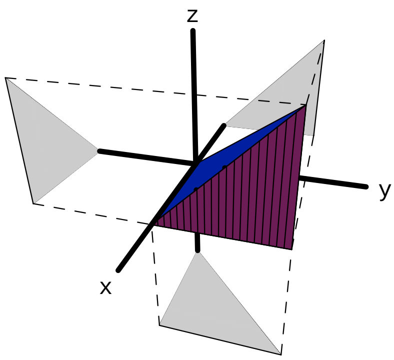
INTEGRALES TRIPLES.

46. Dada la integral $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z)\,dzdydx$, dibujar la región de integración y escribir la integral de todas las formas posibles.

Solución



Teniendo en cuenta la gráfica adjunta, si D_1, D_2 y D_3 son las proyecciones sobre los tres planos coordenados, las diferentes formas de escribir la integral son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} dxdy \int_0^y f\,dz &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f\,dz = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^y f\,dz,\\
\iint_{D_2} dxdz \int_z^x f\,dy &= \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_z^x f\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x f\,dy,\\
\iint_{D_3} dydz \int_y^1 f\,dx &= \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_y^1 f\,dx = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_y^1 f\,dx.
\end{aligned}$$

---

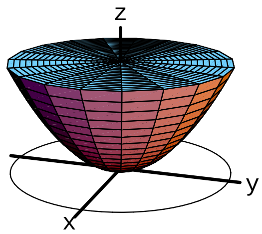
47. Calcular las siguientes integrales triples:

i) $\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, donde V está limitado por las superficies $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

ii) $\iiint_W (1+z^2)\,dxdydz$, siendo W la región limitada por $2az=x^2+y^2$, $x^2+y^2-z^2=a^2$, $z=0$.

Solución

i) La región de integración es el interior del paraboloide limitado por el plano $z = 2$.



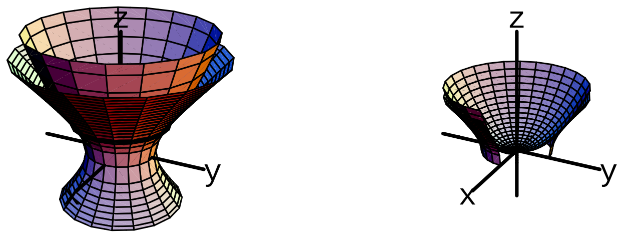
Como la proyección de dicha región sobre el plano $z = 0$ es el círculo $C : x^2 + y^2 \leq 4$, la integral triple se puede descomponer entonces como

$$I = \iint_C dxdy \int_{(x^2+y^2)/2}^{2} (x^2 + y^2)\, dz.$$

Al escribir la integral en coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^2 u\, du \int_{u^2/2}^{2} u^2\, dz = 2\pi \int_0^2 u^3 \cdot (2 - u^2/2)\, du = \frac{16\pi}{3}.$$

ii) La intersección del paraboloide $2az = x^2 + y^2$ con el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ da la circunferencia $x^2 + y^2 = 2a^2$ situada en el plano $z = a$. Esto indica que ambas superficies son tangentes a lo largo de dicha circunferencia; por ello deducimos que la región de integración está limitada superiormente por el paraboloide, inferiormente por el plano $z = 0$ y lateralmente por el hiperboloide (en la figura se muestran dos vistas de la región de integración).



Debemos descomponer la integral en dos sumandos pues, si (x, y) está en el círculo de centro el origen y radio a, entonces z está comprendido entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $2az = x^2 + y^2$ y, si (x, y) está entre el círculo anterior y el círculo de radio $a\sqrt{2}$, entonces z está comprendido entre el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ y el paraboloide anterior.

La fórmula que se obtiene es pues

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dxdy \int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} (1 + z^2)\, dz \\ &\quad + \iint_{a^2 \leq x^2+y^2 \leq 2a^2} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}^{\frac{x^2+y^2}{2a}} (1 + z^2)\, dz. \end{aligned}$$

Para resolver las integrales, las escribimos en coordenadas cilíndricas. Así,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^a u\,du \int_0^{u^2/2a} (1+z^2)\,dz + \int_0^{2\pi} dv \int_a^{a\sqrt{2}} u\,du \int_{\sqrt{u^2-a^2}}^{u^2/2a} (1+z^2)\,dz \\ &= \cdots = (10+a^2)\pi a^3/30. \end{aligned}$$

[Todas las integrales a resolver son casi inmediatas.]

