+y] dx] dy$
 - $\int_0^2 [\int_0^{x^2} [2x-2y] dy] dx$
 - $\int_0^2 [\int_{x^2}^4 [x] dy] dx$
 - $\int_{-1}^1 [\int_{-1}^{y-1} [xy] dx] dy$
 - $\int_{-1}^2 [\int_{y^2-2}^{\sqrt{8-y^2}} [2x] dx] dy$
 - $\int_{-2}^1 [\int_{1-x}^{2-x^2} [3] dy] dx$
- Representar gráficamente los recintos $\mathbf{R}$ que se dan a continuación y calcular de dos maneras distintas la integral iterada de $f(x, y)$ sobre $\mathbf{R}$ (límites constantes para x y variables para y , y viceversa).
 - $\mathbf{R}$ limitado por $y = x^2$, $y = x$, $f(x, y) = 2x - 3$.
 - $\mathbf{R}$ es el triángulo limitado por las rectas $y = 2x - 3$, $y = -1$, $y = x$, $f(x, y) = 2$.
 - $\mathbf{R}$ limitado por la curva: $\vec{r}(t) = 2\cos(\pi t)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\pi t)\hat{\mathbf{j}}$, con $0 \ll t \ll 2\pi$ y $f(x, y) = xy$.
- Calcular $\int \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy$ mediante integrales iteradas:
 - $f(x, y) = e^x$, $\mathbf{R}$ limitado por $y = x + 1$, $y = 0$, $x = 1$.
 - $f(x, y) = |xy|$, $\mathbf{R}$ limitado por $y = x^2$, $y + 2 = x$.
- Calcular el área de los recintos que se indican a continuación usando integrales dobles:
 - R_1 es el triángulo limitado por las rectas $y = -2x + 4$, $x = 0$ e $y = 2x$.
 - R_2 es el triángulo limitado por las rectas $y = x^2$, $y = x^2 - 1$ e $y = 1$.
- Plantear las seis integrales dobles que permiten calcular el volumen del sólido limitado por $x + 2y + 3z = 6$ y los tres planos coordenados. Resolver al menos dos.
- Si $\mathbf{V}$ es el sólido limitado por las superficies que se indican en cada caso, describir la proyección de $\mathbf{V}$ sobre los tres planos coordenados y calcular, usando integrales dobles, el volumen de $\mathbf{V}$ considerando su proyección sobre el plano x, y . Verificar el resultado obtenido considerando la proyección de $\mathbf{V}$ sobre los otros dos planos coordenados.
 - $x + z = 2$, $z = 0$, $y = 0$, $y = x$
 - $y = x^2$, $z + 2y = 2$, $z = 0$
- Plantear en coord. polares la integral: $\int \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx dy$ Siendo $\mathbf{R} = \{(x, y)/x^2 + y^2 \ll 4, x \ll y\}$.
- Pasar a coordenadas polares y calcular:
 - $\int_{-a}^0 [\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} [y] dy] dx$
 - $\int_0^1 [\int_1^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{x} dx] dy$
- Calcular $\int \int_{\mathbf{R}} y dx dy$ siendo $\mathbf{R}$ la región $x^2 + (y - 1)^2 \ll 1$ con $x \gg 0$
 - Usando coordenadas polares
 - Usando $x = r \cos(\theta)$, $y - 1 = r \sin(\theta)$
- Calcular el volumen del solido $V_1 = \{(z, y, z)/1 \ll z \ll 4 - y^2\}$ y graficarlo.

11. Comprobar que en los siguientes ejercicios puede aplicarse el teorema de Green y verificarlo:
- $P(x, y) = 2x - y$, $Q(x, y) = x^2$, $\mathbf{R}$ limitada por $y = x^2 - 3$, $y = 6$
 - $P(x, y) = 2$, $Q(x, y) = y(x - 1)$, $C : (x - 1)^2 + y^2 = 1$
12. Calcular las siguientes integrales usando el teorema de Green de ser posible. Considerar todas las curvas recorridas en sentido antihorario.
- $\oint_C (x - y)dx + x^2 dy$, $C : |x| + |2y| = 2$
 - $\oint_C (2x^2 + 2y)dx + dy$, C es la frontera del triángulo de vértices $(1,1)$, $(2,3)$, $(0,4)$.
13. Dado el campo vectorial: $\vec{G}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{i}} + \frac{x}{x^2 + y^2} \hat{\mathbf{j}}$
- Demostrar que $\oint_C \vec{G} \cdot d\vec{r} = 0$ Para toda curva cerrada C_1 suave por tramos que no contenga el origen.
 - Calcular $\oint_{C_2} \vec{G} \cdot d\vec{r}$ siendo $C_2 : x^2 + y^2 = 1$
 - Puede decir cuanto vale $\oint_{C_3} \vec{G} \cdot d\vec{r}$ siendo C_3 cualquier curva cerrada que contiene al origen? Justificar la respuesta.
14. Calcular el area de las siguientes regiones planas usando integrales de línea
- $R_1 = \{(x, y) / b^2 x^2 + a^2 y^2 \ll a^2 b^2\}$
 - $R_2 = \{(x, y) / x^2 + y^2 \ll 2, x^2 + (y - 1)^2 \gg 1\}$
15. Dado $\vec{F}(x, y) = ((x - 1)^2 + y^2)^{-1}(-y\hat{\mathbf{i}} + (x - 1)\hat{\mathbf{j}})$ y la region $\mathbf{R}$ limitada por las curvas $C_1 : (x - 1)^2 + y^2 = 1$ y $C_2 : 9(x - 1)^2 + 4y^2 = 36$
- Calcular $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ y calcular $\int \int_R \text{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{\mathbf{k}} dx dy$, (usar el teorema de Green de ser posible)
 - Calcular $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ teniendo en cuenta los resultados obtenidos en a).