Práctica 1: Repaso

(Adaptada de las prácticas del Dr H. San Martín)

Profesor: Cecilia Jarne

1. Consideremos la función lineal dada por $y = \frac{2}{3}x + 2$.

   (a) ¿Es cierto que el punto $(3, 6)$ pertenece a la recta? ¿Por qué?

   (b) Hallar dos puntos que pertenezcan a la recta.

   (c) Graficar la función.

   (d) ¿Cuánto valen la pendiente y la ordenada al origen? ¿Qué relación existe entre estos valores y el gráfico de la función?

   (e) Determinar las ecuaciones de una recta paralela y de una recta perpendicular a la recta obtenida por la función dada. ¿Son las únicas posibles?

2. Hallar la ecuación de una recta que pase por los puntos $(-1, 6)$ y $(1, -4)$. ¿Es la única posible?

3. Hallar la ecuación de una recta cuya pendiente valga -1 y tal que pase por el punto $(3, 2)$. ¿Es la única posible?

4. En una jaula en donde hay conejos y palomas se totalizan 35 cabezas y 94 patas. ¿Cuántos animales de cada clase hay?

5. Determinar la ecuación del eje de simetría, las coordenadas del vértice y las raíces reales (si existen) de las siguientes funciones cuadráticas (también representarlas gráficamente):

   (a) $y = x^2 - 9$ (b) $y = (x-1)^2 - 25$ (c) $y = (x-3)(x-5)$

   (d) $y = 3(x+1)^2 + 2$ (e) $y = x^2 + 1$ (f) $y = x^2 + 3x - 4$

6. Proponer la fórmula de una función cuadrática cuyos ceros sean $x = 2$ y $x = -1$. La fórmula dada, ¿es la única posible?

7. Hallar analíticamente los puntos en común entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ e $y = 2x - 1$. Graficar.

8. Graficar la función $f(x) = x^3$. Utilizando el gráfico de f, graficar las funciones $f_1(x) = -f(x)$, $f_2(x) = f(x) + 1$, $f_3(x) = f(x+1)$ y $f_4(x) = f(x-1)$. ¿Qué conclusión se puede obtener?

9. Resolver (de ser posible) las siguientes ecuaciones:

   (a) $3x + 4 = 5x - 2$ (b) $x^2 = x$ (c) $x^2 - 2 = 0$ (d) $x^2 + 2 = 0$

   (e) $\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x+1}$ (f) $x^3 = 3x + 2$

10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = |x|$, en donde

    $$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

    La expresión $|x|$ se lee como *valor absoluto de* x (o *módulo de* x). Graficar.

11. Graficar las siguientes funciones:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

   (c) $h(x) = |-2x+4|$.

12. Determinar el dominio más amplio de las siguientes funciones, y graficar los casos (c), (d) y (e):
   (a) $\sqrt{3x-2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2-3x}}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{1}{x-3}$ (e) $\frac{1}{x^2}$ (f) $\sqrt{x^2-2x+2}$

13. Sea f una función. Diremos que f es una *función par* si $f(x) = f(-x)$ para todo x del dominio, y que es una *función impar* si $f(-x) = -f(x)$ para todo x del dominio.

   (a) Probar que $f(x) = x^2$ es una función par y que $g(x) = x^3$ es una función impar. Interpretar gráficamente estas propiedades.

   (b) ¿Es cierto que la función $f(x) = x+1$ no es par ni impar?. ¿Por qué?

14. Expresar en radianes un ángulo de $30°$, $45°$ y de $60°$, respectivamente. Luego expresar en grados sexagesimales un ángulo de 2 radianes, de $3/2$ radianes y de π radianes.

15. Indicar el dominio, la imagen y graficar las funciones $y = \operatorname{sen}(x)$, $y = \cos(x)$ e $y = \tan(x)$.

16. Graficar en un mismo sistema de ejes coordenados las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $\operatorname{sen}(2x)$, y en otro las funciones $\operatorname{sen}(x)$ y $2\operatorname{sen}(x)$. Determinar la imagen de cada una de estas funciones.

17. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) La ecuación $\operatorname{sen}(x) = 2$ no tiene solución.

   (b) La función $y = \operatorname{sen}(x)$ tiene infinitas raíces.

   (c) Si $x = \frac{\pi}{6}$ entonces $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$.

   (d) Si $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$ entonces $x = \frac{\pi}{6}$.

   (e) La función $\operatorname{sen}(x)$ es par y la función $\cos(x)$ es impar.

   (f) Para cada número real x se cumple que $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

   (g) $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

18. Calcular de manera exacta (y sin uso de la calculadora) el seno y el coseno de $75°$ y de $15°$ respectivamente.

   Sugerencia: recordemos las fórmulas $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y)+\cos(x)\operatorname{sen}(y)$ y $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$. Utilizar las mismas aplicadas a ángulos cuyos seno y coseno resulten valores conocidos. Para ello conviene notar que $75° = 30° + 45°$ y $15° = 60° - 45° = 60° + (-45°)$.