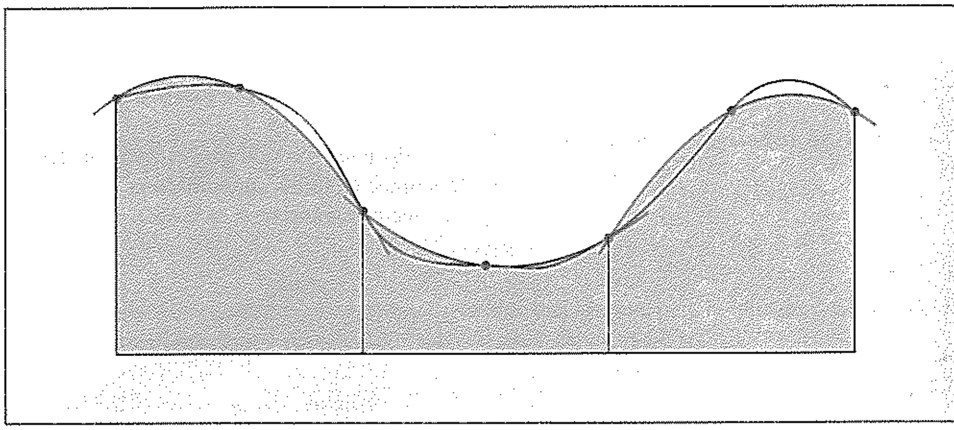
7

TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN



Con la regla de Simpson se estiman integrales mediante la aproximación de gráficas con parábolas.

Como resultado del teorema fundamental del cálculo, se puede integrar una función si se conoce una antiderivada, es decir, una integral indefinida. Se resumen aquí las integrales más importantes que se han aprendido hasta el momento.

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1) \qquad \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C \qquad \int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \qquad \int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

$$\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C \qquad \int \cot x\,dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

En este capítulo se desarrollan técnicas para usar estas fórmulas de integración básicas a fin de obtener integrales indefinidas de funciones más complicadas. En la sección 5.5 se aprendió el método de integración más importante, la regla de sustitución. La otra técnica general, integración por partes, se presenta en la sección 7.1. Después se aprenden métodos que son especiales para clases particulares de funciones como las trigonométricas y racionales.

La integración no es tan directa como la derivación; no hay reglas que garanticen de manera absoluta obtener una integral indefinida de una función. Por lo tanto, en la sección 7.5 se describe una estrategia para integración.

7.1 INTEGRACIÓN POR PARTES

Toda regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. Por ejemplo, la regla de sustitución para integración corresponde a la regla de la cadena para derivación. La regla que corresponde a la regla del producto para derivación se llama regla para *integración por partes.*

La regla del producto establece que si f y g son funciones derivables, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la notación para integrales indefinidas, esta ecuación se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)$$

o bien,

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Esta ecuación se puede reordenar como

1 $$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx}$$

La fórmula 1 se llama **fórmula para integración por partes**. Quizás es más fácil recordarla en la siguiente notación. Sea $u = f(x)$ y $v = g(x)$. Por lo tanto las diferenciales son $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$; por lo tanto, por la regla de sustitución, la fórmula para integración por partes se convierte en

2 $$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE LA FÓRMULA 1 Suponga que se elige $f(x) = x$ y $g'(x) = \operatorname{sen} x$. En tal caso $f'(x) = 1$ y $g(x) = -\cos x$. (Para g se puede elegir *cualquier* derivada de g'.) Así, con la fórmula 1, se tiene

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \\ &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx \\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

Es aconsejable comprobar la respuesta mediante derivación. Si se hace así, se obtiene x sen x, como se esperaba.

SOLUCIÓN POR MEDIO DE LA FÓRMULA 2 Sea

■ Es útil usar el patrón:

$u = \square \qquad dv = \square$

$du = \square \qquad v = \square$

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$$

Entonces
$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

y, por lo tanto,

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \int \overset{u}{\widehat{x}}\ \overbrace{\operatorname{sen} x\,dx}^{dv} = \overset{u}{\widehat{x}}\ \overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\ \overbrace{dx}^{du}$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

□

NOTA El objetivo de usar la integración por partes es obtener una integral más simple que aquella con la que se inició. Así, en el ejemplo 1 se inició con $\int x \operatorname{sen} x\,dx$ y se expresó en términos de la integral más simple $\int \cos x\,dx$. Si se hubiera elegido $u = \operatorname{sen} x$ y $dv = x\,dx$, en tal caso $du = \cos x\,dx$ y $v = x^2/2$, así que la integración por partes da

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = (\operatorname{sen} x)\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cos x\,dx$$

Aunque esto es cierto, $\int x^2 \cos x\,dx$ es una integral más difícil que la inicial. En general, al decidir sobre una elección para u y dv, por lo común se intenta elegir $u = f(x)$ como una función que se vuelve más simple cuando se deriva (o por lo menos no más complicada) siempre y cuando $dv = g'(x)\,dx$ se pueda integrar fácilmente para dar v.

EJEMPLO 2 Evaluar $\int \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí no se tiene mucha elección para u y dv. Sea

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

entonces
$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Al integrar por partes, se obtiene

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x}$$

■ Se acostumbra escribir $\int 1\,dx$ como $\int dx$.

$$= x\ln x - \int dx$$

■ Compruebe la respuesta mediante derivación.

$$= x\ln x - x + C$$

La integración por partes es efectiva en este ejemplo, porque la derivada de la función $f(x) = \ln x$ es más simple que f.

□

V EJEMPLO 3 Determine $\int t^2 e^t\,dt$.

SOLUCIÓN Note que t^2 se vuelve más simple cuando se deriva (mientras que e^t no cambia cuando se deriva o integra), de modo que se elige

$$u = t^2 \qquad dv = e^t\,dt$$

A continuación $\qquad du = 2t\,dt \qquad v = e^t$

La integración por partes da

$$\boxed{3} \qquad \int t^2 e^t\,dt = t^2 e^t - 2\int te^t\,dt$$

La integral que se obtuvo, $\int te^t\,dt$, es más simple que la integral original, pero aún no es obvio. Por lo tanto, se usa una segunda vez la integración por partes, esta vez con $u = t$ y $dv = e^t\,dt$. Después $du = dt$, $v = e^t$, y

$$\int te^t\,dt = te^t - \int e^t\,dt = te^t - e^t + C$$

Al escribir esto en la ecuación 3, se obtiene

$$\begin{aligned}\int t^2 e^t\,dt &= t^2 e^t - 2\int te^t\,dt \\ &= t^2 e^t - 2(te^t - e^t + C) \\ &= t^2 e^t - 2te^t + 2e^t + C_1 \qquad \text{donde } C_1 = -2C\end{aligned}$$

Un método más fácil, con números complejos, se da en el ejercicio 50 en el apéndice H.

V EJEMPLO 4 Evalúe $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Ni e^x ni sen x se vuelven más simples cuando se derivan, pero de cualquier manera se prueba con $u = e^x$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Por lo tanto $du = e^x\,dx$ y $v = -\cos x$, de modo que la integración por partes da

$$\boxed{4} \qquad \int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx$$

La integral que se ha obtenido, $\int e^x \cos x\,dx$, no es más simple que la original, pero por lo menos no es más difícil. Habiendo tenido éxito en el ejemplo precedente al integrar por partes dos veces, se persevera e integra de nuevo por partes. Esta vez se usa $u = e^x$ y $dv = \cos x\,dx$. En tal caso $du = e^x\,dx$, $v = \operatorname{sen} x$, y

$$\boxed{5} \qquad \int e^x \cos x\,dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

A primera vista, parece como si no se hubiera hecho nada porque se llegó a $\int e^x \operatorname{sen} x\,dx$, que es donde se inició. Sin embargo, si coloca la expresión para $\int e^x \cos x\,dx$ de la ecuación 5 en la ecuación 4, se obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\,dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\,dx$$

■ En la figura 1 se ilustra el ejemplo 4 mostrando las gráficas de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$ y $F(x) = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x)$. Como una comprobación visual del trabajo, observe que $f(x) = 0$ cuando F tinene un máximo o un mínimo.

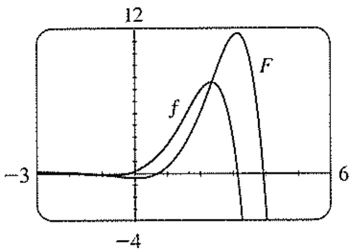


FIGURA 1

Esto se puede considerar como una ecuación que se resolverá para la integral desconocida. Al sumar $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ a ambos lados, se obtiene

$$2\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x$$

Dividiendo entre 2 y sumando la constante de la integración, obtiene

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$ □

Si se combina la fórmula para integración por partes con la parte 2 del teorema fundamental del cálculo, se puede evaluar por partes integrales definidas. Al evaluar ambos lados de la fórmula 1 entre a y b, suponiendo que f' y g' son continuas, y usar el teorema fundamental, se obtiene

$$\boxed{6} \qquad \boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx}$$

EJEMPLO 5 Calcule $\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx$.

SOLUCIÓN Sea

$$u = \tan^{-1}x \qquad dv = dx$$

Entonces $$du = \frac{dx}{1 + x^2} \qquad v = x$$

Por consiguiente la fórmula 6 da

$$\begin{aligned}\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx &= x\tan^{-1}x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= 1 \cdot \tan^{-1}1 - 0 \cdot \tan^{-1}0 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx\end{aligned}$$

■ Puesto que $\tan^{-1}x \geqslant 0$ para $x \geqslant 0$, la integral del ejemplo 5 se puede interpretar como el área de la región mostrada en la figura 2.

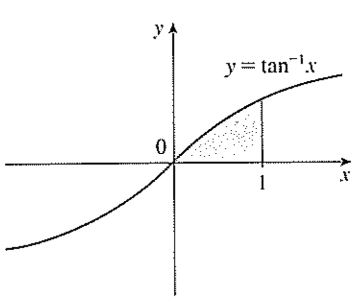


FIGURA 2

Para evaluar esta integral se usa la sustitución $t = 1 + x^2$ (puesto que u tiene otro significado en este ejemplo). Luego $dt = 2x\, dx$, de modo que $x dx = \frac{1}{2}\, dt$. Cuando $x = 0$, $t = 1$; cuando $x = 1$, $t = 2$; así que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx &= \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \tfrac{1}{2}\ln|t|\Big]_1^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \tfrac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Por lo tanto, $$\int_0^1 \tan^{-1}x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$ □

La ecuación 7 se llama *fórmula de reducción* porque el exponente n ha sido *reducido* a $n-1$ y $n-2$.

EJEMPLO 6 Demuestre la fórmula de reducción

$$\boxed{7} \qquad \int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

SOLUCIÓN Sea $\quad u = \operatorname{sen}^{n-1}x \qquad dv = \operatorname{sen} x\,dx$

Entonces $\quad du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}x\cos x\,dx \qquad v = -\cos x$

así que la integración por partes da

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

Puesto que $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \operatorname{sen}^n x\,dx$$

Como en el ejemplo 4, se resuelve esta ecuación para la integral deseada, pasando el último término del lado derecho al lado izquierdo. Así, se tiene

$$n\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

o bien,

$$\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \operatorname{sen}^{n-1}x + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

□

La fórmula de reducción (7) es útil porque al usarla de manera repetida se podría expresar finalmente $\int \operatorname{sen}^n x\,dx$ en términos de $\int \operatorname{sen} x\,dx$ (si n es impar) o $\int (\operatorname{sen} x)^0\,dx = \int dx$ (si n es par).

7.1 EJERCICIOS

1–2 Evalúe la integral por medio de la integración por partes con las elecciones indicadas de u y dv.

1. $\int x^2 \ln x\,dx$; $\quad u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$

2. $\int \theta\cos\theta\,d\theta$; $\quad u = \theta,\ dv = \cos\theta\,d\theta$

3–32 Evalúe la integral.

3. $\int x\cos 5x\,dx$

4. $\int xe^{-x}\,dx$

5. $\int re^{r/2}\,dr$

6. $\int t\operatorname{sen} 2t\,dt$

7. $\int x^2\operatorname{sen}\pi x\,dx$

8. $\int x^2\cos mx\,dx$

9. $\int \ln(2x+1)\,dx$

10. $\int \operatorname{sen}^{-1}x\,dx$

11. $\int \arctan 4t\,dt$

12. $\int p^5\ln p\,dp$

13. $\int t\sec^2 2t\,dt$

14. $\int s\,2^s\,ds$

15. $\int (\ln x)^2\,dx$

16. $\int t\operatorname{senh} mt\,dt$

17. $\int e^{2\theta}\operatorname{sen} 3\theta\,d\theta$

18. $\int e^{-\theta}\cos 2\theta\,d\theta$

19. $\int_0^{\pi} t\operatorname{sen} 3t\,dt$

20. $\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}\,dx$

21. $\int_0^1 t\cosh t\,dt$

22. $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\,dy$

23. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

24. $\int_0^{\pi} x^3\cos x\,dx$

25. $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\,dy$

26. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctan(1/x)\,dx$

27. $\int_0^{1/2} \cos^{-1}x\,dx$

28. $\int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{x^3}\,dx$

29. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x)\,dx$

30. $\int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{4+r^2}}\,dr$

31. $\int_1^2 x^4(\ln x)^2\,dx$

32. $\int_0^t e^s \operatorname{sen}(t-s)\,ds$

33–38 Primero realice una sustitución y luego use la integración por partes para evaluar la integral.

33. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

34. $\int t^3 e^{-t^2}\,dt$

$\boxed{35.}$ $\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} \theta^3\cos(\theta^2)\,d\theta$

36. $\int_0^{\pi} e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

37. $\int x\ln(1+x)\,dx$

38. $\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx$

39–42 Evalúe la integral indefinida. Ilustre, y compruebe que su respuesta es razonable, graficando tanto la función como su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\int (2x+3)e^x\,dx$

40. $\int x^{3/2}\ln x\,dx$

41. $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$

42. $\int x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

43. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$$

(b) Use el inciso (a) y la fórmula de reducción para evaluar $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$.

44. (a) Demuestre la fórmula de reducción

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\operatorname{sen} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x\,dx$$

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int \cos^2 x\,dx$.
(c) Use los incisos (a) y (b) para evaluar $\int \cos^4 x\,dx$.

45. (a) Use la fórmula de reducción del ejemplo 6 para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}x\,dx$$

donde $n \geqslant 2$ es un entero.

(b) Use el inciso (a) para evaluar $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 x\,dx$ y $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^5 x\,dx$.
(c) Emplee el inciso (a) para mostrar que, para potencias impares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot \cdots \cdot (2n+1)}$$

46. Demuestre que, para potencias pares de seno,

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n}x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \cdots \cdot 2n}\,\frac{\pi}{2}$$

47–50 Use la integración por partes para demostrar la fórmula de reducción.

$\boxed{47.}$ $\int (\ln x)^n\,dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\,dx$

48. $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx$

49. $\tan^n x\,dx = \dfrac{\tan^{n-1}x}{n-1} - \int \tan^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

50. $\int \sec^n x\,dx = \dfrac{\tan x\sec^{n-2}x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x\,dx \quad (n \neq 1)$

51. Use el ejercicio 47 para determinar $\int (\ln x)^3\,dx$.

52. Use el ejercicio 48 para encontrar $\int x^4 e^x\,dx$.

53–54 Determine el área de la región acotada por las curvas dadas.

53. $y = xe^{-0.4x}, \quad y = 0, \quad x = 5$

54. $y = 5\ln x, \quad y = x\ln x$

55–56 Use una gráfica para hallar las coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas dadas. Luego encuentre (de manera aproximada) el área de la región acotada por las curvas.

55. $y = x\operatorname{sen} x, \quad y = (x-2)^2$

56. $y = \arctan 3x, \quad y = \frac{1}{2}x$

57–60 Use el método de las envolventes cilíndricas para hallar el volumen generado al rotar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

$\boxed{57.}$ $y = \cos(\pi x/2),\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1;$ respecto al eje y

58. $y = e^x,\ y = e^{-x},\ x = 1;$ respecto al eje y

59. $y = e^{-x},\ y = 0,\ x = -1,\ x = 0;$ respecto a $x = 1$

60. $y = e^x,\ x = 0,\ y = \pi;$ respecto al eje x

61. Encuentre el valor promedio de $f(x) = x^2 \ln x$ en el intervalo $[1, 3]$.

62. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de modo que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial del cohete en el despegue (incluido su combustible) es m, el combustible se consume a una proporción r, y los gases de escape son expulsados con velocidad constante v_e (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t es el que se expresa mediante la ecuación

$$v(t) = -gt - v_e \ln \frac{m - rt}{m}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande. Si $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $m = 30\,000$ kg, $r = 160$ kg/s, y $v_e = 3\,000$ m/s, determine la altura del cohete un minuto después del despegue.

63. Una partícula que se mueve a lo largo de una recta tiene velocidad $v(t) = t^2e^{-t}$ metros por segundo después de t segundos. ¿Qué tan lejos viajará durante los primeros t segundos?

64. Si $f(0) = g(0) = 0$ y f'' y g'' son continuas, muestre que

$$\int_0^a f(x)g''(x)\,dx = f(a)g'(a) - f'(a)g(a) + \int_0^a f''(x)g(x)\,dx$$

65. Suponga que $f(1) = 2$, $f(4) = 7$, $f'(1) = 5$, $f'(4) = 3$, y f'' es continua. Encuentre el valor de $\int_1^4 xf''(x)\,dx$.

66. (a) Use la integración por partes para mostrar que

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$

(b) Si f y g son funciones inversas y f' es continua, demuestre que

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

[*Sugerencia:* use el inciso (a) y haga la sustitución $y = f(x)$.]

(c) En el caso donde f y g son funciones positivas y $b > a > 0$, dibuje un diagrama para dar una interprepretación geométrica del inciso (b).

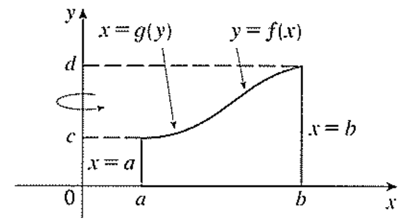
(d) Use el inciso (b) para evaluar $\int_1^e \ln x\,dx$.

67. Se llegó a la fórmula 6.3.2, $V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, por medio de envolventes cilíndricas, pero ahora se puede usar la integración por partes para demostrarla con el método de división de la sección 6.2, por lo menos para el caso donde f es uno a uno y, por lo tanto, tiene una función inversa g. Use la figura para mostrar que

$$V = \pi b^2 d - \pi a^2 c - \int_c^d \pi[g(y)]^2\,dy$$

Realice la sustitución $y = f(x)$ y después use la integración por partes en la integral resultante para demostrar que

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx.$$



68. Sea $I_n = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx$.

(a) Muestre que $I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}$.

(b) Use el ejercicio 46 para mostrar que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n + 1}{2n + 2}$$

(c) Use los incisos (a) y (b) para mostrar que

$$\frac{2n + 1}{2n + 2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1$$

y deducir que $\lim_{n\to\infty} I_{2n+1}/I_{2n} = 1$.

(d) Emplee el inciso (c) y los ejercicios 45 y 46 para mostrar que

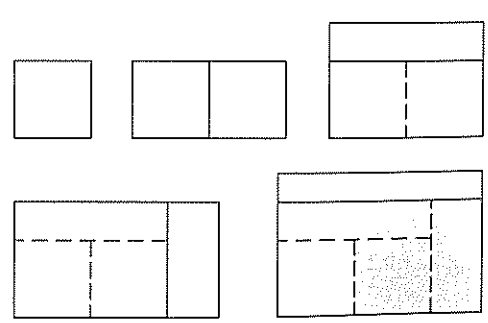
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$$

Esta fórmula se escribe por lo general como un producto infinito:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\cdots$$

y se llama *producto de Wallis.*

(e) Se construyen rectángulos como sigue. Empiece con un cuadrado de área 1 y una los rectángulos de área 1 de manera alterna al lado o arriba del rectángulo previo (véase la figura). Encuentre el límite de las relaciones de amplitud a altura de estos rectángulos.



7.2 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

En esta sección se usan identidades trigonométricas para integrar ciertas combinaciones de funciones trigonométricas. Se empieza con potencias de seno y coseno.

EJEMPLO 1 Evalúe $\int \cos^3 x\, dx$.