---

48. Calcular $\iiint_S (1+x+y+z)^{-3}\,dxdydz$, donde S es el tetraedro limitado por los tres planos coordenados y el plano de ecuación $x+y+z=1$.

Solución

Si llamamos D a la proyección de la región de integración sobre el plano XY, podemos escribir la integral como

$$I = \iint_D \Big(\int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\,dz \Big) dxdy.$$

Como, a su vez, D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, la integral se descompone en las siguientes integrales iteradas:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3}\,dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \Big[-\frac{y}{8} + \frac{(1+x+y)^{-2}}{2} \Big] dy \\ &= \int_0^1 \Big[\frac{x-1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+x)} \Big] dx = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

---

49. Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

i) $a^2 = x^2+z^2,\ x+y=\pm a,\ x-y=\pm a.$

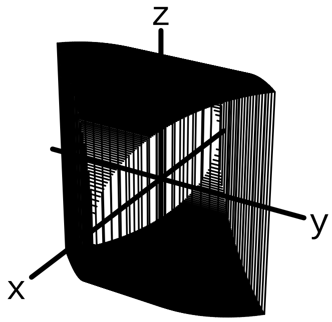
ii) $z = x^2+y^2,\ xy=a^2,\ xy=2a^2,\ y=x/2,\ y=2x,\ z=0.$

iii) $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} + \sqrt{\dfrac{z}{c}} = 1,\ x,y,z \ge 0.$

iv) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2},\ (z>0).$

Solución

i) La región a considerar es el interior del cilindro $a^2 = x^2+z^2$ cortado por los cuatro planos $x+y=a$, $x+y=-a$, $x-y=a$, $x-y=-a$.

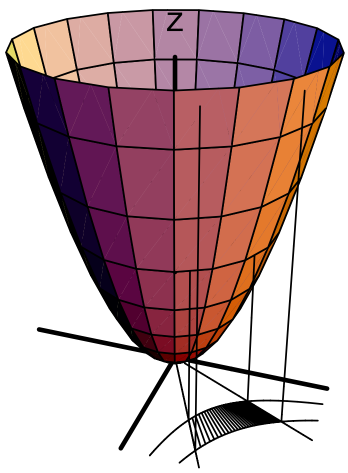


Como la proyección del sólido sobre el plano XY es el cuadrado R limitado por las rectas $x+y=a$, $x+y=-a$, $x-y=a$, $x-y=-a$, el volumen se calcula por la fórmula

$$\begin{aligned} V &= \int_R dxdy \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 2\int_R \sqrt{a^2-x^2}\,dxdy \\ &= 2\int_{-a}^{0} dx \int_{-x-a}^{x+a} \sqrt{a^2-x^2}\,dy + 2\int_0^a dx \int_{x-a}^{-x+a} \sqrt{a^2-x^2}\,dy = 2a^3\pi - 8a^3/3. \end{aligned}$$

[Para calcular las integrales se puede hacer alguna sustitución trigonométrica.]

ii) El sólido consiste en la región limitada entre el plano XY y el paraboloide $z=x^2+y^2$ y cuya proyección sobre el plano XY es la región R limitada por las curvas $xy=a^2$, $xy=2a^2$, $y=x/2$, $y=2x$ (en realidad la región es unión de dos regiones, una de ellas en el primer cuadrante y otra en el tercer cuadrante; como las regiones tienen la misma área y la función $z=x^2+y^2$ es simétrica, bastará multiplicar por dos el resultado obtenido al considerar únicamente la parte del primer cuadrante).



