Práctica 7: Integración (primera parte)

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

   (a) $\int(5x^2+3x-1)dx$ (b) $\int(2\operatorname{sen}(x)+3\cos(x))dx$ (c) $\int(e^x-\frac{5}{x^2+1})dx$

   (d) $\int\frac{3}{x}dx$ (e) $\int\frac{x^2-2x+2}{x^2}dx$ (f) $\int(2+x^{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\cos^2(x)})dx$

2. Calcular la función f sabiendo que $f'(x)=x^3+\cos(x)$ y que $f(0)=1$.

3. Calcular las siguientes integrales definidas e interpretar geométricamente los resultados:

   (a) $\int_0^3(2x+1)dx$ (b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\operatorname{sen}(x)dx$ (c) $\int_{-1}^{2}e^x dx$

   (d) $\int_2^5\frac{1}{x}dx$ (e) $\int_0^2(x^2-2x+2)dx$ (f) $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x^2}dx$

4. Sin hacer cálculos justificar geométricamente las siguientes igualdades:

   (a) $\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1x^2dx$.

   (b) $\int_{-1}^{1}x^3dx=0$.

5. Encontrar el área de la región limitada por:

   (a) $y=x^2-x$ e $y=2x-2$.

   (b) $y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$.

   (c) $y=x^2$ e $y=-x^2+1$.

   (d) $y=x^2$, $y=(x-2)^2$ e $y=0$.

   (e) $y=|x|$ e $y=(x+1)^2-1$.

   (f) $y=-e^x$, $y=e^x$, $x=-2$ y $x=0$.

   (g) $y=\operatorname{sen}(x)$, $y=\cos(x)$, el eje y, y el primer punto donde se intersecan estas curvas para $x>0$.

   Graficar en todos los casos.

   Sugerencia: recordar que si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y $f(x)\geq g(x)$ para todo x de $[a,b]$ entonces el área entre las dos curvas, desde a hasta b, está dada por la fórmula

   $$\int_a^b(f(x)-g(x))dx.$$

6. Calcular el área del triángulo cuyos vértices están dados por los puntos $(0,1)$, $(2,5)$ y $(4,3)$. Graficar.

7. Sean f y F funciones definidas en un intervalo $[a,b]$ tales que f es continua en $[a,b]$, $F'(x)=f(x)$ para todo x de $[a,b]$, $F(a)=1$ y $F(b)=2$. Calcular $\int_a^b f(x)dx$ y $\int_b^a f(x)dx$.

   Sugerencia: utilizar el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

8. Sean F y f funciones definidas en el intervalo $[1,3]$ tales que f es continua en $[1,3]$, $F'(x) = f(x)$ para cada x perteneciente a $[1,3]$, $F(1)+F(3) = 10$ y $\int_1^3 f(x)dx = 8$. Calcular $F(1)$ y $F(3)$.

9. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   (i) $F(x) = \int_{-1}^{5} \arctan(x^3)dx$.

   (ii) $G(x) = \int_1^x \operatorname{arc\,sen}(\ln(t))dt$.

   (iii) $H(x) = \int_2^x e^{t^2}\, dt$.

   (iv) $I(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} e^{r^2}\, dr$.

   (v) $J(x) = \int_{3^x}^{5} \operatorname{sen}^7(s)ds$.

   Sugerencia: en (iv) si definimos $u(x) = \frac{1}{x}$ entonces $I(x) = H(u(x))$.

10. Para $x \geq 1$ definamos $F(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}}dt$ y $G(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2}dt$.

    (a) Para $t \geq 1$ graficar $y = \frac{1}{\sqrt{t}}$ e $y = \frac{1}{t^2}$.

    (b) Calcular $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ y $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$ e interpretar geométricamente los resultados obtenidos.