SOLUCIÓN Sustituir simplemente $u = \cos x$ no es útil, puesto que en seguida $du = -\operatorname{sen} x\, dx$. A fin de integrar potencias de coseno, sería necesario un factor $\operatorname{sen} x$ extra. De manera similar, una potencia de seno requeriría un factor $\cos x$ extra. Así, aquí se puede separar un factor coseno y convertir el factor $\cos^2 x$ restante a una expresión relacionada con el seno por medio de la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$:

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cdot \cos x = (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x$$

Se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \operatorname{sen} x$, de modo que $du = \cos x\, dx$ y

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cdot \cos x\, dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)\, du = u - \tfrac{1}{3}u^3 + C \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + C\end{aligned}$$ □

En general, se intenta escribir un integrando en el que intervienen potencias de seno y coseno en una forma donde se tiene sólo un factor seno (y el resto de la expresión en términos de coseno) o sólo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos de seno). La identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ permite convertir de una parte a otra entre potencias pares de seno y coseno.

EJEMPLO 2 Encuentre $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx$

SOLUCIÓN Se convertiría $\cos^2 x$ a $1 - \operatorname{sen}^2 x$, pero se tendría una expresión en términos de $\operatorname{sen} x$ sin ningún factor $\cos x$ extra. En cambio, se separa un solo factor seno y se reescribe el factor $\operatorname{sen}^4 x$ restante en términos de $\cos x$:

$$\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x$$

En la figura 1 se muestran las gráficas del integrando $\operatorname{sen}^5 x \cos^2 x$ del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

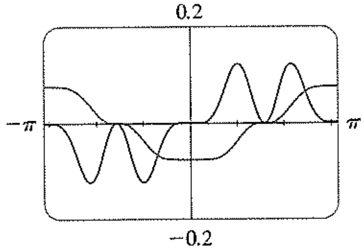


FIGURA 1

Sustituyendo $u = \cos x$, se tiene $du = -\operatorname{sen} x\, dx$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \operatorname{sen} x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$ □

En los ejemplos precedentes, una potencia impar de seno y coseno permitió separar un solo factor y convertir la potencia par restante. Si el integrando contiene potencias pares de seno y coseno, esta estrategia falla. En este caso, se puede sacar ventaja de las siguientes identidades de la mitad de un ángulo (véanse las ecuaciones 17b y 17a en el apéndice D):

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

En el ejemplo 3 se muestra que el área de la región mostrada en la figura 2 es $\pi/2$.

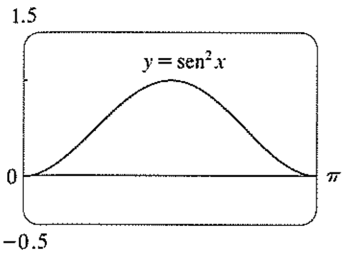


FIGURA 2

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si se escribe $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, no se simplifica la evaluación de la integral. Sin embargo, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo para $\operatorname{sen}^2 x$, se tiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right)\right]_0^\pi$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\pi\right) - \tfrac{1}{2}\left(0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right) = \tfrac{1}{2}\pi$$

Observe que mentalmente se hizo la sustitución $u = 2x$ al integrar $\cos 2x$. Otro método para evaluar esta integral se dio en el ejercicio 43 en la sección 7.1. □

EJEMPLO 4 Determine $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Se podría evaluar esta integral por medio de la fórmula de reducción para $\int \operatorname{sen}^n x\, dx$ (ecuación 7.1.7) junto con el ejemplo 3 (como en el ejercicio 43 de la sección 7.1), pero un mejor método es escribir $\operatorname{sen}^4 x = (\operatorname{sen}^2 x)^2$ y usar una fórmula de la mitad de un ángulo:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx$$

$$= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Puesto que ocurre $\cos^2 2x$, se debe usar otra fórmula de la mitad de un ángulo

$$\cos^2 2x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)$$

Esto da

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \tfrac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right] dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos 2x + \tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{2}x - \operatorname{sen} 2x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x\right) + C$$ □

Para resumir, se listan las directrices a seguir al evaluar integrales de la forma $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$, donde $m \geq 0$ y $n \geq 0$ son enteros.

ESTRATEGIA PARA EVALUAR $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$

(a) Si la potencia de coseno es impar ($n = 2k + 1$), ahorre un factor coseno y use $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ para expresar los demás factores en términos de seno:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \operatorname{sen}^m x\, (\cos^2 x)^k \cos x\, dx$$

$$= \int \operatorname{sen}^m x\, (1 - \operatorname{sen}^2 x)^k \cos x\, dx$$

Después sustituya $u = \operatorname{sen} x$.

(b) Si la potencia de seno es impar ($m = 2k + 1$), ahorre un factor seno y use $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ para expresar los factores restantes en términos de coseno:

$$\int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^n x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x \operatorname{sen} x\, dx$$

Después sustituya $u = \cos x$. [Note que si las potencias de seno y coseno son impares, se puede usar (a) o (b).]

(c) Si las potencias de seno y coseno son pares, use las identidades de la mitad de un ángulo

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Algunas veces es útil usar la identidad

$$\operatorname{sen} x \cos x = \tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$$

Se puede usar una estrategia similar para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x\, dx$. Puesto que $(d/dx) \tan x = \sec^2 x$, se puede separar un factor $\sec^2 x$ y convertir la potencia restante (par) de la secante en una expresión relacionada con la tangente por medio de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. O bien, puesto que $(d/dx) \sec x = \sec x \tan x$, se puede separar un factor $\sec x \tan x$ y convertir la potencia restante (par) de tangente a secante.

V EJEMPLO 5 Evalúe $\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx$.

SOLUCIÓN Si se separa un factor $\sec^2 x$, se puede expresar el factor restante $\sec^2 x$ en términos de la tangente por medio de la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \tan x$ con $du = \sec^2 x\, dx$:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x\, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x\, dx$$

$$= \int \tan^6 x\, (1 + \tan^2 x) \sec^2 x\, dx$$

$$= \int u^6 (1 + u^2)\, du = \int (u^6 + u^8)\, du$$

$$= \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

$$= \tfrac{1}{7} \tan^7 x + \tfrac{1}{9} \tan^9 x + C$$

□

EJEMPLO 6 Encuentre $\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta$.

SOLUCIÓN Si se separa un factor $\sec^2\theta$ como en el ejemplo precedente, queda un factor $\sec^5\theta$, que no se convierte con facilidad a tangente. Sin embargo, si se separa un factor $\sec\theta \tan\theta$, se puede convertir la potencia restante en una expresión que implica sólo la secante por medio de la identidad $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$. Por lo tanto se puede evaluar la integral sustituyendo $u = \sec\theta$, de modo que $du = \sec\theta \tan\theta \, d\theta$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^5\theta \sec^7\theta \, d\theta &= \int \tan^4\theta \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (\sec^2\theta - 1)^2 \sec^6\theta \sec\theta \tan\theta \, d\theta \\
&= \int (u^2 - 1)^2 u^6 \, du = \int (u^{10} - 2u^8 + u^6) \, du \\
&= \frac{u^{11}}{11} - 2\frac{u^9}{9} + \frac{u^7}{7} + C \\
&= \tfrac{1}{11}\sec^{11}\theta - \tfrac{2}{9}\sec^9\theta + \tfrac{1}{7}\sec^7\theta + C
\end{aligned}$$ □

En los ejemplos anteriores, se demuestran estrategias diferentes para evaluar integrales de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ para dos casos, que se resumen aquí.

ESTRATEGIA PARA EVALUAR $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$

(a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k$, $k \geqslant 2$), ahorre un factor de $\sec^2 x$ y use $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ para expresar los demás factores en términos de $\tan x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^m x \sec^{2k} x \, dx &= \int \tan^m x \, (\sec^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx \\
&= \int \tan^m x \, (1 + \tan^2 x)^{k-1} \sec^2 x \, dx
\end{aligned}$$

Luego sustituya $u = \tan x$.

(b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), guarde un factor de $\sec x \tan x$ y use $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para expresar los demás factores en términos de $\sec x$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^{2k+1} x \sec^n x \, dx &= \int (\tan^2 x)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx \\
&= \int (\sec^2 x - 1)^k \sec^{n-1} x \sec x \tan x \, dx
\end{aligned}$$

Después sustituya $u = \sec x$.

Para otros casos, las directrices no son tan claras. Podría ser necesario usar identidades, integración por partes y, ocasionalmente, un poco de inventiva. A veces será necesario poder integrar $\tan x$ por medio de la fórmula establecida en (5.5.5):

$$\boxed{\int \tan x\,dx = \ln|\sec x| + C}$$

Se necesitará también la integral indefinida de la secante:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C}$$

Se podría comprobar la fórmula 1 mediante la derivación de lado derecho, o como sigue. Primero se multiplican numerador y denominador por $\sec x + \tan x$:

$$\begin{aligned}\int \sec x\,dx &= \int \sec x\,\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx\\ &= \int \frac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x + \tan x}\,dx\end{aligned}$$

Si se sustituye $u = \sec x + \tan x$, después $du = (\sec x\tan x + \sec^2 x)\,dx$, también, la integral se convierte en $\int (1/u)\,du = \ln|u| + C$. Así, se tiene

$$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

EJEMPLO 7 Encuentre $\displaystyle\int \tan^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí sólo ocurre $\tan x$, de modo que se emplea $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ para reescribir un factor $\tan^2 x$ en términos de $\sec^2 x$:

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x\,dx &= \int \tan x\tan^2 x\,dx = \int \tan x\,(\sec^2 x - 1)\,dx\\ &= \int \tan x\sec^2 x\,dx - \int \tan x\,dx\\ &= \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

En la primera integral se sustituye mentalmente $u = \tan x$ de modo que $du = \sec^2 x\,dx$. □

Si aparece una potencia par de tangente con una potencia impar de secante, es útil expresar el integrando completamente en términos de $\sec x$. Las potencias de $\sec x$ podrían requerir integración por partes, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Encuentre $\displaystyle\int \sec^3 x\,dx$.

SOLUCIÓN Aquí se integra por partes con

$$\begin{aligned} u &= \sec x & dv &= \sec^2 x\,dx\\ du &= \sec x\tan x\,dx & v &= \tan x\end{aligned}$$

En tal caso
$$\int \sec^3 x\,dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec x\,(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \sec x \tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx$$

Si se emplea la fórmula 1 y se resuelve para la integral requerida, se obtiene

$$\int \sec^3 x\,dx = \tfrac{1}{2}\big(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big) + C$$
□

Integrales como la del ejemplo anterior podrían parecer muy especiales, pero ocurren con frecuencia en aplicaciones de integración, como se verá en el capítulo 8. Integrales de la forma $\int \cot^m x \csc^n x\,dx$ se pueden determinar mediante métodos similares como resultado de la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

Por último, se puede hacer uso de otro conjunto de identidades trigonométricas:

▪ Estas identidades de producto se analizan en el apéndice D.

> **2** Para evaluar las integrales (a) $\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx$, (b) $\int \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,dx$, o (c) $\int \cos mx \cos nx\,dx$, use la identidad correspondiente:
>
> (a) $\operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)]$
>
> (b) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$
>
> (c) $\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$

EJEMPLO 9 Evalúe $\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx$.

SOLUCIÓN Esta integral podría ser evaluada por medio de integración por partes, pero es más fácil usar la identidad de la ecuación 2(a) como sigue:

$$\int \operatorname{sen} 4x \cos 5x\,dx = \int \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(-x) + \operatorname{sen} 9x]\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int (-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 9x)\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\big(\cos x - \tfrac{1}{9}\cos 9x\big) + C$$
□

7.2 EJERCICIOS

1–49 Evalúe la integral.

1. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x\,dx$
2. $\int \operatorname{sen}^6 x \cos^3 x\,dx$
3. $\int_{\pi/2}^{3\pi/4} \operatorname{sen}^5 x \cos^3 x\,dx$
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx$
5. $\int \operatorname{sen}^2(\pi x) \cos^5(\pi x)\,dx$
6. $\int \dfrac{\operatorname{sen}^3(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$
7. $\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta$
8. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\,d\theta$
9. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4(3t)\,dt$
10. $\int_0^{\pi} \cos^6\theta\,d\theta$
11. $\int (1 + \cos\theta)^2\,d\theta$
12. $\int x \cos^2 x\,dx$
13. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$
14. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t\,dt$
15. $\int \dfrac{\cos^5\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen}\alpha}}\,dx$
16. $\int \cos\theta \cos^5(\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$

17. $\int \cos^2 x \tan^3 x\, dx$

18. $\int \cot^5\theta \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta$

19. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x}\, dx$

20. $\int \cos^2 x \operatorname{sen} 2x\, dx$

21. $\int \sec^2 x \tan x\, dx$

22. $\int_0^{\pi/2} \sec^4(t/2)\, dt$

23. $\int \tan^2 x\, dx$

24. $\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\, dx$

25. $\int \sec^6 t\, dt$

26. $\int_0^{\pi/4} \sec^4\theta \tan^4\theta\, d\theta$

27. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^4 x\, dx$

28. $\int \tan^3(2x) \sec^5(2x)\, dx$

29. $\int \tan^3 x \sec x\, dx$

30. $\int_0^{\pi/3} \tan^5 x \sec^6 x\, dx$

31. $\int \tan^5 x\, dx$

32. $\int \tan^6(ay)\, dy$

33. $\int \dfrac{\tan^3\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta$

34. $\int \tan^2 x \sec x\, dx$

35. $\int x \sec x \tan x\, dx$

36. $\int \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos^3\phi}\, d\phi$

37. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot^2 x\, dx$

38. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot^3 x\, dx$

39. $\int \cot^3\alpha \csc^3\alpha\, d\alpha$

40. $\int \csc^4 x \cot^6 x\, dx$

41. $\int \csc x\, dx$

42. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \csc^3 x\, dx$

43. $\int \operatorname{sen} 8x \cos 5x\, dx$

44. $\int \cos \pi x \cos 4\pi x\, dx$

45. $\int \operatorname{sen} 5\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta$

46. $\int \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} 2x}\, dx$

47. $\int \dfrac{1 - \tan^2 x}{\sec^2 x}\, dx$

48. $\int \dfrac{dx}{\cos x - 1}$

49. $\int t \sec^2(t^2) \tan^4(t^2)\, dt$

50. Si $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x \sec x\, dx = I$, exprese el valor de $\int_0^{\pi/4} \tan^8 x \sec x\, dx$ en términos de I.

51–54 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, graficando el integrando y su antiderivada (con $C = 0$).

51. $\int x \operatorname{sen}^2(x^2)\, dx$

52. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x\, dx$

53. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 6x\, dx$

54. $\int \sec^4 \dfrac{x}{2}\, dx$

55. Encuentre el valor promedio de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

56. Evalúe $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$ por cuatro métodos:
(a) la sustitución $u = \cos x$,
(b) la sustitución $u = \operatorname{sen} x$,
(c) la identidad $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, y
(d) integración por partes.
Explique las distintas apariencias de las respuestas.

57–58 Encuentre el área de la región acotada por las curvas dadas.

57. $y = \operatorname{sen}^2 x,\quad y = \cos^2 x,\quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/4$

58. $y = \operatorname{sen}^3 x,\quad y = \cos^3 x,\quad -\pi/4 \leqslant x \leqslant 5\pi/4$

59–60 Use una gráfica del integrando para inferir el valor de la integral. Después use los métodos de esta sección para demostrar que su conjetura es correcta.

59. $\int_0^{2\pi} \cos^3 x\, dx$

60. $\int_0^2 \operatorname{sen} 2\pi x \cos 5\pi x\, dx$

61–64 Encuentre el volumen obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas respecto al eje especificado.

61. $y = \operatorname{sen} x,\ y = 0,\ \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi;$ respecto al eje x

62. $y = \operatorname{sen}^2 x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$ respecto al eje x

63. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4;$ respecto a $y = 1$

64. $y = \operatorname{sen} x,\ y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/3;$ respecto a $y = 1$

65. Una partícula se mueve en una línea recta con función de velocidad $v(t) = \operatorname{sen} \omega t \cos^2 \omega t$. Encuentre su función de posición $s = f(t)$ si $f(0) = 0$.

66. La electricidad doméstica se suministra en la forma de corriente alterna que varía de 155 V a -155 V con una frecuencia de 60 ciclos por segundo (Hz). Así que el voltaje está dado por

$$E(t) = 155 \operatorname{sen}(120\pi t)$$

donde t es el tiempo en segundos. Los voltímetros leen el voltaje RMS (media cuadrática), que es la raíz cuadrada del valor promedio de $[E(t)]^2$ sobre un ciclo.
(a) Calcule el voltaje RMS de la corriente doméstica.
(b) Muchas estufas eléctricas requieren un voltaje RMS de 220 V. Encuentre la amplitud A correspondiente necesaria para el voltaje $E(t) = A \operatorname{sen}(120\pi t)$.

67–69 Demuestre la fórmula, donde m y n son enteros positivos.

67. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = 0$

68. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

69. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

70. Una *serie de Fourier finita* está dada por la suma

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{N} a_n \operatorname{sen} nx \\ &= a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots + a_N \operatorname{sen} Nx \end{aligned}$$

Muestre que el m-ésimo coeficiente a_m está dado por la fórmula

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx$$

7.3 SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

En la determinación del área de un círculo o una elipse, surge una integral de la forma $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, donde $a > 0$. Si fuese $\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$, la sustitución $u = a^2 - x^2$ sería efectiva pero, tal y como aparece, $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ es más difícil. Si se cambia la variable de x a θ por la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$, en tal caso la identidad $1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$ permite eliminar el signo de la raíz porque

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a\,|\cos \theta|$$

Observe la diferencia entre la sustitución $u = a^2 - x^2$ (en la que la nueva variable es una función de la variable previa) y la sustitución $x = a \operatorname{sen} \theta$ (la variable previa es una función de la nueva).

En general se puede hacer una sustitución de la forma $x = g(t)$ al usar al revés la regla de sustitución. A fin de simplificar los cálculos, se supone que g tiene una función inversa; es decir, g es uno a uno. En este caso, si se reemplazan u por x y x por t en la regla de sustitución (ecuación 5.5.4), se obtiene

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t))g'(t)\, dt$$

Esta clase de sustitución se llama *sustitución inversa*.

Se puede hacer la sustitución inversa $x = a \operatorname{sen} \theta$ siempre que ésta defina una función uno a uno. Esto se puede llevar a cabo restringiendo θ a ubicarse en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

En la tabla siguiente se listan las sustituciones trigonométricas que son efectivas para las expresiones con radicales debido a las identidades trigonométricas especificadas. En cada caso la restricción sobre θ se impone para asegurar que la función que define la sustitución es uno a uno. (Éstos son los mismos intervalos empleados en la sección 1.6 al definir las funciones inversas.)