Podemos pues escribir el volumen como:

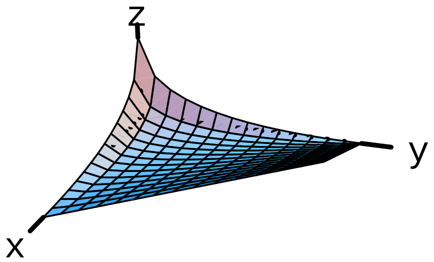
$$V = 2\iint_R dxdy \int_0^{x^2+y^2} dz = \iint_R (x^2+y^2)\, dxdy.$$

Para calcular la integral doble sobre la región R, realizamos el cambio de variables dado por las ecuaciones $xy = u$, $x/y = v$.

Este cambio hace que $\left|J\Big(\dfrac{x,y}{u,v}\Big)\right| = \dfrac{1}{2v}$ y que la nueva región de integración sea $R' = \{(u,v) : a^2 \le u \le 2a^2,\ 1/2 \le v \le 2\}$. El volumen se calcula entonces como

$$V = 2\int_{a^2}^{2a^2} du \int_{1/2}^{2} \big(uv + \frac{u}{v}\big)\cdot \frac{1}{2v}\, dv = \frac{9a^4}{2}.$$

iii) El sólido está ahora comprendido entre la función dada y los planos coordenados.



Su proyección sobre el plano XY es la región R del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y la astroide de ecuación $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$, de modo que el volumen es sencillamente

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \int_0^{c(1-\sqrt{x/a}-\sqrt{y/b})^2} dz \\ &= \int_0^a dx \int_0^{b((1-\sqrt{x/a})^2} c(1-\sqrt{x/a}-\sqrt{y/b})^2\, dy = \frac{abc}{90}. \end{aligned}$$

[Todas las integrales son inmediatas.]

iv) Ahora el sólido es la región limitada superiormente por el elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ e inferiormente por el cono $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, por encima del plano XY. Como la intersección de ambas superficies es la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1/2$, situada en el plano $z = c/\sqrt{2}$, el volumen se expresa mediante la integral

$$V = \iint_R dxdy \int_{c\sqrt{x^2/a^2+y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2-y^2/b^2}} dz,$$

donde R es la región limitada por la citada elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1/2$.

Para calcular dicha integral hacemos el cambio de variables $x = (a/\sqrt{2})u\cos v$, $y = (a/\sqrt{2})u\,\mathrm{sen}\,v$, cuyo jacobiano vale $J = abu/2$. Con estos datos,

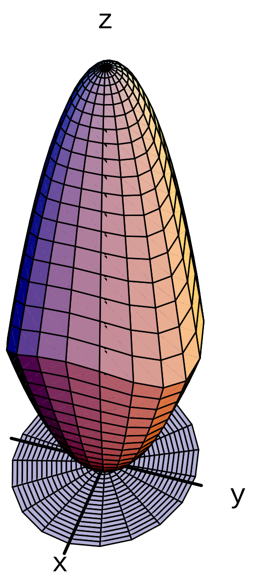
$$V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (c\sqrt{1-u^2/2} - c/2) \cdot \frac{abu}{2}\,du = \Big(\frac{5}{12} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\Big)\pi ab.$$

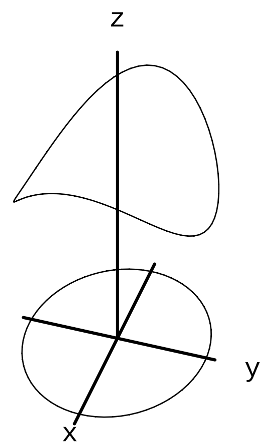
---

50. Encontrar el volumen de la región acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

Solución

En la figura del lado izquierdo se muestran los dos paraboloides que limitan la región, y en el lado derecho se ilustra la curva intersección y su proyección sobre el plano XY.





