Práctica 8: Integración (segunda parte)

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

Técnicas de integración

1. Encontrar las siguientes integrales:
   (a) $\int \cos(2x+3)dx$ (b) $\int \operatorname{sen}(x)\cos(x)dx$ (c) $\int e^{5x}dx$
   (d) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$ (e) $\int \tan(x)dx$ (f) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}dx$
   (g) $\int \operatorname{sen}^3(x)\cos(x)dx$ (h) $\int \frac{x}{x+1}dx$ (i) $\int xe^{-x^2}dx$
   (j) $\int x\cos(2x^2)dx$ (k) $\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$ (l) $\int \sqrt[3]{9-x}dx$
   (m) $\int \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}$ (n) $\int t^3\sqrt{1-t^2}dt$ (ñ) $\int \frac{1}{1+4s^2}ds$

2. Calcular las siguientes integrales definidas:
   (a) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{(2-x^2)^2}dx$.
   (b) $\int_0^{\pi} e^{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)dx$.
   (c) $\int_0^1 e^x \ln(e^x+1)dx$.

3. Encontrar las siguientes integrales:
   (a) $\int x\operatorname{sen}(x)$ (b) $\int xe^{2x}dx$ (c) $\int x^2e^{2x}dx$
   (d) $\int x^3\ln(x)dx$ (e) $\int \arccos(x)dx$ (f) $\int \arctan(x)dx$
   (g) $\int x^3\cos(x^2)dx$ (h) $\int x^2\ln^2(x)dx$ (i) $\int x^3e^{-x^2}dx$
   (j) $\int x^5\sqrt{1-x^2}dx$ (k) $\int \ln^2(x)dx$ (l) $\int x3^{x^2}dx$

4. (a) Probar las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

   Sugerencia: utilizar las identidades trigonométricas $1 = \operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)$ y $\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$.
   (b) Calcular las siguientes integrales:
   (i) $\int \operatorname{sen}^2(x)dx$
   (ii) $\int \cos^2(x)dx$

5. Calcular $\int \operatorname{sen}^3(x)dx$.
   Sugerencia: observar que

$$\operatorname{sen}^3(x) = \operatorname{sen}^2(x)\operatorname{sen}(x) = (1-\cos^2(x))\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos^2(x)\operatorname{sen}(x).$$

6. Encontrar las siguientes integrales:
(a) $\int \frac{1}{(x+1)(x-3)}dx$ (b) $\int \frac{x+2}{x^2+x}dx$ (c) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}dx$
(d) $\int \frac{x^3}{x+3}dx$ (e) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$ (f) $\int \frac{x}{(x-1)^2}dx$
(g) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}dx$ (h) $\int \frac{1}{x^2(x+1)}dx$ (i) $\int \frac{1}{x^2+25}dx$
(j) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}dx$ (k) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+5}dx$ (l) $\int \frac{1}{x^3+1}dx$
(m) $\int \frac{x}{x^3+6x^2+11x}dx$ (n) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+4e^x+13}dx$ (ñ) $\int \frac{x^2+3}{x^3+11x^2+30x}dx$
(o) $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-x+\frac{3}{4})(x^2+x-2)}dx$ (p) $\int \frac{x}{(x^2+1)(x^2+16)}dx$ (q) $\int \frac{1}{e^u+1}du$

7. Sea $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que $f'(x) = \frac{1}{x\ln^3(x)}$. Determinar f sabiendo que $f(e) = \frac{1}{2}$.

8. Hallar las siguientes integrales:
(a)$\int \text{sen}(\sqrt{x})dx$ (b) $\int x^2 \arctan(x)dx$ (c) $\int x^3 e^{-x^2}dx$
(d) $\int xe^{-\sqrt{x}}dx$ (e) $\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$ (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\text{sen}^2(x)}dx$
(g) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ (h) $\int \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ (i) $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}dx$
(j) $\int \frac{\ln(x)\ln(\ln(x))}{x}dx$ (k) $\int e^{2x}\cos(e^x)dx$ (l) $\int \frac{x}{e^x}dx$.

Sólidos de revolución

Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y supongamos que $f(x) \geq 0$ en este intervalo. Si hacemos rotar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje x, obtendremos un sólido cuyo volumen V se puede calcular por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

9. Probar que el volumen de una esfera de radio r está dado por la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

   Sugerencia: girar una semicircunferencia de radio r respecto a un eje coordenado. Recordar que la ecuación de la circunferencia de radio r centrada en el origen está dada por la fórmula $x^2 + y^2 = r^2$; en particular si consideramos la semicircunferencia que se halla sobre el eje de las x entonces tenemos que $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, donde x pertenece al intervalo $[-r, r]$.

10. Rotando una recta que pase por el origen alrededor del eje x, probar que el volumen de un cono de altura h y radio de la base r está dado por la fórmula $V = \frac{\pi}{3}r^2h$.

11. Encontrar el volumen de revolución obtenido al rotar la curva dada por

$$y = \frac{1}{x^2}$$

alrededor del eje x, entre $x = 2$ y $x = B$, para cualquier número $B > 2$. ¿Tiende este volumen hacia algún límite cuando $B \to \infty$? Si es así, ¿cuál es el límite? Interpretar geométricamente la situación.