TABLA DE SUSTITUCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \operatorname{sen} \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - \operatorname{sen}^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

V EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 3\,\text{sen}\,\theta$, donde $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Después $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9\,\text{sen}^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\,|\cos\theta| = 3\cos\theta$$

(Note que $\cos\theta \geqslant 0$ porque $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.) Así, la regla de sustitución inversa da

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx &= \int \frac{3\cos\theta}{9\,\text{sen}^2\theta}\,3\cos\theta\,d\theta \\ &= \int \frac{\cos^2\theta}{\text{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \cot^2\theta\,d\theta \\ &= \int (\csc^2\theta - 1)\,d\theta \\ &= -\cot\theta - \theta + C\end{aligned}$$

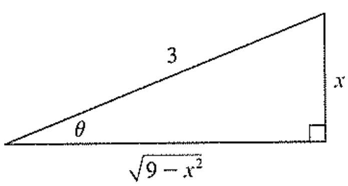


FIGURA 1

$\text{sen}\,\theta = \dfrac{x}{3}$

Puesto que ésta es una integral indefinida, se debe volver a la variable original x. Esto se puede hacer ya sea por medio de identidades trigonométricas para expresar $\cot\theta$ en términos de $\text{sen}\,\theta = x/3$ o dibujando un diagrama, como en la figura 1, donde θ se interpreta como un ángulo de un triángulo rectángulo. Puesto que $\text{sen}\,\theta = x/3$, se marcan el cateto opuesto y la hipotenusa con longitudes x y 3. Después por el teorema de Pitágoras se obtiene la longitud del cateto adyacente como $\sqrt{9 - x^2}$, así que se puede leer simplemente el valor de $\cot\theta$ en la figura:

$$\cot\theta = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}$$

(Aunque $\theta > 0$ en el diagrama, esta expresión para $\cot\theta$ es válida aun cuando $\theta < 0$.) Puesto que $\text{sen}\,\theta = x/3$, se tiene $\theta = \text{sen}^{-1}(x/3)$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{9 - x^2}}{x} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C \qquad \square$$

V EJEMPLO 2 Determine el área encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

SOLUCIÓN Resolviendo la ecuación de la elipse en favor de y, se obtiene

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \qquad \text{o} \qquad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

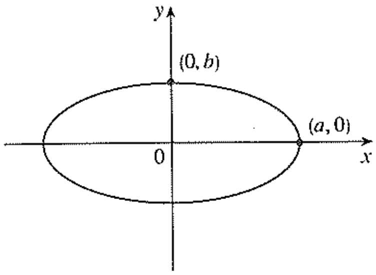


FIGURA 2

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Debido a que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes, el área total A es cuatro veces el área del primer cuadrante (véase figura 2). La parte de la elipse en el primer cuadrante está dada por la función

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad 0 \leqslant x \leqslant a$$

y, por eso,

$$\tfrac{1}{4}A = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Para evaluar esta integral se sustituye $x = a \operatorname{sen} \theta$. Después $dx = a \cos \theta \, d\theta$. Para cambiar los límites de integración se nota que cuando $x = 0$, sen $\theta = 0$, cuando $\theta = 0$; de modo que $x = a$, sen $\theta = 1$, por lo tanto, $\theta = \pi/2$. También

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 \cos^2\theta} = a|\cos \theta| = a \cos \theta$$

puesto que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= 4\frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 4\frac{b}{a}\int_0^{\pi/2} a \cos \theta \cdot a \cos \theta \, d\theta \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = 4ab\int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= 2ab\left[\theta + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = 2ab\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right) = \pi ab \end{aligned}$$

Se ha mostrado que el área de una elipse con semiejes a y b es πab. En particular, tomando $a = b = r$, se ha demostrado la famosa fórmula de que el área de un círculo con radio r es πr^2. □

NOTA Puesto que la integral del ejemplo 2 fue una integral definida, se cambiaron los límites de integración y no fue necesario convertir de nuevo a la variable original x.

EJEMPLO 3 Encuentre $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 + 4}}\, dx$.

SOLUCIÓN Sea $x = 2 \tan \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Por lo tanto $dx = 2 \sec^2\theta \, d\theta$ y

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4(\tan^2\theta + 1)} = \sqrt{4 \sec^2\theta} = 2|\sec \theta| = 2 \sec \theta$$

Por esto, se tiene

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = \int \frac{2 \sec^2\theta \, d\theta}{4 \tan^2\theta \cdot 2 \sec \theta} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec \theta}{\tan^2\theta}\, d\theta$$

Para evaluar esta integral trigonométrica se escribe todo en términos de sen θ y cos θ:

$$\frac{\sec\theta}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}$$

Por lo tanto, al hacer la sustitución $u = \operatorname{sen} \theta$, se tiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{u}\right) + C = -\frac{1}{4 \operatorname{sen} \theta} + C \\ &= -\frac{\csc \theta}{4} + C \end{aligned}$$

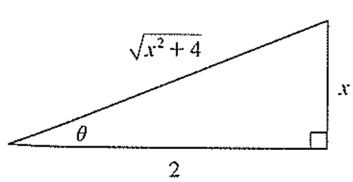


FIGURA 3

$\tan \theta = \dfrac{x}{2}$

Se usa la figura 3 para determinar que $\csc \theta = \sqrt{x^2 + 4}/x$ y, de este modo,

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 4}} = -\frac{\sqrt{x^2 + 4}}{4x} + C$$ □

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sería posible usar aquí la sustitución trigonométrica $x = 2\tan\theta$ (como en el ejemplo 3). Pero la sustitución directa $u = x^2 + 4$ es más simple, porque en seguida $du = 2x\,dx$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+4} + C$$

□

NOTA En el ejemplo 4 se ilustra el hecho de que aun cuando son posibles las sustituciones trigonométricas, es posible que no den la solución más fácil. Primero se debe buscar un método más simple.

EJEMPLO 5 Evalúe $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, donde $a > 0$.

SOLUCIÓN 1 Sea $x = a\sec\theta$, donde $0 < \theta < \pi/2$ o $\pi < \theta < 3\pi/2$. En tal caso $dx = a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\,|\tan\theta| = a\tan\theta$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

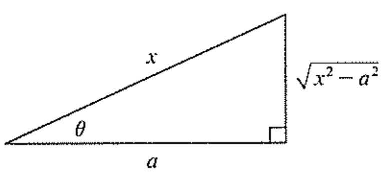


FIGURA 4

$\sec\theta = \frac{x}{a}$

El triángulo de la figura 4 da $\tan\theta = \sqrt{x^2-a^2}/a$, así que se tiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C$$

$$= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + C$$

Al escribir $C_1 = C - \ln a$, se tiene

1 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C_1$$

SOLUCIÓN 2 Para $x > 0$ se puede usar también la sustitución hiperbólica $x = a\cosh t$. Si se emplea la identidad $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$, se tiene

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2(\cosh^2 t - 1)} = \sqrt{a^2\operatorname{senh}^2 t} = a\operatorname{senh} t$$

Puesto que $dx = a\operatorname{senh} t\,dt$, se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\operatorname{senh} t\,dt}{a\operatorname{senh} t} = \int dt = t + C$$

Puesto que $\cosh t = x/a$, se tiene $t = \cosh^{-1}(x/a)$ y

2 $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Aunque las fórmulas 1 y 2 se ven bastante diferentes, en realidad son equivalentes por la fórmula 3.11.4.

□

NOTA Como se ilustra en el ejemplo 5, las sustituciones hiperbólicas se pueden usar en lugar de las sustituciones trigonométricas y, algunas veces, conducen a respuestas más simples. Pero por lo general se usan sustituciones trigonométricas porque las identidades trigonométricas son más familiares que las identidades hiperbólicas.

EJEMPLO 6 Encuentre $\displaystyle\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Primero se nota que $(4x^2+9)^{3/2} = (\sqrt{4x^2+9})^3$, de modo que la sustitución trigonométrica es apropiada. Aunque $\sqrt{4x^2+9}$ no es realmente una de las expresiones de la tabla de sustituciones trigonométricas, se convierte en una de ellas si se realiza la sustitución preliminar $u = 2x$. Cuando se combina esto con la sustitución de la tangente, se tiene $x = \frac{3}{2}\tan\theta$, que da $dx = \frac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta$ y

$$\sqrt{4x^2+9} = \sqrt{9\tan^2\theta + 9} = 3\sec\theta$$

Cuando $x = 0$, $\tan\theta = 0$, por lo tanto $\theta = 0$; cuando $x = 3\sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}$, así que $\theta = \pi/3$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx &= \int_0^{\pi/3} \frac{\frac{27}{8}\tan^3\theta}{27\sec^3\theta}\,\tfrac{3}{2}\sec^2\theta\,d\theta \\
&= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\tan^3\theta}{\sec\theta}\,d\theta = \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= \tfrac{3}{16}\int_0^{\pi/3} \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta
\end{aligned}$$

Ahora se sustituye $u = \cos\theta$ de modo que $du = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta$. Cuando $\theta = 0$, $u = 1$; cuando $\theta = \pi/3$, $u = \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx &= -\tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} \frac{1-u^2}{u^2}\,du = \tfrac{3}{16}\int_1^{1/2} (1-u^{-2})\,du \\
&= \tfrac{3}{16}\left[u + \frac{1}{u}\right]_1^{1/2} = \tfrac{3}{16}\left[\left(\tfrac{1}{2}+2\right) - (1+1)\right] = \tfrac{3}{32}
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Se puede transformar el integrando en una función para la cual la sustitución trigonométrica es apropiada, completando primero el cuadrado bajo el signo de la raíz:

$$\begin{aligned}
3 - 2x - x^2 &= 3 - (x^2 + 2x) = 3 + 1 - (x^2 + 2x + 1) \\
&= 4 - (x+1)^2
\end{aligned}$$

Esto hace pensar en que se realice la sustitución $u = x + 1$. Después $du = dx$ y $x = u - 1$, de esa manera,

$$\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{u-1}{\sqrt{4-u^2}}\,du$$

▨ En la figura 5 se muestran las gráficas del integrando del ejemplo 7 y su integral indefinida (con $C = 0$). ¿Cuál es cuál?

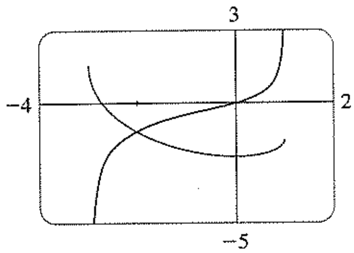


FIGURA 5

Ahora se sustituye $u = 2\,\text{sen}\,\theta$, y se obtiene $du = 2\cos\theta\,d\theta$ y $\sqrt{4-u^2} = 2\cos\theta$, de tal manera,

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx &= \int \frac{2\,\text{sen}\,\theta - 1}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta \\ &= \int (2\,\text{sen}\,\theta - 1)\,d\theta \\ &= -2\cos\theta - \theta + C \\ &= -\sqrt{4-u^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= -\sqrt{3-2x-x^2} - \text{sen}^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C\end{aligned}$$ ☐

7.3 EJERCICIOS

1–3 Evalúe la integral por medio de la sustitución trigonométrica indicada. Bosqueje y marque el triángulo rectángulo relacionado.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-9}}\,dx;\quad x = 3\sec\theta$

2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx;\quad x = 3\,\text{sen}\,\theta$

3. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}\,dx;\quad x = 3\tan\theta$

4–30 Evalúe la integral.

4. $\displaystyle\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\,dx$

5. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{t^3\sqrt{t^2-1}}\,dt$

6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{25-x^2}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+100}}\,dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$

10. $\displaystyle\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\,dt$

11. $\displaystyle\int \sqrt{1-4x^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^3}\,dx$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{5-u^2}}$

15. $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{\sqrt{2}/3}^{2/3} \frac{dx}{x^5\sqrt{9x^2-1}}$

17. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{[(ax)^2-b^2]^{3/2}}$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int \frac{t}{\sqrt{25-t^2}}\,dt$

21. $\displaystyle\int_0^{0.6} \frac{x^2}{\sqrt{9-25x^2}}\,dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx$

23. $\displaystyle\int \sqrt{5+4x-x^2}\,dx$

24. $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-6t+13}}$

25. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3+4x-4x^2)^{3/2}}\,dx$

27. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\,dx$

28. $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^4}\,dx$

30. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1+\text{sen}^2 t}}\,dt$

31. (a) Use la sustitución trigonométrica para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

(b) Use la sustitución hiperbólica $x = a\,\text{senh}\,t$ para mostrar que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \text{senh}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Estas fórmulas se relacionan mediante la fórmula 3.11.3.

32. Evalúe

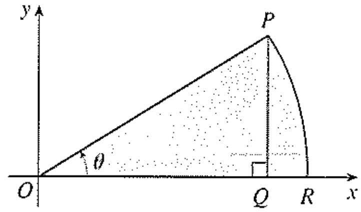
$$\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,dx$$

(a) por sustitución trigonométrica.
(b) mediante la sustitución hiperbólica $x = a\,\text{senh}\,t$.

33. Encuentre el valor promedio de $f(x) = \sqrt{x^2-1}/x$, $1 \leq x \leq 7$.

34. Determine el área de la región acotada por la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

35. Demuestre la fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ para el área de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ. [*Sugerencia*: suponga que $0 < \theta < \pi/2$ y coloque el centro del círculo en el origen de modo que tenga la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Después A es la suma del área del triángulo POQ y el área de la región PQR en la figura.]



36. Evalúe la integral

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 2}}$$

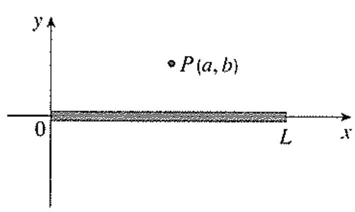
Grafique el integrando y su integral indefinida en la misma pantalla y compruebe que su respuesta es razonable.

37. Use una gráfica para aproximar las raíces de la ecuación $x^2\sqrt{4 - x^2} = 2 - x$. Luego aproxime el área acotada por la curva $y = x^2\sqrt{4 - x^2}$ y la recta $y = 2 - x$.

38. Una varilla con carga de longitud L produce un campo eléctrico en el punto $P(a, b)$ dado por

$$E(P) = \int_{-a}^{L-a} \frac{\lambda b}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + b^2)^{3/2}}\, dx$$

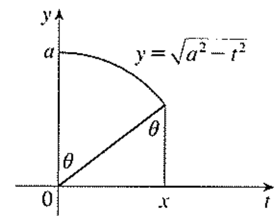
donde λ es la densidad de carga por longitud unitaria en la varilla y ε_0 es la permisividad del espacio libre (véase la figura). Evalúe la integral para determinar una expresión para el campo eléctrico $E(P)$.



39. (a) Aplique la sustitución trigonométrica para comprobar que

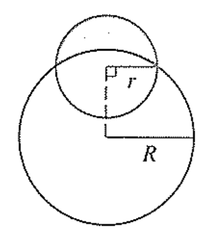
$$\int_0^x \sqrt{a^2 - t^2}\, dt = \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a) + \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

(b) Aplique la figura para proporcionar interpretaciones trigonométricas de ambos términos en el lado derecho de la ecuación del inciso (a).



40. La parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ divide en disco $x^2 + y^2 \leq 8$ en dos partes. Hallar el área de ambas partes.

41. Determine el área de la región sombreada creciente (llamada *luna*) acotada por los arcos de círculos con radios r y R. (Véase la figura.)



42. Un tanque de almacenamiento de agua tiene la forma de un cilindro circular con diámetro de 10 ft. Se monta de modo que las secciones transversales circulares sean verticales. Si la profundidad del agua es 7 ft, ¿qué porcentaje de la capacidad total se está utilizando?

43. Se genera un toroide al hacer girar el círculo $x^2 + (y - R)^2 = r^2$ respecto al eje x. Encuentre el volumen encerrado por el toroide.

7.4 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES POR FRACCIONES PARCIALES

En esta sección se muestra cómo integrar cualquier función racional (una relación de polinomios) expresándola como una suma de fracciones más simples, llamadas *fracciones parciales*, que ya sabe cómo integrar. Para ilustrar el método, observe que tomando las fracciones $2/(x - 1)$ y $1/(x + 2)$ para un denominador común, se obtiene

$$\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2(x+2) - (x-1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+5}{x^2 + x - 2}$$

Si ahora se invierte el procedimiento, se ve cómo integrar la función del lado derecho de esta ecuación:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$$
$$= 2\ln|x-1| - \ln|x+2| + C$$

Para ver cómo funciona en general el método de fracciones parciales, considere una función racional

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Es posible expresar f como una suma de fracciones más simples, siempre que el grado de P sea menor que el grado de Q. Esta clase de función racional se llama *propia*. Recuerde que si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$, por lo tanto el grado de P es n y se escribe gra$(P) = n$.

Si f es impropia, es decir, gra$(P) \geqslant$ gra(Q), después se debe emprender el paso preliminar de dividir Q entre P (por división larga) hasta obtener un residuo $R(x)$ tal que gra$(R) <$ gra(Q). El enunciado de la división es

$$\boxed{1} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde S y R son también polinomios.

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, algunas veces este paso preliminar es todo lo que se requiere.

EJEMPLO 1 Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

$$\begin{array}{r l}
 & x^2 + x + 2 \\
x-1\,) & x^3 \qquad\;\; + x \\
 & x^3 - x^2 \\
 & \quad x^2 + x \\
 & \quad x^2 - x \\
 & \qquad 2x \\
 & \qquad 2x - 2 \\
 & \qquad\quad 2
\end{array}$$

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador es mayor que el del denominador, primero se efectúa la división larga. Esto permite escribir

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx = \int \left(x^2 + x + 2 + \frac{2}{x-1}\right) dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + 2\ln|x-1| + C$$

□

El siguiente paso es factorizar el denominador $Q(x)$ tanto como sea posible. Es posible demostrar que cualquier polinomio Q se puede factorizar como un producto de factores lineales (de la forma $ax+b$) y los factores cuadráticos irreducibles (de la forma ax^2+bx+c, donde $b^2 - 4ac < 0$). Por ejemplo, si $Q(x) = x^4 - 16$, se podría factorizar como

$$Q(x) = (x^2-4)(x^2+4) = (x-2)(x+2)(x^2+4)$$

El tercer paso es expresar la función racional propia $R(x)/Q(x)$ (de la ecuación 1) como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \qquad \text{o} \qquad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Un teorema en álgebra garantiza que siempre es posible hacer esto. Se explican los detalles para los cuatro casos que ocurren.

CASO I ▪ El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distintos.

Esto significa que se puede escribir

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)\cdots(a_kx + b_k)$$

donde ningún factor se repite (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, \ldots, A_k$ tales que

$$\boxed{2} \qquad \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

Estas constantes se pueden determinar como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador es menor que el del denominador, no es necesario dividir. El denominador se factoriza como

$$2x^3 + 3x^2 - 2x = x(2x^2 + 3x - 2) = x(2x - 1)(x + 2)$$

Puesto que el denominador tiene tres factores lineales distintos, la descomposición del integrando (2) en fracciones parciales tiene la forma

$$\boxed{3} \qquad \frac{x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x - 1} + \frac{C}{x + 2}$$

▪ Otro método para hallar A, B y C se da en la nota después de este ejemplo.

Para determinar los valores A, B y C, se multiplican ambos lados de esta ecuación por el producto de los denominadores, $x(2x - 1)(x + 2)$, y se obtiene

$$\boxed{4} \qquad x^2 + 2x - 1 = A(2x - 1)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(2x - 1)$$

Al desarrollar el lado derecho de la ecuación 4 y escribirlo en la forma estándar de polinomios, se obtiene

$$\boxed{5} \qquad x^2 + 2x - 1 = (2A + B + 2C)x^2 + (3A + 2B - C)x - 2A$$

Los polinomios de la ecuación 5 son idénticos, de modo que sus coeficientes deben ser iguales. El coeficiente de x^2 en el lado derecho, $2A + B + 2C$, debe ser igual al coeficiente de x^2 en el lado izquierdo; a saber, 1. Del mismo modo, los coeficientes de x son iguales y los términos constantes son iguales. Esto da el siguiente sistema de ecuaciones para A, B y C:

$$\begin{aligned} 2A + B + 2C &= 1 \\ 3A + 2B - C &= 2 \\ -2A \qquad\qquad &= -1 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{5}$, y $C = -\frac{1}{10}$, y, por lo tanto,

■ Se podría comprobar el trabajo llevando los términos a un factor común y sumándolos.

$$\int \frac{x^2 + 2x - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x + 2}\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln|x| + \tfrac{1}{10}\ln|2x - 1| - \tfrac{1}{10}\ln|x + 2| + K$$

■ En la figura 1 se muestran las gráficas del integrando del ejemplo 2 y su integral indefinida (con $K = 0$). ¿Cuál es cuál?

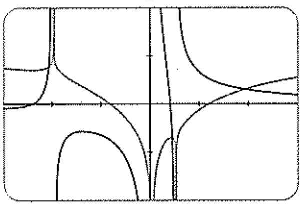


FIGURA 1

En la integración del término medio se ha hecho la sustitución mental $u = 2x - 1$, que da $du = 2\,dx$ y $dx = du/2$. □

NOTA Se puede usar otro método para hallar los coeficientes de A, B y C en el ejemplo 2. La ecuación cuatro es una identidad; se cumple para todo valor de x. Seleccione valores de x que simplifiquen la ecuación. Si $x = 0$ en la ecuación 4, entonces los términos segundo y tercero del lado derecho desaparecen y la ecuación se convierte en $-2A = -1$, o bien $A = \frac{1}{2}$. Del mismo modo, $x = \frac{1}{2}$ da $5B/4 = \frac{1}{4}$ y $x = -2$ da $10C = -1$, por lo tanto $B = \frac{1}{5}$ y $C = -\frac{1}{10}$. (Se podría objetar que la ecuación 3 no es válida para $x = 0$, $\frac{1}{2}$, o -2, de este modo ¿por qué la ecuación 4 debe ser válida para estos valores? De hecho, la ecuación 4 es cierta para todos los valores de x, incluso $x = 0$, $\frac{1}{2}$, y -2. Véase en el ejercicio 69 la razón).