Como la proyección de dicha curva intersección es la elipse de ecuación

$$x^2 + y^2 = 10 - x^2 - 2y^2 \iff 2x^2 + 3y^2 = 10,$$

para calcular el volumen utilizamos coordenadas polares modificadas, es decir hacemos la transformación

$$x\sqrt{2/10} = u\cos v,$$
$$y\sqrt{3/10} = u\,\mathrm{sen}\,v,$$

cuyo jacobiano es $J = \begin{vmatrix} \frac{\cos v}{\sqrt{2/10}} & \frac{-u\,\mathrm{sen}\,v}{\sqrt{2/10}} \\ \frac{\mathrm{sen}\,v}{\sqrt{3/10}} & \frac{u\cos v}{\sqrt{3/10}} \end{vmatrix} = \frac{10u}{\sqrt{6}}$. El volumen se calcula entonces por la fórmula

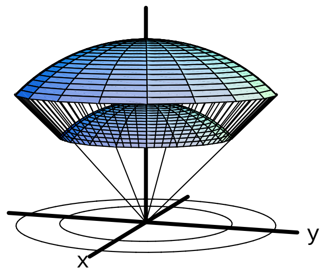
$$\begin{aligned} V &= \iint_R [10 - x^2 - 2y^2 - (x^2+y^2)]\,dxdy \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} \frac{10u}{\sqrt{6}} \cdot (10 - 10u^2)\,dv = \frac{200\pi}{\sqrt{6}} \int_0^1 (u - u^3)\,du = \frac{50\pi}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

51. Calcular el volumen del casquete esférico limitado por

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= a^2 \\ x^2+y^2+z^2 &= b^2 \\ x^2+y^2 &= z^2, \end{aligned}$$

con $z \geq 0$, siendo $0 < a < b$.

Solución



Si escribimos el volumen en coordenadas esféricas, de acuerdo a la figura tenemos:

$$\begin{array}{lll} x = r\cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi & & a \leq r \leq b \\ y = r \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi & \text{donde} & 0 \leq \varphi \leq \pi/4 \\ z = r\cos\varphi & & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{array}.$$

Recordando que el jacobiano de la transformación es $J = r^2 \operatorname{sen}\varphi$, el volumen se escribe ahora de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b dr \int_0^{\pi/4} d\pi \int_0^{2\pi} r^2 \operatorname{sen}\varphi d\vartheta = \left(\frac{r^3}{3}\Big|_a^b \right) \cdot \left(-\cos\varphi \Big|_0^{\pi/4} \right) \cdot 2\pi \\ &= \frac{b^3-a^3}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2})(b^3-a^3). \end{aligned}$$

---

52. (a) Describir las superficies r = constante, ϑ = constante, z = constante, en el sistema de coordenadas cilíndricas.

(b) Idem para las superficies r = constante, ϑ = constante, ϕ = constante, en coordenadas esféricas.

Solución

a) De las ecuaciones que definen las coordenadas cilíndricas:

$$x = r\cos\vartheta,\ y = r\operatorname{sen}\vartheta,\ z = z,$$

al hacer $r = k$, obtenemos

$$x^2 + y^2 = k^2,$$

lo que corresponde a un cilindro con eje de simetría el eje Z y radio k.

Si hacemos $\vartheta = k$, basta dividir las dos primeras coordenadas para obtener

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} k,$$

lo que corresponde a un plano vertical que pasa por el origen (los distintos valores de k dan los diferentes ángulos con respecto al plano $y = 0$).

Si hacemos $z = k$, esta misma ecuación representa un plano horizontal de altura k.

b) Las coordenadas esféricas de un punto se obtienen mediante las ecuaciones

$$x = \rho \cos\vartheta \operatorname{sen}\phi,\ \ y = \rho \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\phi,\ \ z = \rho\cos\phi.$$

Si hacemos $\rho = k$, obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2,$$

es decir la esfera centrada en el origen con radio k.

Si hacemos $\vartheta = k$, al igual que con las coordenadas cilíndricas,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\ \vartheta,$$

que representa también un plano vertical.

Si, por último, escribimos $\phi = k$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \\ z^2 = \rho^2\cos^2\phi \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x^2+y^2}{z^2} = \operatorname{tg}^2\phi,$$

que representa un cono de vértice el origen.