EJEMPLO 3 Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, donde $a \neq 0$.

SOLUCIÓN El método de fracciones parciales da

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x - a)(x + a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

y, por lo tanto

$$A(x + a) + B(x - a) = 1$$

Con el método de la nota precedente, se escribe $x = a$ en esta ecuación y se obtiene $A(2a) = 1$, así que $A = 1/(2a)$. Si se escribe $x = -a$, se obtiene $B(-2a) = 1$, por lo tanto, $B = -1/(2a)$. Así,

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\int \left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left(\ln|x - a| - \ln|x + a|\right) + C$$

Puesto que $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, se puede escribir la integral como

$$\boxed{6} \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

Véase en los ejercicios 55-56 las formas de usar la fórmula 6. □

CASO II ■ **$Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.** Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces; es decir, $(a_1x + b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$. Por lo tanto en lugar del término simple $A_1/(a_1x + b_1)$

en la ecuación 2, se usaría

$$\boxed{7} \qquad \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

A modo de ilustración, se podría escribir

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

pero se prefiere resolver en detalle un ejemplo más simple.

EJEMPLO 4 Encuentre $\int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx$.

SOLUCIÓN El primer paso es dividir. El resultado de la división larga es

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = x + 1 + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

El segundo paso es factorizar el denominador $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$. Puesto que $Q(1) = 0$, se sabe que $x - 1$ es un factor y se obtiene

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - x + 1 &= (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x-1)(x+1) \\ &= (x-1)^2(x+1) \end{aligned}$$

Puesto que el factor lineal $x - 1$ aparece dos veces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{4x}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

Al multiplicar el mínimo común denominador, $(x-1)^2(x+1)$, se obtiene

$$\boxed{8} \qquad \begin{aligned} 4x &= A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \\ &= (A + C)x^2 + (B - 2C)x + (-A + B + C) \end{aligned}$$

Otra forma de hallar los coeficientes:
Escriba $x = 1$ in (8): $B = 2$.
Escriba $x = -1$: $C = -1$.
Escriba $x = 0$: $A = B + C = 1$.

Ahora se igualan los coeficientes:

$$\begin{aligned} A \qquad + \ C &= 0 \\ B - 2C &= 4 \\ -A + B + \ C &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver el sistema se obtiene $A = 1$, $B = 2$ y $C = -1$, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx &= \int \left[x + 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+1} \right] dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \ln|x+1| + K \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \frac{2}{x-1} + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + K \end{aligned}$$

□

CASO III ▪ **$Q(x)$ contiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite.** Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$, por lo tanto, además de las fracciones parciales en las ecuaciones 2 y 7, la expresión para $R(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\boxed{9} \qquad \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

donde A y B son constantes por determinar. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = x/[(x-2)(x^2+1)(x^2+4)]$ tiene una descomposición en fracciones parciales de la forma

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

El término dado en (9) se puede integrar completando el cuadrado y con la fórmula

$$\boxed{10} \qquad \boxed{\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C}$$

V EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$ no se puede factorizar más, se escribe

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Multiplicando por $x(x^2 + 4)$, se tiene

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes, se obtiene

$$A + B = 2 \qquad C = -1 \qquad 4A = 4$$

Así, $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}\right) dx$$

A fin de integrar el segundo término, se divide en dos partes:

$$\int \frac{x - 1}{x^2 + 4}\,dx = \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx$$

Se hace la sustitución $u = x^2 + 4$ en la primera de estas integrales de modo que $du = 2x\,dx$. Se evalúa la segunda integral por medio de la fórmula 10 con $a = 2$:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2 + 4)}\,dx &= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{x}{x^2 + 4}\,dx - \int \frac{1}{x^2 + 4}\,dx \\ &= \ln|x| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2 + 4) - \tfrac{1}{2}\tan^{-1}(x/2) + K \end{aligned}$$

□

EJEMPLO 6 Evalúe $\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que el grado del numerador *no es menor que* el del denominador, se divide primero y se obtiene

$$\frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3} = 1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}$$

Observe que la ecuación cuadrática $4x^2 - 4x + 3$ es irreducible porque su discriminante es $b^2 - 4ac = -32 < 0$. Esto significa que no se puede factorizar, de modo que no se necesita usar la técnica de fracciones parciales.

Para integrar la función dada se completa el cuadrado en el denominador:

$$4x^2 - 4x + 3 = (2x - 1)^2 + 2$$

Esto hace pensar en hacer la sustitución $u = 2x - 1$. En tal caso, $du = 2\,dx$ y $x = (u + 1)/2$, de tal manera que,

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx &= \int \left(1 + \frac{x - 1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx \\
&= x + \tfrac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u + 1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u - 1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{4}\int \frac{u}{u^2 + 2}\,du - \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{u^2 + 2}\,du \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(u^2 + 2) - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= x + \tfrac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{2}}\right) + C
\end{aligned}$$

□

NOTA En el ejemplo 6 se ilustra el procedimiento general para integrar una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \qquad \text{donde } b^2 - 4ac < 0$$

Se completa el cuadrado en el denominador y luego se hace una sustitución que lleva la integral a la forma

$$\int \frac{Cu + D}{u^2 + a^2}\,du = C\int \frac{u}{u^2 + a^2}\,du + D\int \frac{1}{u^2 + a^2}\,du$$

Después, la primera integral es un logaritmo, y la segunda se expresa en términos de $\tan^{-1}$.

CASO IV ▪ $Q(x)$ **contiene un factor cuadrático irreducible repetido.**

Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, luego en lugar de la única fracción parcial (9), la suma

$$\boxed{11} \qquad \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

ocurre en la descomposición en fracciones parciales de $R(x)/Q(x)$. Cada uno de los términos en (11) se puede integrar completando primero el cuadrado.

▧ Sería extremadamente tedioso determinar a mano los valores numéricos de los coeficientes en el ejemplo 7. Sin embargo, mediante la mayor parte de los sistemas algebraicos computacionales, se pueden hallar los valores numéricos de manera muy rápida. Por ejemplo, el comando de Maple

convert(f, parfrac, x)

o el comando de Mathematica

Apart[f]

da los siguientes valores:

$$A = -1, \quad B = \tfrac{1}{8}, \quad C = D = -1,$$
$$E = \tfrac{15}{8}, \quad F = -\tfrac{1}{8}, \quad G = H = \tfrac{3}{4},$$
$$I = -\tfrac{1}{2}, \quad J = \tfrac{1}{2}$$

EJEMPLO 7 Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$

SOLUCIÓN

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{x^2+1} + \frac{Gx+H}{(x^2+1)^2} + \frac{Ix+J}{(x^2+1)^3} \qquad \square$$

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$.

SOLUCIÓN La forma de la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

Al multiplicar por $x(x^2+1)^2$, se tiene

$$\begin{aligned}
-x^3 + 2x^2 - x + 1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\
&= A(x^4 + 2x^2 + 1) + B(x^4 + x^2) + C(x^3 + x) + Dx^2 + Ex \\
&= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C+E)x + A
\end{aligned}$$

Si se igualan los coeficientes, se obtiene el sistema

$$A + B = 0 \qquad C = -1 \qquad 2A + B + D = 2 \qquad C + E = -1 \qquad A = 1$$

que tiene la solución $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$, $D = 1$ y $E = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\
&= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} \\
&= \ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - \tan^{-1}x - \frac{1}{2(x^2+1)} + K \qquad \square
\end{aligned}$$

▧ En los términos segundo y cuarto se hizo la sustitución mental $u = x^2 + 1$.

Se nota que a veces se pueden evitar las fracciones parciales cuando se integra una función racional. Por ejemplo, aunque la integral

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx$$

se podría evaluar por el método del caso III, es mucho más fácil observar que si $u = x(x^2+3) = x^3+3x$, entonces $du = (3x^2+3)\,dx$ y, por lo tanto,

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^2+3)}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|x^3+3x| + C$$

RACIONALIZACIÓN DE SUSTITUCIONES

Algunas funciones no racionales se pueden cambiar a funciones racionales por medio de sustituciones apropiadas. En particular, cuando un integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt[n]{g(x)}$, en tal caso la sustitución $u = \sqrt[n]{g(x)}$ puede ser efectiva. Otros ejemplos aparecen en los ejercicios.

EJEMPLO 9 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = \sqrt{x+4}$. Después $u^2 = x+4$, así que $x = u^2-4$ y $dx = 2u\,du$. Entonces,

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = \int \frac{u}{u^2-4}\,2u\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2-4}\,du$$
$$= 2\int \left(1 + \frac{4}{u^2-4}\right)du$$

Se puede evaluar esta integral, ya sea factorizando u^2-4 como $(u-2)(u+2)$ y por medio de las fracciones parciales o al usar la fórmula 6 con $a = 2$:

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = 2\int du + 8\int \frac{du}{u^2-4}$$
$$= 2u + 8\cdot\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{u-2}{u+2}\right| + C$$
$$= 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C$$

□

7.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función (como en el ejemplo 7). No determine los valores numéricos de los coeficientes.

1. (a) $\dfrac{2x}{(x+3)(3x+1)}$ (b) $\dfrac{1}{x^3+2x^2+x}$

2. (a) $\dfrac{x}{x^2+x-2}$ (b) $\dfrac{x^2}{x^2+x+2}$

3. (a) $\dfrac{x^4+1}{x^5+4x^3}$ (b) $\dfrac{1}{(x^2-9)^2}$

4. (a) $\dfrac{x^3}{x^2+4x+3}$ (b) $\dfrac{2x+1}{(x+1)^3(x^2+4)^2}$

5. (a) $\dfrac{x^4}{x^4-1}$ (b) $\dfrac{t^4+t^2+1}{(t^2+1)(t^2+4)^2}$

6. (a) $\dfrac{x^4}{(x^3+x)(x^2-x+3)}$ (b) $\dfrac{1}{x^6-x^3}$

7–38 Evalúe la integral.

7. $\displaystyle\int \frac{x}{x-6}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{r^2}{r+4}\,dr$

9. $\displaystyle\int \frac{x-9}{(x+5)(x-2)}\,dx$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{(t+4)(t-1)}\,dt$

11. $\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

12. $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+3x+2}\,dx$

13. $\int \frac{ax}{x^2-bx}\,dx$

14. $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\,dx$

15. $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\,dx$

16. $\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\,dx$

17. $\int_1^2 \frac{4y^2-7y-12}{y(y+2)(y-3)}\,dy$

18. $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx$

19. $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)}\,dx$

20. $\int \frac{x^2-5x+6}{(2x+1)(x-2)^2}\,dx$

21. $\int \frac{x^2+4}{x^2+4}\,dx$

22. $\int \frac{ds}{s^2(s-1)^2}$

23. $\int \frac{5x^2+3x-2}{x^3+2x^2}\,dx$

24. $\int \frac{x^2-x+6}{x^3+3x}\,dx$

25. $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\,dx$

26. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

27. $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

28. $\int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

29. $\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$

30. $\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x^2+2}\,dx$

31. $\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$

32. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+13}\,dx$

33. $\int_0^1 \frac{x^3+2x}{x^4+4x^2+3}\,dx$

34. $\int \frac{x^3}{x^3+1}\,dx$

35. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)^2}$

36. $\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^5+5x^3+5x}\,dx$

37. $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\,dx$

38. $\int \frac{x^3+2x^2+3x-2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$

39–50 Haga una sustitución para expresar el integrando como una función racional y después evalúe la integral.

39. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\,dx$

40. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+3}+x}$

41. $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x}}{x-4}\,dx$

42. $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$

43. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}}\,dx$

44. $\int_{1/3}^3 \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\,dx$

45. $\int \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$ [*Sugerencia*: sustituya $u = \sqrt[6]{x}$.]

46. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x}\,dx$

47. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$

48. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x}\,dx$

49. $\int \frac{\sec^2 t}{\tan^2 t+3\tan t+2}\,dx$

50. $\int \frac{e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+1)}\,dx$

51–52 Use la integración por partes, junto con las técnicas de esta sección, para evaluar la integral.

51. $\int \ln(x^2-x+2)\,dx$

52. $\int x\tan^{-1}x\,dx$

53. Use una gráfica de $f(x) = 1/(x^2-2x-3)$ para decidir si $\int_0^2 f(x)\,dx$ es positiva o negativa. Use la gráfica para dar una estimación aproximada del valor de la integral, y después use las fracciones parciales para encontrar el valor exacto.

54. Grafique $y = 1/(x^3-2x^2)$ y una antiderivada en la misma pantalla.

55–56 Evalúe la integral completando el cuadrado y con la fórmula 6.

55. $\int \frac{dx}{x^2-2x}$

56. $\int \frac{2x+1}{4x^2+12x-7}\,dx$

57. El matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) observó que la sustitución $t = \tan(x/2)$ convierte cualquier función racional de sen x y cos x en una función racional ordinaria de t.

(a) Si $t = \tan(x/2)$, $-\pi < x < \pi$, bosqueje el triángulo rectángulo o use identidades trigonométricas para mostrar que

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

(b) Muestre que

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$$

(c) Muestre que

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

58–61 Use la sustitución del ejercicio 57 para transformar el integrando en una función racional de t y luego evalúe la integral.

58. $\int \frac{dx}{3-5\operatorname{sen} x}$

59. $\int \frac{1}{3\operatorname{sen} x-4\cos x}\,dx$

60. $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{1+\operatorname{sen} x-\cos x}\,dx$

61. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2 + \cos x}\, dx$

62–63 Determine el área de la región bajo la curva dada de 1 a 2.

62. $y = \dfrac{1}{x^3 + x}$

63. $y = \dfrac{x^2 + 1}{3x - x^2}$

64. Encuentre el volumen del sólido resultante si la región bajo la curva $y = 1/(x^2 + 3x + 2)$ de $x = 0$ a $x = 1$ se hace girar respecto a (a) el eje x y (b) el eje y.

65. Una manera de desacelerar el crecimiento de una población de insectos sin usar pesticidas es introducir en la población varios machos estériles que se aparean con hembras fértiles, pero no producen descendencia. Si P representa el número de insectos hembras en una población, S el número de machos estériles introducidos cada generación y r la rapidez de crecimiento natural de la población, en tal caso la población de hembras se relaciona con el tiempo t mediante

$$t = \int \frac{P + S}{P[(r - 1)P - S]}\, dP$$

Suponga que una población de insectos con 10 000 hembras crece con una proporción de $r = 0.10$ y se agregan 900 machos estériles. Evalúe la integral para obtener una ecuación que relacione la población de hembras con el tiempo. (Observe que la ecuación resultante no se puede resolver de manera explícita para P.)

66. Factorice $x^4 + 1$ como una diferencia de cuadrados sumando y restando primero la misma cantidad. Use esta factorización para evaluar $\int 1/(x^4 + 1)\, dx$.

CAS 67. (a) Use un sistema algebraico computacional para hallar la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{4x^3 - 27x^2 + 5x - 32}{30x^5 - 13x^4 + 50x^3 - 286x^2 - 299x - 70}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\, dx$ (a mano) y compare con el resultado de usar el CAS para integrar f de manera directa. Comente acerca de cualquier discrepancia.

CAS 68. (a) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función

$$f(x) = \frac{12x^5 - 7x^3 - 13x^2 + 8}{100x^6 - 80x^5 + 116x^4 - 80x^3 + 41x^2 - 20x + 4}$$

(b) Use el inciso (a) para hallar $\int f(x)\, dx$ y grafique f y su integral indefinida en la misma pantalla.

(c) Use la gráfica de f para descubrir las características principales de la gráfica de $\int f(x)\, dx$.

69. Suponga que F, G, y Q son polinomios y

$$\frac{F(x)}{Q(x)} = \frac{G(x)}{Q(x)}$$

para toda x excepto cuando $Q(x) = 0$. Demuestre que $F(x) = G(x)$ para toda x. [*Sugerencia:* use la continuidad.]

70. Si f es una función cuadrática tal que $f(0) = 1$ y

$$\int \frac{f(x)}{x^2(x + 1)^3}\, dx$$

es una función racional, encuentre el valor de $f'(0)$.

7.5 ESTRATEGIA PARA INTEGRACIÓN

Como se ha visto, la integración es más desafiante que la derivación. Para hallar la derivada de una función, resulta evidente cuál fórmula de derivación se debe aplicar. Pero podría no ser obvio con la técnica que se debe usar para integrar una función dada.

Hasta ahora se han aplicado técnicas individuales en cada sección. Por ejemplo, normalmente se usó sustitución en los ejercicios 5.5, integración por partes en los ejercicios 7.1 y fracciones parciales en los ejercicios 7.4. Pero en esta sección se presenta una colección de diversas integrales en orden aleatorio y la dificultad principal es reconocer qué técnica o fórmula usar. Ninguna regla invariable se puede dar en cuanto a qué método se aplica en una determinada situación, pero se da cierta orientación sobre la estrategia que podría resultar útil.

Un prerrequisito para la selección de estrategia es conocer las fórmulas básicas de integración. En la siguiente tabla se han reunido las integrales de la lista previa junto con varias fórmulas adicionales que se han aprendido en este capítulo. La mayor parte se deben memorizar. Es útil conocer todas, pero las marcadas con un asterisco no necesitan ser memorizadas, puesto que se deducen con facilidad. La fórmula 19 se puede evitar si se emplean fracciones parciales, y en lugar de la fórmula 20, se pueden usar sustituciones trigonométricas.

TABLA DE FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN Se han omitido las constantes de integración.

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$	**2.** $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert$
3. $\int e^x\,dx = e^x$	**4.** $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$
5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$	**6.** $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$
7. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$	**8.** $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$
9. $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x$	**10.** $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x$
11. $\int \sec x\,dx = \ln\lvert \sec x + \tan x\rvert$	**12.** $\int \csc x\,dx = \ln\lvert \csc x - \cot x\rvert$
13. $\int \tan x\,dx = \ln\lvert \sec x\rvert$	**14.** $\int \cot x\,dx = \ln\lvert \operatorname{sen} x\rvert$
15. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	**16.** $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
17. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$	**18.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$
***19.** $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$	***20.** $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert$

Una vez que se cuenta con estas fórmulas de integración básicas, si no se ve de inmediato cómo proceder a resolver una determinada integral, se podría probar la siguiente estrategia de cuatro pasos.

1. Simplifique el integrando si es posible A veces el uso de operaciones algebraicas o identidades trigonométricas simplifica el integrando y hace evidente el método de integración. A continuación se dan algunos ejemplos:

$$\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})\,dx = \int (\sqrt{x} + x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta &= \int \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta\,d\theta \\ &= \int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2\theta\,d\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2\,dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x\cos x + \cos^2 x)\,dx \\ &= \int (1 + 2\operatorname{sen} x\cos x)\,dx\end{aligned}$$

2. Busque una sustitución obvia Intente hallar alguna función $u = g(x)$ en el integrando cuya diferencial $du = g'(x)\,dx$ también aparece, además de un factor constante. Por ejemplo, en la integral

$$\int \frac{x}{x^2 - 1}\,dx$$

se observa que si $u = x^2 - 1$, en seguida $du = 2x\,dx$. Por lo tanto, se usa la sustitución $u = x^2 - 1$ en lugar del método de fracciones parciales.

3. Clasifique el integrando de acuerdo con su forma Si los pasos 1 y 2 no han llevado a la solución, en tal caso se echa un vistazo a la forma del integrando $f(x)$.

(a) *Funciones trigonométricas.* Si $f(x)$ es un producto de potencias de sen x y cos x, de tan x y sec x, o de cot x y csc x, después se usan las sustituciones recomendadas en la sección 7.2.

(b) *Funciones racionales.* Si f es una función racional, se usa el procedimiento de la sección 7.4 relacionado con fracciones parciales.

(c) *Integración por partes.* Si $f(x)$ es un producto de una potencia de x (o un polinomio) y una función trascendental (como una función trigonométrica, exponencial o logarítmica), por lo tanto se prueba la integración por partes, y se eligen u y dv de acuerdo con la recomendación dada en la sección 7.1. Si considera a las funciones de los ejercicios 7.1, se verá que la mayor parte de ellas son del tipo recién descrito.

(d) *Radicales.* Los tipos particulares de sustituciones se recomiendan cuando aparecen ciertos radicales.

(i) Si $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ se usa la sustitución trigonométrica de acuerdo con la tabla de la sección 7.3.

(ii) Si ocurre $\sqrt[n]{ax + b}$ se usa la sustitución de racionalización $u = \sqrt[n]{ax + b}$. De una manera más general, esto funciona a veces para $\sqrt[n]{g(x)}$.

4. Inténtelo una vez más Si los tres primeros pasos no producen respuesta, recuerde que hay básicamente sólo dos métodos de integración: sustitución y por partes.

(a) *Pruebe la sustitución.* Incluso si ninguna sustitución es obvia (paso 2), cierta inspiración o inventiva (o incluso desesperación) podría sugerir una sustitución apropiada.

(b) *Pruebe por partes.* Aunque la integración por partes emplea la mayor parte del tiempo en productos de la forma descrita en el paso 3(c), a veces es efectiva en funciones simples. En relación con la sección 7.1, se ve que funciona en $\tan^{-1}x$, $\operatorname{sen}^{-1}x$, $\ln x$, y todas éstas son funciones inversas.

(c) *Realice algunas operaciones en el integrando.* Las operaciones algebraicas (quizá racionalizar el denominador o usar identidades trigonométricas) podrían ser útiles para transformar el integrando en una forma más fácil. Estas operaciones pueden ser más sustanciales que en el paso 1, y podrían implicar cierto ingenio. A continuación se da un ejemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{1}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}\,dx = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx$$

$$= \int \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \left(\csc^2 x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) dx$$

(d) *Relacione el problema con problemas previos.* Cuando se ha acumulado cierta experiencia en la integración, hay la posibilidad de usar un método en una integral dada similar a uno que ya se ha empleado en una integral previa. O incluso se podría expresar la integral dada en términos de una previa. Por ejemplo, $\int \tan^2 x \sec x\,dx$

es una integral desafiante, pero si se emplea la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, se puede escribir

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

y si $\int \sec^3 x \, dx$ ha sido evaluada antes (véase el ejemplo 8 en la sección 7.2), después ese cálculo se puede usar en el problema actual.

(e) *Use varios métodos.* Algunas veces se requieren dos o tres métodos para evaluar una integral. La evaluación podría requerir varias sustituciones sucesivas de diferentes tipos, o podría ser necesario combinar la integración por partes con una o más sustituciones.

En los siguientes ejemplos se indica una manera de cómo enfrentar el problema, pero no resuelve por completo la integral.

EJEMPLO 1 $\displaystyle\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx$

En el paso 1 se reescribe la integral:

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

La integral ahora es de la forma $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ con m impar, así que se puede usar la recomendación de la sección 7.2.

De manera alternativa, si en el paso 1 se hubiera escrito

$$\int \frac{\tan^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x}\frac{1}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx$$

por lo tanto se podría haber continuado como sigue con la sustitución $u = \cos x$:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^6 x}\, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^6 x} \operatorname{sen} x \, dx = \int \frac{1 - u^2}{u^6}(-du)$$

$$= \int \frac{u^2 - 1}{u^6}\, du = \int (u^{-4} - u^{-6})\, du$$ □

EJEMPLO 2 $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\, dx$

De acuerdo con (ii) en el paso 3(d), se sustituye $u = \sqrt{x}$. Entonces $x = u^2$, por lo tanto, $dx = 2u\, du$ y

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx = 2\int u e^u \, du$$

El integrando es ahora un producto de u y la función trascendental e^u de modo que se puede integrar por partes. □

EJEMPLO 3 $\int \frac{x^5+1}{x^3-3x^2-10x}\,dx$

Ninguna simplificación algebraica o sustitución es obvia, de modo que aquí no aplican los pasos 1 y 2. El integrando es una función racional, así que se aplica el procedimiento de la sección 7.4, sin olvidar que el primer paso es dividir. □

EJEMPLO 4 $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Aquí todo lo que se necesita es el paso 2. Se sustituye $u = \ln x$ porque su diferencial es $du = dx/x$, la cual aparece en la integral. □

EJEMPLO 5 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

Aunque aquí funciona la sustitución de racionalización

$$u = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

[(ii) paso 3(d)], conduce a una función de racionalización muy complicada. Un método más fácil es hacer algunas operaciones algebraicas [como en el paso 1 o el paso 4(c)]. Al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{1-x}$, se tiene

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx &= \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= \operatorname{sen}^{-1}x + \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$ □

¿SE PUEDEN INTEGRAR TODAS LAS FUNCIONES CONTINUAS?

Surge la pregunta: ¿La estrategia de integración permitirá hallar la integral de toda función continua? Por ejemplo, ¿es posible emplearla para evaluar $\int e^{x^2}dx$? La respuesta es no, por lo menos no en términos de las funciones con las que se está familiarizado.

Las funciones con las que se ha estado tratando en este libro se llaman **funciones elementales**. Éstas son polinomios, funciones racionales, funciones de potencia (x^a), funciones exponenciales (a^x), funciones logarítmicas, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas, funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas, y todas las funciones que se pueden obtener de éstas mediante las cinco operaciones de suma, resta, multiplicación, división y composición. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^3+2x-1}} + \ln(\cosh x) - xe^{\operatorname{sen} 2x}$$

es una función elemental.

Si f es una función elemental, entonces f' es una función elemental pero $\int f(x)\,dx$ no necesariamente es una función elemental. Considere $f(x) = e^{x^2}$. Puesto que f es continua, su integral existe, y si se define la función F por

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2}dt$$

por lo tanto de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo se sabe que

$$F'(x) = e^{x^2}$$

Así, $f(x) = e^{x^2}$ tiene una antiderivada F, pero se ha demostrado que F no es una función elemental. Esto significa que sin importar el esfuerzo realizado, nunca se logrará evaluar $\int e^{x^2}\,dx$ en términos de las funciones conocidas. (No obstante, en el capítulo 11 se verá cómo expresar $\int e^{x^2}\,dx$ como una serie infinita.) Lo mismo se puede decir de las siguientes integrales:

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx \qquad \int \operatorname{sen}(x^2)\,dx \qquad \int \cos(e^x)\,dx$$

$$\int \sqrt{x^3+1}\,dx \qquad \int \frac{1}{\ln x}\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$$

De hecho, la mayoría de las funciones elementales no tienen antiderivadas elementales. Sin embargo, puede estar seguro de que todas las integrales de los siguientes ejercicios son funciones elementales.

7.5 EJERCICIOS

1–80 Evalúe la integral

1. $\int \cos x(1 + \operatorname{sen}^2 x)dx$
2. $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x}\,dx$
3. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \sec x}{\tan x}\,dx$
4. $\int \tan^3 \theta\, d\theta$
5. $\int_0^2 \frac{2t}{(t-3)^2}\,dt$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{3 - x^4}}\,dx$
7. $\int_{-1}^{1} \frac{e^{\arctan y}}{1 + y^2}\,dy$
8. $\int x \csc x \cot x\,dx$
9. $\int_1^3 r^4 \ln r\,dr$
10. $\int_0^4 \frac{x-1}{x^2 - 4x - 5}\,dx$
11. $\int \frac{x-1}{x^2 - 4x + 5}\,dx$
12. $\int \frac{x}{x^4 + x^2 + 1}\,dx$
13. $\int \operatorname{sen}^3\theta \cos^5\theta\,d\theta$
14. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$
15. $\int \frac{dx}{(1 - x^2)^{3/2}}$
16. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$
17. $\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx$
18. $\int \frac{e^{2t}}{1 + e^{4t}}\,dt$
19. $\int e^{x+e^x}dx$
20. $\int e^2\,dx$
21. $\int \arctan \sqrt{x}\,dx$
22. $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + (\ln x)^2}}\,dx$
23. $\int_0^1 (1 + \sqrt{x})^8\,dx$
24. $\int \ln(x^2 - 1)\,dx$
25. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 2x - 8}\,dx$
26. $\int \frac{3x^2 - 2}{x^3 - 2x - 8}\,dx$
27. $\int \frac{dx}{1 + e^x}\,dx$
28. $\int \operatorname{sen} \sqrt{at}\,dt$
29. $\int_0^5 \frac{3w - 1}{w + 2}\,dw$
30. $\int_{-2}^{2} |x^2 - 4x|\,dx$
31. $\int \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}\,dx$
32. $\int \frac{\sqrt{2x - 1}}{2x + 3}\,dx$
33. $\int \sqrt{3 - 2x - x^2}\,dx$
34. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + 4\cot x}{4 - \cot x}\,dx$
35. $\int_{-1}^{1} x^8 \operatorname{sen} x\,dx$
36. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 3x\,dx$
37. $\int_0^{\pi/4} \cos^2\theta \tan^2\theta\,d\theta$
38. $\int_0^{\pi/4} \tan^5\theta \sec^3\theta\,d\theta$
39. $\int \frac{\operatorname{sen}\theta \tan\theta}{\sec^2\theta - \sec\theta}\,d\theta$
40. $\int \frac{1}{\sqrt{4y^2 - 4y - 3}}\,dy$
41. $\int \theta \tan^2\theta\,d\theta$
42. $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,dx$
43. $\int e^x\sqrt{1 + e^x}\,dx$
44. $\int \sqrt{1 + e^x}\,dx$
45. $\int x^5 e^{-x^3}dx$
46. $\int \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}\,dx$
47. $\int x^3(x - 1)^{-4}\,dx$
48. $\int \frac{x}{x^4 - a^4}\,dx$

49. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x+1}}\,dx$

50. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x+1}}\,dx$

51. $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+1}}\,dx$

52. $\int \frac{dx}{x(x^4+1)}$

53. $\int x^2 \operatorname{senh} mx\,dx$

54. $\int (x+\operatorname{sen} x)^2\,dx$

55. $\int \frac{dx}{x+x\sqrt{x}}$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x\sqrt{x}}$

57. $\int x\sqrt[3]{x+c}\,dx$

58. $\int \frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

59. $\int \cos x\cos^3(\operatorname{sen} x)\,dx$

60. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2-1}}$

61. $\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\,dx$

62. $\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$

63. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^4 x}\,dx$

64. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\ln(\tan x)}{\operatorname{sen} x\cos x}\,dx$

65. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx$

66. $\int_2^3 \frac{u^3+1}{u^3-u^2}\,du$

67. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$

68. $\int \frac{1}{1+2e^x-e^{-x}}\,dx$

69. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

70. $\int \frac{\ln(x+1)}{x^2}\,dx$

71. $\int \frac{x+\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

72. $\int \frac{4^x+10^x}{2^x}\,dx$

73. $\int \frac{1}{(x-2)(x^2+4)}\,dx$

74. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(2+\sqrt{x})^4}$

75. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

76. $\int (x^2-bx)\operatorname{sen} 2x\,dx$

77. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx$

78. $\int \frac{\sec x\cos 2x}{\operatorname{sen} x+\sec x}\,dx$

79. $\int x\operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

80. $\int \frac{\operatorname{sen} x\cos x}{\operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x}\,dx$

81. Las funciones $y = e^{x^2}$ y $y = x^2e^{x^2}$ no tienen antiderivadas elementales, pero $y = (2x^2+1)e^{x^2}$ sí. Evalúe $\int (2x^2+1)e^{x^2}\,dx$.

7.6 INTEGRACIÓN POR MEDIO DE TABLAS Y SISTEMAS ALGEBRAICOS

En esta sección se describe cómo usar las tablas y los sistemas algebraicos computacionales para integrar funciones que tienen antiderivadas elementales. No obstante, se debe tener en mente que incluso los sistemas algebraicos computacionales más poderosos, no pueden hallar fórmulas explícitas para las antiderivadas de funciones como e^{x^2} o las otras funciones descritas al final de la sección 7.5.

TABLAS DE INTEGRALES

Las tablas de integrales indefinidas son muy útiles cuando se afronta una integral que es difícil de evaluar a mano y no se tiene acceso a un sistema algebraico computacional. Una tabla relativamente breve de 120 integrales, clasificada por forma, se da en las páginas de referencia al final del libro. Tablas más extensas se encuentran en *CRC Standard Mathematical Tables and Formulae,* 31a. ed. de Daniel Zwillinger (Boca Raton, FL: CRC Press, 2002) (709 elementos) o en Gradshteyn y Ryzhik's *Table of Integrals, Series, and Products,* 6e (New York: Academic Press, 2000), que contiene cientos de páginas de integrales. Se debe recordar, sin embargo, que las integrales no aparecen a menudo exactamente en la forma listada en una tabla. Por lo común, es necesario usar sustitución u operaciones algebraicas para transformar una determinada integral en una de las formas de la tabla.

EJEMPLO 1 La región limitada por las curvas $y = \arctan x$, $y = 0$, y $x = 1$ se hace girar respecto al eje y. Determine el volumen del sólido resultante.

SOLUCIÓN Con el método de cascarones cilíndricos, se ve que el volumen es

$$V = \int_0^1 2\pi x \arctan x\,dx$$

La tabla de integrales aparece en las páginas de referencia al final del libro.

En la sección de la tabla de integrales titulada *Formas tigonométricas inversas* se localiza la fórmula 92:

$$\int u \tan^{-1}u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1}u - \frac{u}{2} + C$$

Así, el volumen es

$$V = 2\pi\int_0^1 x\tan^{-1}x\,dx = 2\pi\left[\frac{x^2+1}{2}\tan^{-1}x - \frac{x}{2}\right]_0^1$$

$$= \pi[(x^2+1)\tan^{-1}x - x]_0^1 = \pi(2\tan^{-1}1 - 1)$$

$$= \pi[2(\pi/4) - 1] = \tfrac{1}{2}\pi^2 - \pi$$

□

EJEMPLO 2 Use la tabla de integrales para hallar $\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Si se ve la sección de la tabla titulada *Formas relacionadas con* $\sqrt{a^2-u^2}$, se ve que el elemento más parecido es el número 34:

$$\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$

Esto no es exactamente lo que se tiene, pero se podrá usar esto si primero se hace la sustitución $u = 2x$:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx = \int \frac{(u/2)^2}{\sqrt{5-u^2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du$$

Luego se emplea la fórmula 34 con $a^2 = 5$ (de modo que $a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-4x^2}}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{u^2}{\sqrt{5-u^2}}\,du = \frac{1}{8}\left(-\frac{u}{2}\sqrt{5-u^2} + \frac{5}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= -\frac{x}{8}\sqrt{5-4x^2} + \frac{5}{16}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}\right) + C$$

□

EJEMPLO 3 Emplee la tabla de integrales para determinar $\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN Si se estudia la sección llamada *Formas trigonométricas*, se ve que ninguno de los elementos incluye de manera explícita un factor u^3 Sin embargo, se puede usar la fórmula de reducción del elemento 84 con $n = 3$:

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos x\,dx$$

85. $\int u^n \cos u\,du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\,du$

Ahora se necesita evaluar $\int x^2\cos x\,dx$. Se puede usar la fórmula de reducción número 85 con $n = 2$, seguida de la integral 82:

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx$$

$$= x^2\operatorname{sen} x - 2(\operatorname{sen} x - x\cos x) + K$$

Al combinar estos cálculos, se obtiene

$$\int x^3 \operatorname{sen} x\,dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \cos x - 6 \operatorname{sen} x + C$$

donde $C = 3K$. □

EJEMPLO 4 Use la tabla de integrales para hallar $\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx$.

SOLUCIÓN Puesto que la tabla da formas relacionadas con $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2}$, y $\sqrt{x^2 - a^2}$, pero no $\sqrt{ax^2 + bx + c}$, primero se completa el cuadrado:

$$x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3$$

Si se hace la sustitución $u = x + 1$ (de modo que $x = u - 1$), el integrando se relacionará con el patrón $\sqrt{a^2 + u^2}$:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx &= \int (u - 1)\sqrt{u^2 + 3}\,du \\ &= \int u\sqrt{u^2 + 3}\,du - \int \sqrt{u^2 + 3}\,du\end{aligned}$$

La primera integral se evalúa por medio de la sustitución $t = u^2 + 3$:

$$\int u\sqrt{u^2 + 3}\,du = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} t^{3/2} = \tfrac{1}{3}(u^2 + 3)^{3/2}$$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \dfrac{a^2}{2}\ln\left(u + \sqrt{a^2 + u^2}\right) + C$

Para la segunda integral se usa la fórmula 21 con $a = \sqrt{3}$:

$$\int \sqrt{u^2 + 3}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + 3} + \tfrac{3}{2}\ln\left(u + \sqrt{u^2 + 3}\right)$$

En estos términos,

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{x^2 + 2x + 4}\,dx \\ &\quad = \tfrac{1}{3}(x^2 + 2x + 4)^{3/2} - \frac{x + 1}{2}\sqrt{x^2 + 2x + 4} - \tfrac{3}{2}\ln\left(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 4}\right) + C\end{aligned}$$

□

SISTEMAS ALGEBRAICOS COMPUTACIONALES

Se ha visto que el uso de tablas requiere comparar la forma del integrando dado con las formas de los integrandos en las tablas. Las computadoras son particularmente buenas para comparar patrones. Y, así como se emplearon sustituciones junto con las tablas, un CAS puede llevar a cabo sustituciones que transforman una integral dada en una que aparece en sus fórmulas almacenadas. Así, no es sorprendente que los sistemas algebraicos computacionales sobresalgan en la integración. Eso no significa que la integración a mano sea una habilidad obsoleta. Se verá que un cálculo manual produce a veces una integral indefinida en una forma que es más conveniente que la respuesta dada por una máquina.

Para empezar, se verá lo que sucede cuando se pide a la máquina integrar la función relativamente simple $y = 1/(3x - 2)$. Con la sustitución $u = 3x - 2$, un cálculo fácil a mano da

$$\int \frac{1}{3x - 2}\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|3x - 2| + C$$

mientras que Derive, Mathematica y Maple producen la respuesta

$$\tfrac{1}{3}\ln(3x-2)$$

Lo primero que hay que observar es que los sistemas algebraicos computacionales omiten la constante de integración. En otras palabras, producen una antiderivada *particular*, no la más general. Por lo tanto, al hacer uso de una integración de máquina, se tendría que añadir una constante. Segundo, los signos de valor absoluto se omiten en la respuesta de máquina. Eso está bien si el problema tiene que ver sólo con valores de x mayores que $\frac{2}{3}$. Pero si se está interesado en otros valores de x, en tal caso es necesario insertar el símbolo de valor absoluto.

En el ejemplo siguiente se reconsidera la integral del ejemplo 4, pero esta vez se pide la respuesta a la máquina.

EJEMPLO 5 Use un sistema algebraico computacional para determinar $\int x\sqrt{x^2+2x+4}\,dx$.

SOLUCIÓN Maple responde con la respuesta

$$\tfrac{1}{3}(x^2+2x+4)^{3/2}-\tfrac{1}{4}(2x+2)\sqrt{x^2+2x+4}-\frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x)$$

Esto se ve diferente a la respuesta encontrada en el ejemplo 4, pero es equivalente porque el tercer término se puede reescribir por medio de la identidad

Ésta es la ecuación 3.11.3.

$$\operatorname{arcsenh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Así,

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsenh}\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x)&=\ln\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(1+x)+\sqrt{\tfrac{1}{3}(1+x)^2+1}\right]\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}\left[1+x+\sqrt{(1+x)^2+3}\right]\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{3}}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+4}\right)\end{aligned}$$

El término extra resultante $-\frac{3}{2}\ln(1/\sqrt{3})$ se puede absorber en la constante de integración.

Mathematica da la respuesta

$$\left(\frac{5}{6}+\frac{x}{6}+\frac{x^2}{3}\right)\sqrt{x^2+2x+4}-\frac{3}{2}\operatorname{arcsenh}\left(\frac{1+x}{\sqrt{3}}\right)$$

Mathematica combinó los dos primeros términos del ejemplo 4 (y el resultado de Maple) en un término simple mediante factorización.

Derive da la respuesta

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{x^2+2x+4}\,(2x^2+x+5)-\tfrac{3}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x+1\right)$$

El primer término es parecido al primer término en la respuesta de Mathematica, y el segundo término es idéntico al último término del ejemplo 4. □

EJEMPLO 6 Use un CAS para evaluar $\int x(x^2+5)^8\,dx$.

SOLUCIÓN Maple y Mathematica dan la misma respuesta:

$$\tfrac{1}{18}x^{18}+\tfrac{5}{2}x^{16}+50x^{14}+\tfrac{1750}{3}x^{12}+4375x^{10}+21\,875x^8+\tfrac{218\,750}{3}x^6+156\,250x^4+\tfrac{390\,625}{2}x^2$$

Es claro que ambos sistemas desarrollaron $(x^2 + 5)^8$ mediante el teorema del binomio, y después integraron cada término.