---

53. *Calcular el momento de inercia de un sólido en forma de cono circular recto con densidad constante respecto a su eje.*

Solución

Supongamos que el cono de altura h y radio en la base r tiene vértice en el origen y eje vertical. Entonces su ecuación es

$$z^2 = \frac{h^2}{r^2}(x^2 + y^2).$$

Si la densidad en cada punto del sólido es k, el momento de inercia respecto al eje Z viene dada por la fórmula:

$$I_z = \iiint_S k(x^2 + y^2)\,dV.$$

Para resolver la integral, escribimos el sólido en coordenadas cilíndricas, $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$. La ecuación del cono se escribe entonces como $z = hu/r$ y la integral pedida

$$I_z = \int_0^{2\pi} dv \int_0^r du \int_{hu/r}^h k\cdot u^3\,dz = 2\pi k\int_0^r u^3\Big(h - \frac{uh}{r}\Big)du = \frac{\pi k h r^4}{10}.$$

Otra forma de resolver la integral consiste en realizar la transformación a coordenadas esféricas, $x = \varphi \cos\vartheta \operatorname{sen}\phi$, $y = \varphi \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\phi$, $z = \varphi\cos\phi$. De este modo la ecuación del plano $z = h$ se escribe como $\varphi = h/\cos\phi$, y la integral es ahora

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(r/h)} d\phi \int_0^{h/\cos\phi} k\cdot\varphi^2 \operatorname{sen}^2\phi \cdot \varphi^2 \operatorname{sen}\phi \, d\varphi \\ &= 2\pi k \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(r/h)} \operatorname{sen}^3\phi \cdot \frac{h^5}{5\cos^5\phi}\, d\phi \\ &= \frac{2\pi k h^5}{5} \int_0^{\operatorname{arc\,tg}(r/h)} \operatorname{tg}^3\phi \cdot \sec^2\phi \, d\phi = \frac{2\pi k h^5}{5}\cdot\frac{r^4}{4h^4}. \end{aligned}$$

---

54. Hallar $\displaystyle\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{[1+(x^2+y^2+z^2)^{3/2}]^{3/2}}\, dxdydz$.

Solución

Si realizamos la transformación a coordenadas esféricas, $x = \varphi\cos\vartheta\operatorname{sen}\phi$, $y = \varphi\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\phi$, $z = \varphi\cos\phi$, como el valor absoluto del jacobiano de la transformación es $J = \rho^2\operatorname{sen}\phi$, la integral se escribe como:

$$I = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}{(1+\rho^3)^{3/2}}\, d\phi.$$

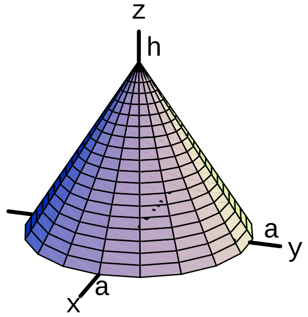
Para resolver la integral, como las variables están separadas, basta multiplicar las tres integrales simples. Tenemos así:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{\rho^2}{(1+\rho^3)^{3/2}}\, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \operatorname{sen}\phi\, d\phi \\ &= \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty 3\rho^2(1+\rho^3)^{-3/2}\, d\rho = \frac{4\pi}{3} \lim_{b\to\infty} -2(1+\rho^3)^{-1/2}\Big|_0^b = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

---

55. Calcular $\displaystyle\iiint_R (y^2+z^2)\, dxdydz$, *siendo* R *un cono recto de revolución de altura* h, *base situada en el plano* XY *y de radio* a *y eje en el eje* Z.

Solución



La figura adjunta muestra el cono descrito, el cual tiene por ecuación $a^2(h-z)^2 = h^2(x^2 + y^2)$. Pasando la integral a coordenadas cilíndricas, $x = u\cos v$, $y = u\operatorname{sen} v$, $z = z$, tenemos:

$$I = \int_0^a du \int_0^{2\pi} dv \int_0^{h(a-u)/a} u(u^2 \operatorname{sen}^2 v + z^2)dz = \cdots = \frac{a^4 h\pi}{20} + \frac{h^3 a^2 \pi}{30}.$$