Si se integra a mano, con la sustitución $u = x^2 + 5$, se obtiene

$$\int x(x^2 + 5)^8 \, dx = \tfrac{1}{18}(x^2 + 5)^9 + C$$

Para la mayor parte de los propósitos, ésta es una forma más conveniente de la respuesta. □

EJEMPLO 7 Use un CAS para determinar $\int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 de la sección 7.2 se encontró que

$$\boxed{1} \qquad \int \text{sen}^5 x \cos^2 x \, dx = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C$$

Derive y Maple dan la respuesta

$$-\tfrac{1}{7}\,\text{sen}^4 x \cos^3 x - \tfrac{4}{35}\,\text{sen}^2 x \cos^3 x - \tfrac{8}{105}\cos^3 x$$

Mientras que Mathematica produce

$$-\tfrac{5}{64}\cos x - \tfrac{1}{192}\cos 3x + \tfrac{3}{320}\cos 5x - \tfrac{1}{448}\cos 7x$$

Se sospecha que hay identidades trigonométricas que muestran que estas tres respuestas son equivalentes. De hecho, si se pide a Derive, Maple y Mathematica que simplifiquen sus expresiones por medio de identidades trigonométricas, en última instancia producen la misma forma de respuesta que en la ecuación 1. □

7.6 EJERCICIOS

1–4 Use el elemento indicado de la tabla de integrales en las páginas de referencia para evaluar la integral.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{7 - 2x^2}}{x^2}\, dx$; entrada 33

2. $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{3 - 2x}}\, dx$; entrada 55

3. $\displaystyle\int \sec^3(\pi x)\, dx$; entrada 71

4. $\displaystyle\int e^{2\theta}\,\text{sen}\, 3\theta \, d\theta$; entrada 98

5–30 Use la tabla de integrales de las páginas de referencia para evaluar la integral.

5. $\displaystyle\int_0^1 2x \cos^{-1} x \, dx$

6. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2 - 7}}\, dx$

7. $\displaystyle\int \tan^3(\pi x)\, dx$

8. $\displaystyle\int \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4x^2 + 9}}$

$\boxed{10.}$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2y^2 - 3}}{y^2}\, dy$

11. $\displaystyle\int_{-1}^{0} t^2 e^{-t}\, dt$

12. $\displaystyle\int x^2 \,\text{csch}\,(x^3 + 1)\, dx$

13. $\displaystyle\int \frac{\tan^3(1/z)}{z^2}\, dz$

14. $\displaystyle\int \text{sen}^{-1}\sqrt{x}\, dx$

15. $\displaystyle\int e^{2x} \arctan(e^x)\, dx$

16. $\displaystyle\int x\,\text{sen}(x^2)\cos(3x^2)\, dx$

$\boxed{17.}$ $\displaystyle\int y\sqrt{6 + 4y - 4y^2}\, dy$

18. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^3 - 3x^2}$

$\boxed{19.}$ $\displaystyle\int \text{sen}^2 x \cos x \ln(\text{sen}\, x)\, dx$

20. $\displaystyle\int \frac{\text{sen}\, 2\theta}{\sqrt{5 - \text{sen}\,\theta}}\, d\theta$

21. $\displaystyle\int \frac{e^x}{3 - e^{2x}}\, dx$

22. $\displaystyle\int_0^2 x^3\sqrt{4x^2 - x^4}\, dx$

23. $\displaystyle\int \sec^5 x \, dx$

24. $\displaystyle\int \text{sen}^6 2x\, dx$

25. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4 + (\ln x)^2}}{x}\, dx$

$\boxed{26.}$ $\displaystyle\int_0^1 x^4 e^{-x}\, dx$

27. $\int \sqrt{e^{2x} - 1}\, dx$

28. $\int e^t \operatorname{sen}(\alpha t - 3)\, dt$

29. $\int \dfrac{x^4\, dx}{\sqrt{x^{10} - 2}}$

30. $\int \dfrac{\sec^2\theta \tan^2\theta}{\sqrt{9 - \tan^2\theta}}\, d\theta$

31. Encuentre el volumen del sólido obtenido cuando la región bajo la curva $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$, se hace girar respecto al eje y.

32. La región bajo la curva $y = \tan^2 x$ de 0 a $\pi/4$ se hace girar respecto al eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

33. Compruebe la fórmula 53 de la tabla de integrales (a) por derivación y (b) por medio de la sustitución $t = a + bu$.

34. Compruebe la fórmula 31 (a) por derivación y (b) sustituyendo $u = a \operatorname{sen} \theta$.

CAS **35–42** Use un sistema algebraico computacional para evaluar la integral. Compare la respuesta con el resultado de usar tablas. Si las respuestas no son las mismas, muestre que son equivalentes.

35. $\int \sec^4 x\, dx$

36. $\int \csc^5 x\, dx$

37. $\int x^2\sqrt{x^2 + 4}\, dx$

38. $\int \dfrac{dx}{e^x(3e^x + 2)}$

39. $\int x\sqrt{1 + 2x}\, dx$

40. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$

41. $\int \tan^5 x\, dx$

42. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}\, dx$

CAS **43.** (a) Utilice la tabla de integrales para evaluar $F(x) = \int f(x)\, dx$, donde

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

¿Cuál es el dominio de f y F?

(b) Aplique un CAS para evaluar $F(x)$. ¿Cuál es el dominio de la función F que produce el CAS? ¿Existe diferencia entre este dominio y el que encontró en el inciso (a) para la función F?

CAS **44.** Los sistemas algebraicos computacionales necesitan a veces una mano auxiliadora de los seres humanos. Intente evaluar

$$\int (1 + \ln x)\sqrt{1 + (x \ln x)^2}\, dx$$

con un sistema algebraico computacional. Si no obtiene respuesta, haga una sustitución que cambie la integral en una que el CAS *pueda* evaluar.

CAS **45–48** Use un CAS para hallar una antiderivada F de f tal que $F(0) = 0$. Grafique f y F y localice de manera aproximada las coordenadas x de los puntos extremos y los puntos de inflexión de F.

45. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1}$

46. $f(x) = xe^{-x} \operatorname{sen} x, \quad -5 \leq x \leq 5$

47. $f(x) = \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

48. $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^6 + 1}$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

CAS PATRONES DE INTEGRALES

En este proyecto se emplea un sistema algebraico computacional para investigar integrales indefinidas de familias de funciones. Al observar los patrones que aparecen en las integrales de varios miembros de la familia, primero se inferirá, y luego se probará, una fórmula general para la integral de cualquier miembro de la familia.

1. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \dfrac{1}{(x + 2)(x + 3)}\, dx$ (ii) $\int \dfrac{1}{(x + 1)(x + 5)}\, dx$

(iii) $\int \dfrac{1}{(x + 2)(x - 5)}\, dx$ (iv) $\int \dfrac{1}{(x + 2)^2}\, dx$

(b) Con respecto al patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de la integral

$$\int \frac{1}{(x + a)(x + b)}\, dx$$

si $a \neq b$. ¿Qué pasa si $a = b$?

(c) Compruebe su conjetura pidiendo al CAS que evalúe la integral del inciso (b). Después demuéstrela por medio de fracciones parciales.

2. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \operatorname{sen} x \cos 2x\, dx$ (ii) $\int \operatorname{sen} 3x \cos 7x\, dx$ (iii) $\int \operatorname{sen} 8x \cos 3x\, dx$

(b) En función del patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de la integral

$$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\, dx$$

(c) Compruebe su conjetura con un CAS. Después demuéstrela por medio de las técnicas de la sección 7.2. ¿Para qué valores de a y b es válida?

3. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int \ln x\, dx$ (ii) $\int x \ln x\, dx$ (iii) $\int x^2 \ln x\, dx$

(iv) $\int x^3 \ln x\, dx$ (v) $\int x^7 \ln x\, dx$

(b) De acuerdo al patrón de sus respuestas del inciso (a), suponga el valor de

$$\int x^n \ln x\, dx$$

(c) Use la integración por partes para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (b). ¿Para qué valores de n es válida?

4. (a) Use un sistema algebraico computacional para evaluar las siguientes integrales.

(i) $\int xe^x\, dx$ (ii) $\int x^2e^x\, dx$ (iii) $\int x^3e^x\, dx$

(iv) $\int x^4e^x\, dx$ (v) $\int x^5e^x\, dx$

(b) Con base en el patrón de sus respuestas del inciso (a), infiera el valor de $\int x^6e^x\, dx$. Después utilice su CAS para comprobar su conjetura.

(c) Con base en los patrones de los incisos (a) y (b), haga una conjetura en cuanto al valor de la integral

$$\int x^ne^x\, dx$$

cuando n es un entero positivo.

(d) Use la función matemática para demostrar la conjetura que hizo en el inciso (c).

7.7 INTEGRACIÓN APROXIMADA

Hay dos situaciones en las que es imposible encontrar el valor exacto de una integral definida.

La primera situación surge del hecho de que a fin de evaluar $\int_a^b f(x)\, dx$ por medio del teorema fundamental del cálculo, se necesita conocer una antiderivada de f. Sin embargo, algunas veces es difícil, o incluso imposible, hallar una antiderivada (véase la sección 7.5). Por ejemplo, es imposible evaluar de manera exacta las siguientes integrales:

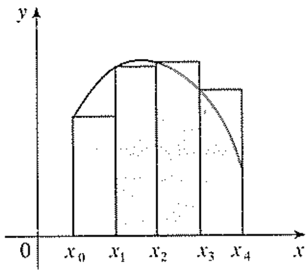
$$\int_0^1 e^{x^2} dx \qquad \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx$$

La segunda situación surge cuando la función se determina a partir de un experimento científico a través de lecturas de instrumento o datos reunidos. Podría no haber fórmula para la función (véase ejemplo 5).

En ambos casos se necesita hallar valores aproximados de integrales definidas. Ya se conoce un método. Recuerde que la integral definida se define como un límite de sumas de Riemann, así que cualquier suma de Riemann se podría usar como una aproximación a la integral: Si se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = (b - a)/n$, por lo tanto se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

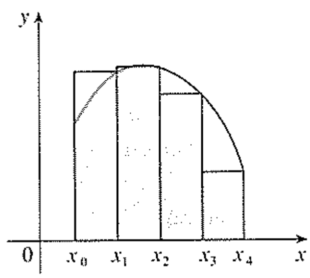
donde x_i^* es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Si se elige que x_i^* sea el punto final izquierdo del subintervalo, después $x_i^* = x_{i-1}$ y se tiene



(a) Aproximación de punto final izquierdo

$$\boxed{1} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx L_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

Si $f(x) \geqslant 0$, en tal caso la integral representa un área y (1) representa una aproximación de esta área mediante los rectángulos mostrados en la figura 1(a). Si se elige que x_i^* sea el punto final derecho, en seguida $x_i^* = x_i$ y se tiene

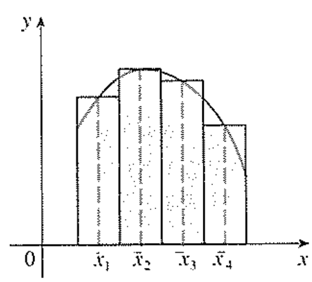


(b) Aproximación de punto final derecho

$$\boxed{2} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx R_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

[Véase la figura 1(b)]. Las aproximaciones L_n y R_n definidas por las ecuaciones 1 y 2 se llaman **aproximación de punto final izquierdo** y **aproximación de punto final derecho**, respectivamente.

En la sección 5.2 se consideró también el caso donde x_i^* se elige como el punto medio $\bar{x}_i$ del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En la figura 1(c) se muestra la aproximación de punto medio M_n, que parece ser mejor que L_n o R_n.



(c) Aproximación de punto medio

FIGURA 1

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx M_n = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + f(\bar{x}_2) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b - a}{n}$

y bien $\qquad \bar{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = \text{punto medio de } [x_{i-1}, x_i]$

Otra aproximación, llamada regla del trapecio, resulta de promediar las aproximaciones de las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\right] = \frac{\Delta x}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right)\right] \\
&= \frac{\Delta x}{2}\left[(f(x_0) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \cdots + (f(x_{n-1}) + f(x_n))\right] \\
&= \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]
\end{aligned}$$

REGLA DEL TRAPECIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx T_n = \frac{\Delta x}{2}[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $x_i = a + i\,\Delta x$.

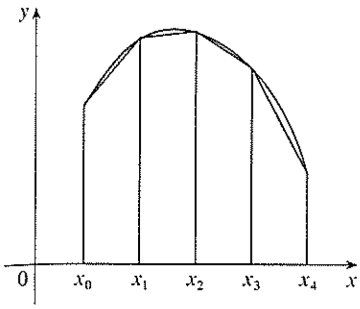


FIGURA 2
Aproximación trapezoidal

La razón para el nombre regla del trapecio se puede ver de la figura 2, que ilustra el caso $f(x) \geqslant 0$. El área del trapecio que yace arriba del i-ésimo subintervalo es

$$\Delta x\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right) = \frac{\Delta x}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

y si se suman las áreas de estos trapecios, se obtiene el lado derecho de la regla del trapecio.

EJEMPLO 1 Use (a) la regla del trapecio y (b) la regla del punto medio con $n = 5$ para aproximar la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN
(a) Con $n = 5$, $a = 1$, y $b = 2$, se tiene $\Delta x = (2 - 1)/5 = 0.2$, y así, la regla del trapecio da

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx T_5 &= \frac{0.2}{2}[f(1) + 2f(1.2) + 2f(1.4) + 2f(1.6) + 2f(1.8) + f(2)]\\ &= 0.1\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.8} + \frac{1}{2}\right)\\ &\approx 0.695635\end{aligned}$$

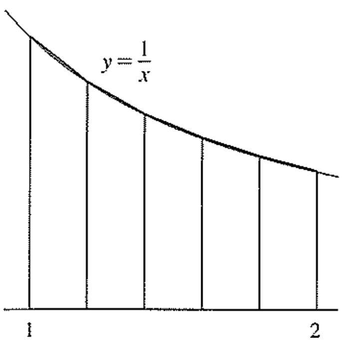


FIGURA 3

Esta aproximación se ilustra en la figura 3.

(b) Los puntos medios de los cinco subintervalos son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7, y 1.9, así que la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx \Delta x[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)\\ &\approx 0.691908\end{aligned}$$

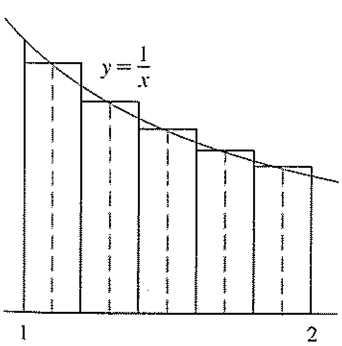


FIGURA 4

Esta aproximación se ilustra en la figura 4. □

En el ejemplo 1 se eligió de manera deliberada una integral cuyo valor se puede calcular explícitamente, de modo que se puede ver cuán precisas son las reglas del trapecio y del punto medio. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^2 = \ln 2 = 0.693147\ldots$$

$\int_a^b f(x)\,dx$ = aproximación + error

El **error** al usar una aproximación se define como la cantidad que debe ser sumada a la aproximación para hacerla exacta. De los valores del ejemplo 1, se ve que los errores en las aproximaciones de la regla del trapecio y del punto medio para $n = 5$ son

$$E_T \approx -0.002488 \qquad \text{y} \qquad E_M \approx 0.001239$$

En general, se tiene

$$E_T = \int_a^b f(x)\,dx - T_n \qquad \text{y} \qquad E_M = \int_a^b f(x)\,dx - M_n$$

TEC Module 5.2/7.7 permite comparar métodos de aproximación.

En las tablas siguientes se muestran los resultados de cálculos similares a los del ejemplo 1, pero para $n = 5$, 10, y 20 y para las aproximaciones de punto final izquierdo y derecho, así como las reglas del trapecio y del punto medio.

Aproximaciones a $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

n	L_n	R_n	T_n	M_n
5	0.745635	0.645635	0.695635	0.691908
10	0.718771	0.668771	0.693771	0.692835
20	0.705803	0.680803	0.693303	0.693069

Errores correspondientes

n	E_L	E_R	E_T	E_M
5	−0.052488	0.047512	−0.002488	0.001239
10	−0.025624	0.024376	−0.000624	0.000312
20	−0.012656	0.012344	−0.000156	0.000078

Se pueden hacer varias observaciones a partir de estas tablas:

1. En todos los métodos se obtienen aproximaciones más exactas cuando se incrementa el valor de n. (Pero valores muy grandes de n producen tantas operaciones aritméticas, que se tiene que estar consciente del error de redondeo acumulado.)
2. Los errores en las aproximaciones de punto final izquierdo y derecho son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de aproximadamente 2 cuando se duplica el valor de n.
3. Las reglas del trapecio y del punto medio son mucho más exactas que las aproximaciones de punto final.
4. Los errores en las reglas del trapecio y del punto medio son de signo opuesto y al parecer disminuyen por un factor de alrededor de 4 cuando se duplica el valor de n.
5. El tamaño del error en la regla del punto medio es casi la mitad del tamaño del error en la regla del trapecio.

Resulta que estas observaciones son verdaderas en la mayor parte de los casos.

En la figura 5 se muestra por qué normalmente se puede esperar que la regla del punto medio sea más exacta que la regla del trapecio. El área de un rectángulo representativo en la regla del punto medio, es la misma que el trapecio $ABCD$ cuyo lado superior es tangente a la gráfica de P. El área de este trapecio es más próxima al área bajo la gráfica de lo que es el área del trapecio $AQRD$ empleado en la regla del trapecio. [El error del punto medio (sombreado rojo) es más pequeño que el error trapezoidal (sombreado azul).]

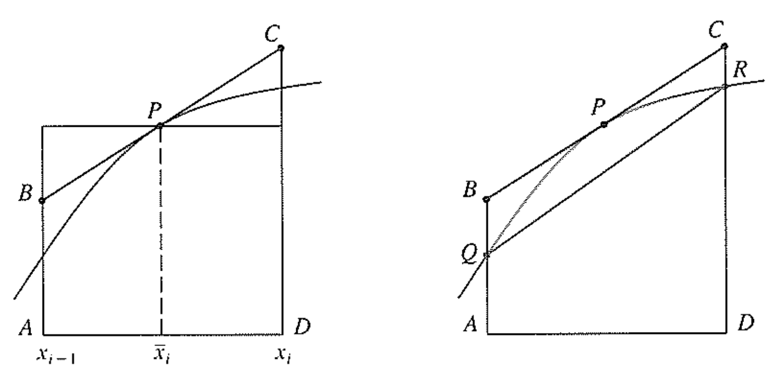


FIGURA 5

Estas observaciones se corroboran en las siguientes estimaciones de error, que se demuestran en libros de análisis numérico. Note que la observación 4 corresponde a n^2 en cada denominador porque $(2n)^2 = 4n^2$. El hecho de que las estimaciones dependan del tamaño de la segunda derivada no es sorprendente si se considera la figura 5, porque $f''(x)$ mide cuánto se curva la gráfica. [Recuerde que $f''(x)$ mide cuán rápido cambia la pendiente de $y = f(x)$.]

$\boxed{3}$ **COTAS DE ERROR** Considere que $|f''(x)| \leq K$ para $a \leq x \leq b$. Si E_T y E_M son los errores en las reglas del trapecio y del punto medio, por lo tanto

$$|E_T| \leq \frac{K(b-a)^3}{12n^2} \qquad \text{y} \qquad |E_M| \leq \frac{K(b-a)^3}{24n^2}$$

Se aplicará esta estimación del error a la aproximación de la regla del trapecio en el ejemplo 1. Si $f(x) = 1/x$, después $f'(x) = -1/x^2$ y $f''(x) = 2/x^3$. Puesto que $1 \leq x \leq 2$, se tiene $1/x \leq 1$, así que

$$|f''(x)| = \left|\frac{2}{x^3}\right| \leq \frac{2}{1^3} = 2$$

Por lo tanto, tomando $K = 2$, $a = 1$, $b = 2$, y $n = 5$ en la estimación del error (3), se ve que

$$|E_T| \leq \frac{2(2-1)^3}{12(5)^2} = \frac{1}{150} \approx 0.006667$$

■ K puede ser cualquier número más grande que todos los valores de $|f''(x)|$, pero valores más pequeños de K dan mejores cotas de error.

Al comparar esta estimación del error de 0.006667 con el error real de casi 0.002488, se ve que puede suceder que el error real sea sustancialmente menor que la cota superior para el error dado por (3).

V EJEMPLO 2 ¿Cuán grande se debe tomar n a fin de garantizar que las aproximaciones de las reglas del trapecio y del punto medio para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ sean exactas hasta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Se vio en el cálculo anterior que $|f''(x)| \leq 2$ para $1 \leq x \leq 2$, de modo que se puede tomar $K = 2$, $a = 1$, y $b = 2$ en (3). La exactitud hasta dentro de 0.0001 significa que el tamaño del error debe ser menor que 0.0001. Por lo tanto, se elige n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{12n^2} < 0.0001$$

Resolviendo la desigualdad para n, se obtiene

$$n^2 > \frac{2}{12(0.0001)}$$

o bien

$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0006}} \approx 40.8$$

Así, $n = 41$ asegurará la exactitud deseada.

■ Es bastante posible que un valor menor para n sea suficiente, pero 41 es el valor más pequeño para el cual la fórmula de la cota del error puede *garantizar* exactitud hasta dentro de 0.0001.

Para la misma exactitud con la regla del punto medio se elige n de modo que

$$\frac{2(1)^3}{24n^2} < 0.0001$$

que da
$$n > \frac{1}{\sqrt{0.0012}} \approx 29$$
□

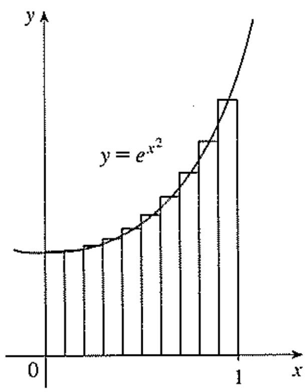


FIGURA 6

EJEMPLO 3
(a) Use la regla del punto medio con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}dx$.
(b) Dé una cota superior para el error relacionado con esta aproximación.

SOLUCIÓN
(a) Puesto que $a = 0$, $b = 1$, y $n = 10$, la regla del punto medio da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &\approx \Delta x\,[f(0.05) + f(0.15) + \cdots + f(0.85) + f(0.95)]\\ &= 0.1[e^{0.0025} + e^{0.0225} + e^{0.0625} + e^{0.1225} + e^{0.2025} + e^{0.3025}\\ &\quad + e^{0.4225} + e^{0.5625} + e^{0.7225} + e^{0.9025}]\\ &\approx 1.460393\end{aligned}$$

En la figura 6 se muestra esta aproximación.

(b) Puesto que $f(x) = e^{x^2}$, se tiene $f'(x) = 2xe^{x^2}$ y $f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2}$. También, puesto que $0 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene $x^2 \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$0 \leqslant f''(x) = (2 + 4x^2)e^{x^2} \leqslant 6e$$

Las estimaciones del error son cotas para el error. Producen escenarios teóricos del peor de los casos. El error real en este caso resulta ser aproximadamente 0.0023.

Si se toma $K = 6e$, $a = 0$, $b = 1$, y $n = 10$ en la estimación del error (3), se ve que una cota superior para el error es

$$\frac{6e(1)^3}{24(10)^2} = \frac{e}{400} \approx 0.007$$
□

REGLA DE SIMPSON

Otra regla para integración aproximada resulta de usar parábolas en lugar de segmentos de recta para aproximar una curva. Como antes, se divide $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $h = \Delta x = (b - a)/n$, pero esta vez se supone que n es un número *par*. Por lo tanto en cada par consecutivo de intervalos la curva $y = f(x) \geqslant 0$ se aproxima mediante una parábola como se muestra en la figura 7. Si $y_i = f(x_i)$, después $P_i(x_i, y_i)$ es el punto sobre la curva que yace arriba de x_i. Una parábola representativa pasa por tres puntos consecutivos P_i, P_{i+1}, y P_{i+2}.

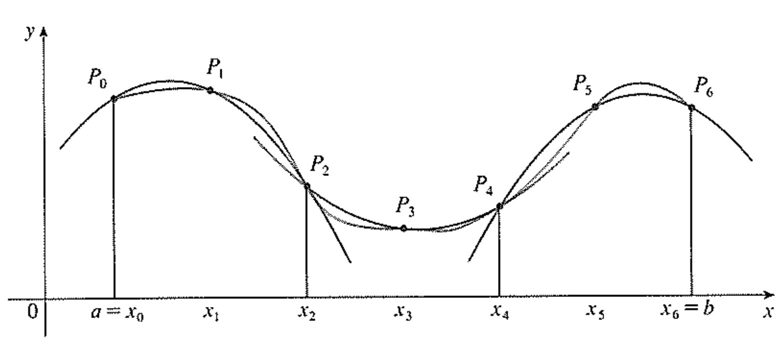


FIGURA 7

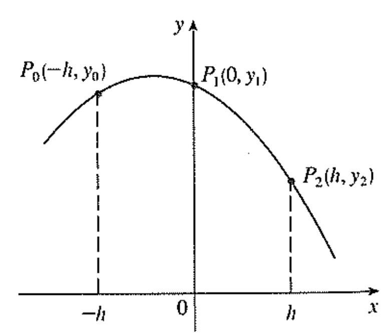


FIGURA 8

Para simplificar los cálculos, se considera primero el caso donde $x_0 = -h$, $x_1 = 0$ y $x_2 = h$. (Véase la figura 8.) Se sabe que la ecuación de la parábola a través de P_0, P_1 y P_2 es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$ y, por lo tanto, el área bajo la parábola de $x = -h$ a $x = h$ es

Aquí se ha empleado el teorema 5.5.7. Observe que $Ax^2 + C$ es par y Bx es impar.

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,dx &= 2\int_0^h (Ax^2 + C)\,dx \\ &= 2\left[A\frac{x^3}{3} + Cx\right]_0^h \\ &= 2\left(A\frac{h^3}{3} + Ch\right) = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)\end{aligned}$$

Pero, puesto que la parábola pasa por $P_0(-h, y_0)$, $P_1(0, y_1)$, y $P_2(h, y_2)$, se tiene

$$\begin{aligned} y_0 &= A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

y, por lo tanto,
$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Así, se puede reescribir el área de la parábola como

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Ahora, si esta parábola se desplaza horizontalmente, no se cambia el área bajo ésta. Esto significa que el área bajo la parábola que pasa por P_0, P_1 y P_2 de $x = x_0$ a $x = x_2$ en la figura 7 es aún

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

De manera similar, el área bajo la parábola por P_2, P_3 y P_4 de $x = x_2$ a $x = x_4$ es

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

Si se calculan de este modo las áreas debajo de todas las parábolas y se suman los resultados, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &\quad + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\end{aligned}$$

Aunque se ha derivado esta aproximación para el caso en el que $f(x) \geqslant 0$, es una aproximación razonable para cualquier función continua f y se llama regla de Simpson en honor al matemático inglés Thomas Simpson (1710-1761). Note el patrón de coeficientes: 1, 4, 2, 4, 2, 4, 2, . . . , 4, 2, 4, 1.

SIMPSON

Thomas Simpson fue un tejedor autodidacta en matemáticas que llegó a ser uno de los mejores matemáticos ingleses del siglo XVIII. Lo que se llama regla de Simpson ya la conocían Cavalieri y Gregory en el siglo XVII, pero Simpson la popularizó en su libro de cálculo de mayor venta titulado *A New Treatise of Fluxions*.

REGLA DE SIMPSON

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx S_n = \frac{\Delta x}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$$
$$+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

donde n es par y $\Delta x = (b - a)/n$.

EJEMPLO 4 Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

SOLUCIÓN Si se escribe $f(x) = 1/x$, $n = 10$, y $\Delta x = 0.1$ en la regla de Simpson, se obtiene

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx S_{10}$$
$$= \frac{\Delta x}{3}[f(1) + 4f(1.1) + 2f(1.2) + 4f(1.3) + \cdots + 2f(1.8) + 4f(1.9) + f(2)]$$
$$= \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right)$$
$$\approx 0.693150$$

□

Observe que, en el ejemplo 4, la regla de Simpson da una aproximación *mucho* mejor ($S_{10} \approx 0.693150$) al valor verdadero de la integral ($\ln 2 \approx 0.693147\ldots$) que la regla del trapecio ($T_{10} \approx 0.693771$) o la regla del punto medio ($M_{10} \approx 0.692835$). Resulta (véase ejercicio 48) que las aproximaciones en la regla de Simpson son promedios ponderados de los de las reglas del trapecio y del punto medio:

$$S_{2n} = \tfrac{1}{3}T_n + \tfrac{2}{3}M_n$$

(Recuerde que E_T y E_M tienen por lo general signos opuestos y $|E_M|$ es casi la mitad del tamaño de $|E_T|$.)

En muchas aplicaciones de cálculo se necesita evaluar una integral aun cuando no se conoce ninguna fórmula explícita para y como función de x. Una función se puede dar en forma gráfica o como una tabla de valores de datos reunidos. Si hay evidencia de que los valores no cambian con rapidez, en tal caso todavía se puede usar la regla del trapecio o la regla de Simpson para hallar un valor aproximado de $\int_a^b y\,dx$, la integral de y con respecto a x.

EJEMPLO 5 En la figura 9 se muestra el tránsito de datos en el vínculo de Estados Unidos a SWITCH, la red suiza académica y de investigación, el 10 de febrero de 1998. $D(t)$ es el caudal de datos, medido en megabits por segundo (Mb/s). Use la Regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos en el vínculo hasta mediodía en ese día.

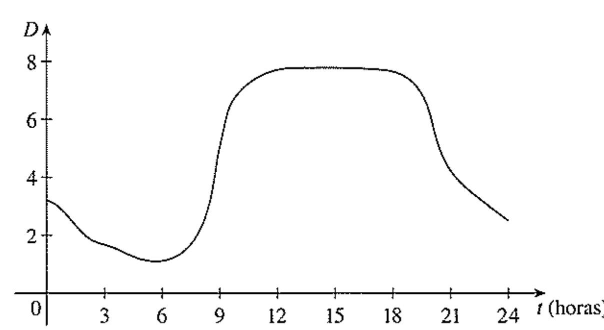


FIGURA 9

SOLUCIÓN Ya que se desea que las unidades sean congruentes y $D(t)$ se mide en megabits por segundo, se convierten las unidades para t de horas a segundos. Si $A(t)$ es la cantidad de datos (en megabits) transmitida en el instante t, donde t se mide en segundos, después $A'(t) = D(t)$. Así, por el teorema del cambio neto (véase la sección 5.4), la cantidad total de datos transmitidos a mediodía $t = 12 \times 60^2 = 43\,200$) es

$$A(43\,200) = \int_0^{43\,200} D(t)\,dt$$

Se estiman los valores de $D(t)$ a intervalos de cada hora a partir de la gráfica y se compilan en la tabla.

t (horas)	t (segundos)	$D(t)$	t (horas)	t (segundos)	$D(t)$
0	0	3.2	7	25 200	1.3
1	3 600	2.7	8	28 800	2.8
2	7 200	1.9	9	32 400	5.7
3	10 800	1.7	10	36 000	7.1
4	14 400	1.3	11	39 600	7.7
5	18 000	1.0	12	43 200	7.9
6	21 600	1.1			

En tal caso se usa la regla de Simpson con $n = 12$ y $\Delta t = 3\,600$ para estimar la integral:

$$\begin{aligned}\int_0^{43\,200} A(t)\,dt &\approx \frac{\Delta t}{3}[D(0) + 4D(3600) + 2D(7200) + \cdots + 4D(39\,600) + D(43\,200)] \\ &\approx \frac{3600}{3}[3.2 + 4(2.7) + 2(1.9) + 4(1.7) + 2(1.3) + 4(1.0) \\ &\qquad + 2(1.1) + 4(1.3) + 2(2.8) + 4(5.7) + 2(7.1) + 4(7.7) + 7.9] \\ &= 143\,880\end{aligned}$$

Así, la cantidad total de datos transmitida hasta mediodía es de alrededor de 144 000 megabits, o 144 gigabits. □

n	M_n	S_n
4	0.69121989	0.69315453
8	0.69266055	0.69314765
16	0.69302521	0.69314721

n	E_M	E_S
4	0.00192729	−0.00000735
8	0.00048663	−0.00000047
16	0.00012197	−0.00000003

La tabla en el margen como se compara la regla de Simpson con la regla del punto medio para la integral $\int_1^2 (1/x)\,dx$ cuyo valor verdadero es casi 0.69314718. La segunda tabla muestra que el error E_s en la regla de Simpson disminuye por un factor de casi 16 donde n se duplica. (En los ejercicios 27 y 28 se pide demostrar esto por dos integrales adicionales). Eso es compatible con la presencia de n^4 en el denominador de la siguiente estimación de error para la regla de Simpson. Es similar a las estimaciones dadas en (3) para las reglas del trapecio y del punto medio, pero emplea la cuarta derivada de f.

$\boxed{4}$ **COTA DE ERROR PARA LA REGLA DE SIMPSON** Suponga que $|f^{(4)}(x)| \leq K$ para $a \leq x \leq b$. Si E_S es el error relacionado con la regla de Simpson, en tal caso

$$|E_S| \leq \frac{K(b-a)^5}{180n^4}$$

EJEMPLO 6 ¿Qué tan grande se toma n a fin de garantizar que la aproximación de la regla de Simpson para $\int_1^2 (1/x)\,dx$ es exacta hasta dentro de 0.0001?

SOLUCIÓN Si $f(x) = 1/x$, entonces $f^{(4)}(x) = 24/x^5$. Puesto que $x \geqslant 1$, se tiene $1/x \leqslant 1$ y, por lo tanto,

$$|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{24}{x^5}\right| \leqslant 24$$

Así, se puede tomar $K = 24$ en (4). Entonces, para un error menor que 0.0001 se debe elegir n de modo que

$$\frac{24(1)^5}{180n^4} < 0.0001$$

Esto da

$$n^4 > \frac{24}{180(0.0001)}$$

o bien,

$$n > \frac{1}{\sqrt[4]{0.00075}} \approx 6.04$$

Por lo tanto, $n = 8$ (n debe ser par) da la exactitud deseada. (Compare esto con el ejemplo 2, donde se obtuvo $n = 41$ para la regla del trapecio y $n = 29$ para la regla del punto medio.) □

Muchas calculadoras y sistemas algebraicos computacionales tienen un algoritmo integrado que calcula una aproximación de una integral definida. Algunas de estas máquinas usan la regla de Simpson; otras usan técnicas más complejas como la integración numérica *adaptable*. Esto significa que si una función fluctúa mucho más en cierta parte del intervalo que en cualquier otra parte, después esa parte se divide en más subintervalos. Esta estrategia reduce el número de cálculos requeridos para lograr la exactitud prescrita.

EJEMPLO 7

(a) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.

(b) Estime el error relacionado con esta aproximación.

SOLUCIÓN

(a) Si $n = 10$, entonces $\Delta x = 0.1$ y la regla de Simpson da

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{x^2}dx &\approx \frac{\Delta x}{3}[f(0) + 4f(0.1) + 2f(0.2) + \cdots + 2f(0.8) + 4f(0.9) + f(1)]\\ &= \frac{0.1}{3}[e^0 + 4e^{0.01} + 2e^{0.04} + 4e^{0.09} + 2e^{0.16} + 4e^{0.25} + 2e^{0.36}\\ &\qquad + 4e^{0.49} + 2e^{0.64} + 4e^{0.81} + e^1]\\ &\approx 1.462681\end{aligned}$$

En la figura 10 se muestra el cálculo del ejemplo 7. Observe que los arcos parabólicos están tan próximos a la gráfica de $y = e^{x^2}$ que son prácticamente indistinguibles de ésta.

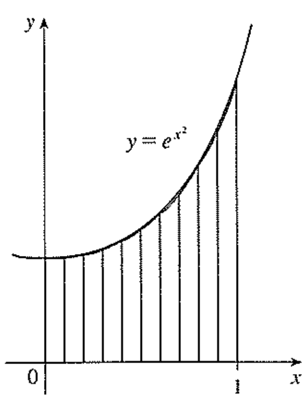


FIGURA 10

(b) La cuarta derivada de $f(x) = e^{x^2}$ es

$$f^{(4)}(x) = (12 + 48x^2 + 16x^4)e^{x^2}$$

y también, puesto que $0 \leqslant x \leqslant 1$, se tiene

$$0 \leqslant f^{(4)}(x) \leqslant (12 + 48 + 16)e^1 = 76e$$

Por lo tanto, al escribir $K = 76e$, $a = 0$, $b = 1$ y $n = 10$ en (4), se ve que el error es a lo sumo

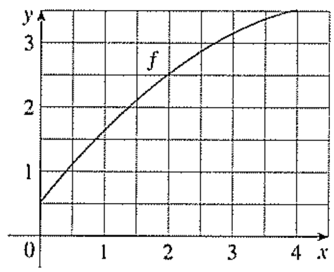
$$\frac{76e(1)^5}{180(10)^4} \approx 0.000115$$

(Compare esto con el ejemplo 3.) Así, correcta hasta tres decimales, se tiene

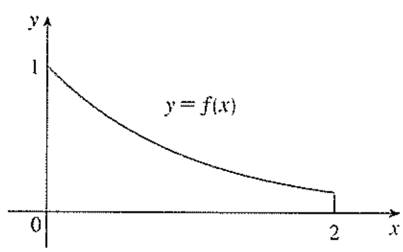
$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx 1.463$$ □

7.7 EJERCICIOS

1. Sea $I = \int_0^4 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se ilustra a continuación.
   (a) Emplee la gráfica para determinar L_2, R_2 y M_2.
   (b) ¿Éstas son sobreestimaciones o subestimaciones de I?
   (c) Use la gráfica para encontrar T_2. ¿Cómo se compara con I?
   (d) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente



2. Se usaron las aproximaciones, izquierda, derecha, de la regla del trapecio y la regla del punto medio para estimar $\int_0^2 f(x)\,dx$, donde f es la función cuya gráfica se muestra. Las estimaciones fueron, 0.7811, 0.8675, 0.8632 y 0.9540, y el mismo número de subintervalos se emplearon en cada caso.
   (a) ¿Cuál regla produce cuál estimación?
   (b) ¿Entre cuáles dos aproximaciones está el valor verdadero de $\int_0^2 f(x)\,dx$?



3. Estime $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$ con (a) la Regla del Trapecio y (b) la Regla del Punto Medio, cada una con $n = 4$. A partir de una gráfica del integrando, decida si sus respuestas son sobreestimaciones o subestimaciones. ¿Qué puede concluir acerca del valor verdadero de la integral?

4. Trace la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2/2)$ en el rectángulo de visión $[0, 1]$ por $[0, 0.5]$ y sea $I = \int_0^1 f(x)\,dx$.
   (a) Utilice la gráfica para decidir si L_2, R_2, M_2 y T_2 son sobreestimaciones o subestimaciones de I.
   (b) Para cualquier valor de n, liste los números L_n, R_n, M_n, T_n e I en orden creciente.
   (c) Calcule L_5, R_5, M_5 y T_5. De la gráfica, ¿cuál considera que da la mejor estimación de I?

5–6 Use (a) la regla del punto medio y (b) la regla de Simpson para aproximar la integral dada con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.) Compare sus reultados con el valor real para determinar el error en cada aproximación.

5. $\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\,dx,\quad n = 8$

6. $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}\,dx,\quad n = 6$

7–18 Use (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la Regla de Simpson para aproximar la integral con el valor especificado de n. (Redondee sus respuestas a seis decimales.)

7. $\int_0^2 \sqrt[4]{1 + x^2}\,dx,\quad n = 8$

8. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(x^2)\,dx,\quad n = 4$

9. $\int_1^2 \dfrac{\ln x}{1 + x}\,dx,\quad n = 10$

10. $\int_0^3 \dfrac{dt}{1 + t^2 + t^4},\quad n = 6$

11. $\int_0^{1/2} \operatorname{sen}(e^{t/2})\,dt,\quad n = 8$

12. $\int_0^4 \sqrt{1 + \sqrt{x}}\,dx,\quad n = 8$

13. $\int_0^4 e^{\sqrt{t}} \operatorname{sen} t\,dt,\quad n = 8$

14. $\int_0^1 \sqrt{z}\,e^{-z}\,dz,\quad n = 10$

15. $\int_1^5 \dfrac{\cos x}{x}\,dx,\quad n = 8$

16. $\int_4^6 \ln(x^3 + 2)\,dx,\quad n = 10$

17. $\int_0^3 \dfrac{1}{1 + y^5}\,dy,\quad n = 6$

18. $\int_0^4 \cos\sqrt{x}\,dx,\quad n = 10$

19. (a) Halle las aproximaciones T_8 y M_8 para la integral $\int_0^1 \cos(x^2)\,dx$.
    (b) Estime los errores relacionados con las aproximaciones del inciso (a).
    (c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n de modo que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.0001?

20. (a) Halle las aproximaciones T_{10} y M_{10} para $\int_1^2 e^{1/x}\,dx$.
    (b) Estimar los errores en las aproximaciones del inciso (a).
    (c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n y M_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.0001?

21. (a) Encuentre las aproximaciones T_{10} M_{10} y S_{10} para $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ y los errores correspondientes E_T E_M y E_S.
    (b) Compare los errores reales del inciso (a) con las estimaciones del error dadas por (3) y (4).
    (c) ¿Qué tan grande se tiene que elegir n para que las aproximaciones T_n, M_n, y S_n a la integral del inciso (a) sean exactas hasta dentro de 0.00001?

22. ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que la aproximación de la regla de Simpson a $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ sea exacta hasta dentro de 0.00001?

23. El problema con las estimaciones del error es que suele ser muy difícil calcular cuatro derivadas y obtener una buena cota superior K para $|f^{(4)}(x)|$ a mano. Pero los sistemas algebraicos computa-

cionales no tienen problema para calcular $f^{(4)}$ y graficarla, así que se puede hallar con facilidad un valor de K a partir de una gráfica de máquina. Este ejercicio trata con aproximaciones a la integral $I = \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, donde $f(x) = e^{\cos x}$.

(a) Use una gráfica a fin de obtener una buena cota superior para $|f''(x)|$.
(b) Emplee M_{10} para aproximar I.
(c) Utilice el inciso (a) para estimar el error en el inciso (b).
(d) Use la capacidad de integración numérica integrada de su CAS para aproximar I.
(e) ¿Cómo se compara el error real con la estimación de error del inciso (c)?
(f) Use una gráfica para obtener una buena cota superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(g) Emplee S_{10} para aproximar I.
(h) Utilice el inciso (f) para estimar el error del inciso (g).
(i) ¿Cómo se compara el error real con la estimación del error del inciso (h)?
(j) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al usar S_n sea menor que 0.0001?

CAS **24.** Repita el ejercicio 23 para la integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^3}\,dx$.

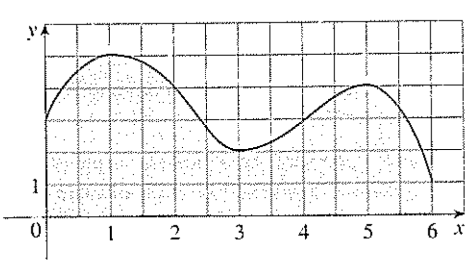
25–26 Encuentre las aproximaciones L_n, R_n, T_n y M_n para $n = 5$, 10, y 20. Después calcule los errores correspondientes E_L, E_R, E_T, y E_M. (Redondee sus respuestas hasta seis decimales. Es posible que desee usar el comando de suma en un sistema algebraico computacional.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

25. $\int_0^1 xe^x\,dx$ **26.** $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$

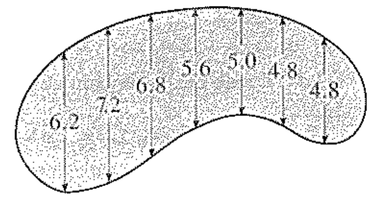
27–28 Determine las aproximaciones T_n, M_n, y S_n para $n = 6$ y 12. A continuación calcule los errores correspondientes E_T, E_M, y E_S. (Redondee sus respuestas a seis decimales. Quizá desee usar el comando de suma de un sistema algebraico computacional.) ¿Qué observaciones puede hacer? En particular, ¿qué sucede con los errores cuando se duplica n?

27. $\int_0^2 x^4\,dx$ **28.** $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

29. Estime el área bajo la gráfica en la figura usando (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson, cada una con $n = 4$.



30. Las amplitudes (en metros) de una alberca en forma de riñón se midieron a intervalos de 2 metros como se indica en la figura. Use la regla de Simpson para estimar el área de la alberca.



31. (a) Emplee la regla del punto medio y los datos de la tabla para estimar el valor de la integral $\int_0^{3.2} f(x)\,dx$.

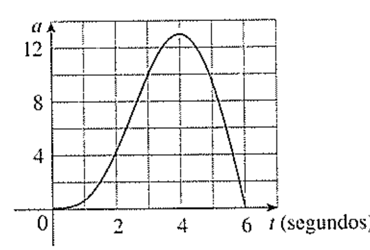
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0	6.8	2.0	7.6
0.4	6.5	2.4	8.4
0.8	6.3	2.8	8.8
1.2	6.4	3.2	9.0
1.6	6.9		

(b) Si se sabe que $-4 \leq f''(x) \leq 1$ para toda x, estime el error relacionado con la aproximación del inciso (a).

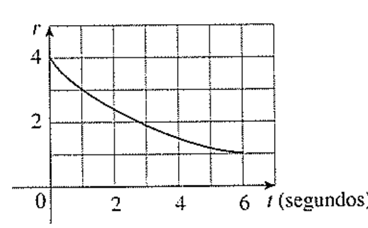
32. Se empleó una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor durante los primeros 5 segundos de una competencia (véase la tabla). Emplee la regla de Simpson para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

33. Se muestra la gráfica de la aceleración $a(t)$ de un automóvil medida en pies/s^2. Emplee la regla de Simpson para estimar el incremento de velocidad del automóvil durante el intervalo de tiempo de 6 segundos.



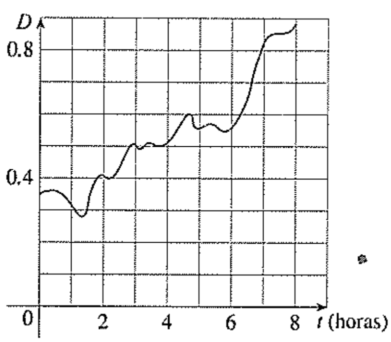
34. De un depósito se fuga agua a una rapidez de $r(t)$ litros por hora, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla de Simpson para estimar la cantidad total de agua que se fuga durante las primeras seis horas.



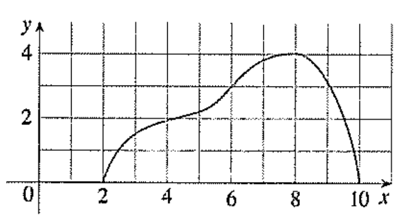
35. La tabla (suministrada por San Diego Gas and Electric) da el consumo de energia en megawatts en el condado de San Diego de la medianoche a las 6:00 A.M. el 8 de diciembre de 1999. Use la regla de Simpson para estimar la energía empleada durante ese periodo. (Use el hecho de que la potencia es la derivada de la energía.)

t	P	t	P
0:00	1814	3:30	1611
0:30	1735	4:00	1621
1:00	1686	4:30	1666
1:30	1646	5:00	1745
2:00	1637	5:30	1886
2:30	1609	6:00	2052
3:00	1604		

36. En la gráfica se muestra el tránsito de datos en una línea de datos T1 del proveedor de servicio de Internet de la medianoche a las 8:00 A.M. D es el caudal de datos, medido en megabits por segundo. Use la regla de Simpson para estimar la cantidad total de datos transmitidos durante ese periodo.



37. Si la región mostrada en la figura se hace girar respecto al eje y para formar un sólido, use la regla de Simpson con $n = 8$ para estimar el volumen del sólido.



38. En la tabla se muestran los valores de una función de fuerza $f(x)$ donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Use la regla de Simpson para estimar el trabajo hecho por la fuerza al mover un objeto una distancia de 18 m.

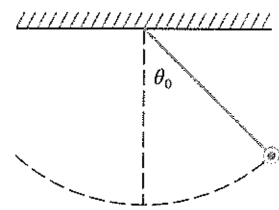
x	0	3	6	9	12	15	18
$f(x)$	9.8	9.1	8.5	8.0	7.7	7.5	7.4

39. La región acotada por las curvas $y = e^{-1/x}$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 5$ se hace girar respecto al eje x. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el volumen del sólido resultante.

CAS 40. En la figura se muestra un péndulo con longitud L que forma un ángulo máximo θ_0 con la vertical. Usando la segunda Ley de Newton, se puede mostrar que el periodo T (el tiempo para una oscilación completa) está dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2 x}}$$

donde $k = \mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}\theta_0\right)$ y g es la aceleración debida a la gravedad. Si $L = 1$ m y $\theta_0 = 42°$, use la regla de Simpson con $n = 10$ para determinar el periodo.



41. La intensidad de la luz con longitud de onda λ que viaja por una rejilla de difracción con N ranuras a un ángulo θ está dada por $I(\theta) = N^2\,\mathrm{sen}^2 k/k^2$, donde $k = (\pi N d\,\mathrm{sen}\,\theta)/\lambda$ y d es la distancia entre ranuras adyacentes. Un láser de helio-neón con longitud de onda $\lambda = 632.8 \times 10^{-9}$ m emite una banda estrecha de luz, dada por $-10^{-6} < \theta < 10^{-6}$, por una rejilla con 10 000 ranuras espaciadas 10^{-4} m. Use la regla del punto medio con $n = 10$ para estimar la intensidad de luz total $\int_{-10^{-6}}^{10^{-6}} I(\theta)\,d\theta$ que emerge de la rejilla.

42. Use la regla del trapecio con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{20}\cos(\pi x)\,dx$. Compare su resultado con el valor real. ¿Puede explicar la discrepancia?

43. Bosqueje la gráfica de una función continua en $[0, 2]$ para la cual la regla del trapecio con $n = 2$ es más exacta que la regla del punto medio.

44. Bosqueje la gráfica de una función continua en $[0, 2]$ para la cual la aproximación del punto final derecho con $n = 2$ es más exacta que la regla de Simpson.

45. Si f es una función positiva y $f''(x) < 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, muestre que

$$T_n < \int_a^b f(x)\,dx < M_n$$

46. Muestre que si f es un polinomio de grado 3 o menor, en tal caso la regla de Simpson da el valor exacto de $\int_a^b f(x)\,dx$.

47. Muestre que $\frac{1}{2}(T_n + M_n) = T_{2n}$.

48. Muestre que $\frac{1}{3}T_n + \frac{2}{3}M_n = S_{2n}$.

7.8 INTEGRALES IMPROPIAS

Al definir la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se trató con una función f definida en un intervalo finito $[a, b]$ y se supuso que f no tiene una discontinuidad infinita (véase la sección 5.2). En esta sección se amplía el concepto de una integral definida para el caso donde el intervalo es infinito y también el caso donde f tiene una discontinuidad infinita en $[a, b]$. En cualquier caso, la integral se llama *impropia*. Una de las aplicaciones más importantes de esta idea, distribuciones de probabilidad, se estudia en la sección 8.5.

TIPO I: INTERVALOS INFINITOS

Considere la región infinita S que yace bajo la curva $y = 1/x^2$, arriba del eje x, y a la derecha de la recta $x = 1$. Se podría pensar, puesto que S es de grado infinito, que su área debe ser infinita, pero considérese más de cerca. El área de la parte de S que se localiza a la izquierda de la línea $x = t$ (sombreada en la figura 1) es

$$A(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\bigg]_1^t = 1 - \frac{1}{t}$$

Note que $A(t) < 1$ sin importar cuán grande se elija t.

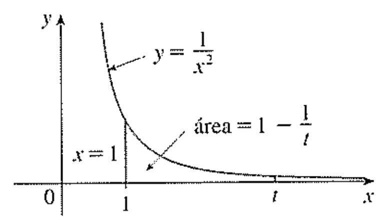


FIGURA 1

Se observa también que

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1$$

El área de la región sombreada se aproxima a 1 cuando $t \to \infty$ (véase la figura 2), por lo tanto se puede decir que el área de la región infinita S es igual a 1 y se escribe.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx = 1$$

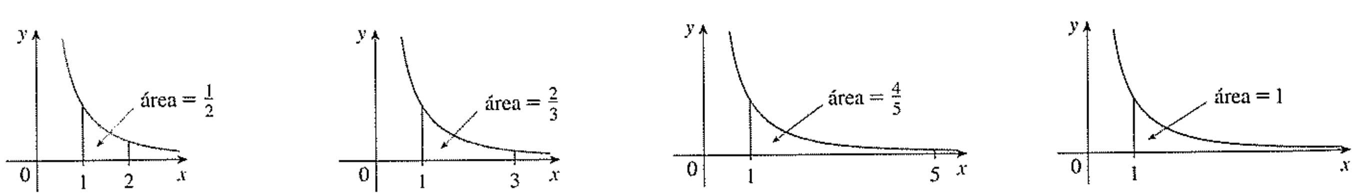


FIGURA 2

Con este ejemplo como guía, se define la integral de f (no necesariamente una función positiva) sobre un intervalo infinito como el límite de integrales en intervalos finitos.

1 DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL IMPROPIA DE TIPO 1

(a) Si la $\int_a^t f(x)\,dx$ existe para todo número $t \geqslant a$, por lo tanto

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$$

siempre que exista el límite (como un número finito).

(b) Si $\int_t^b f(x)\,dx$ existe para todo número $t \leqslant b$, después

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,dx$$

siempre que exista el límite (como un número finito).

Las integrales impropias $\int_a^\infty f(x)\,dx$ y $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ se llaman **convergentes** si el límite correspondiente existe y **divergentes** si el límite no existe.

(c) Si tanto $\int_a^\infty f(x)\,dx$ como $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ son convergentes, entonces se define

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

En el inciso (c) se puede usar cualquier número real a (véase el ejercicio 74).

Cualquiera de las integrales impropias de la definición 1 se puede interpretar como un área siempre que f sea una función positiva. Por ejemplo, en el caso (a) si $f(x) \geqslant 0$ y la integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces se define el área de la región $S = \{(x, y) \mid x \geqslant a, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en la figura 3 como

$$A(S) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Esto es apropiado porque $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es el límite cuando $t \to \infty$ del área bajo la gráfica de f de a a t.

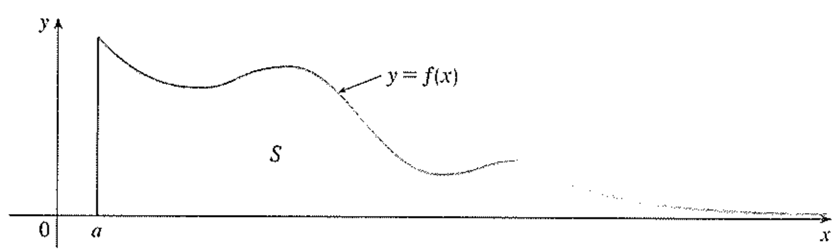


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Determine si la integral $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es convergente o divergente.

SOLUCIÓN De acuerdo con el inciso (a) de la definición 1, se tiene

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\Big]_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$$

El límite no existe como un número finito y, por lo tanto, la integral impropia $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente.

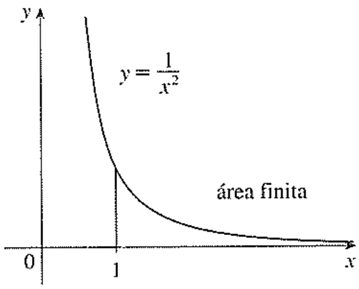


FIGURA 4

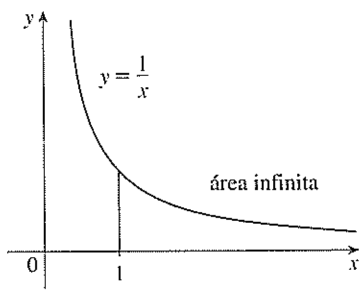


FIGURA 5

TEC En Module 7.8 puede investigar visual y numericamente si algunas integrales impropias son convergentes o divergentes.

Compare el resultado del ejemplo 1 con el ejemplo dado al comienzo de esta sección:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ converge} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \text{ diverge}$$

Geométricamente, esto dice que aunque las curvas $y = 1/x^2$ y $y = 1/x$ son muy similares para $x > 0$, la región bajo $y = 1/x^2$ a la derecha de $x = 1$ (la región sombreada en la figura 4) tiene área finita mientras que la región bajo $y = 1/x$ (en la figura 5) tiene área infinita. Note que tanto $1/x^2$ como $1/x$ tienden a 0 cuando $x \to \infty$ pero $1/x^2$ se aproxima a 0 más rápido que $1/x$. Los valores de $1/x$ no se reducen con la rapidez suficiente para que su integral tenga un valor finito.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN Usando el inciso (b) de la definición 1, se tiene

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx$$

Se integra por partes con $u = x$, $dv = e^x\,dx$ de modo que $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x\Big]_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx$$

$$= -te^t - 1 + e^t$$

Se sabe que $e^t \to 0$ cuando $t \to -\infty$, y por la regla de l'Hospital se tiene

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty}\frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty}\frac{1}{-e^{-t}}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}(-e^t) = 0$$

Por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}(-te^t - 1 + e^t)$$

$$= -0 - 1 + 0 = -1$$

□

EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Es conveniente elegir $a = 0$ en la definición 1(c):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ahora se deben resolver por separado las integrales del lado derecho:

$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}x\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to\infty}(\tan^{-1}t - \tan^{-1}0) = \lim_{t\to\infty}\tan^{-1}t = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1}x\Big]_t^0$$
$$= \lim_{t\to-\infty}(\tan^{-1}0 - \tan^{-1}t)$$
$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Puesto que ambas integrales son convergentes, la integral dada es convergente y

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

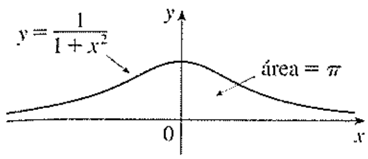


FIGURA 6

Puesto que $1/(1 + x^2) > 0$, la integral impropia dada se puede interpretar como el área de la región infinita que yace bajo la curva $y = 1/(1 + x^2)$ y arriba del eje x (véase la figura 6). □

EJEMPLO 4 ¿Para qué valores de p la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

es convergente?

SOLUCIÓN Se sabe del ejemplo 1 que si $p = 1$, después la integral es divergente, por consiguiente se supondrá que $p \neq 1$. Por lo tanto

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,dx$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg]_{x=1}^{x=t}$$
$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right]$$

Si $p > 1$, luego $p - 1 > 0$, de modo que $t \to \infty$, $t^{p-1} \to \infty$ y $1/t^{p-1} \to 0$ entonces,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1} \qquad \text{si } p > 1$$

y, por lo tanto, la integral converge. Pero si $p < 1$, en tal caso $p - 1 < 0$ y, de este modo

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \qquad \text{cuando } t \to \infty$$

y la integral diverge. □

Se resume el resultado del ejemplo 4 para referencia futura:

2	$\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

TIPO 2: INTEGRANDOS DISCONTINUOS

Suponga que f es una función continua positiva definida en un intervalo finito $[a, b)$ pero tiene una asíntota vertical en b. Sea S la región no acotada bajo la gráfica de f y arriba del eje x entre a y b. (Para integrales del tipo I, las regiones se amplían de forma indefinida en una dirección horizontal. Aquí la región es infinita en una dirección vertical.) El área de la parte S entre a y t (la región sombreada en la figura 7) es

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,dx$$

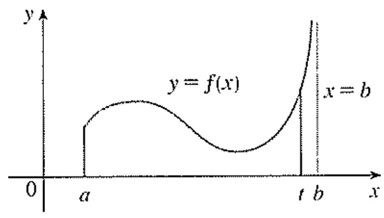


FIGURA 7

Si sucede que $A(t)$ se aproxima a un número definido A cuando $t \to b^-$, entonces se dice que el área de la región S es A y se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Se emplea esta ecuación para definir una integral impropia de tipo 2 aun cuando f no es una función positiva, sin importar qué tipo de discontinuidad tenga f en b.

3 DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL IMPROPIA DE TIPO 2

(a) Si f es continua en $[a, b)$ y es discontinua en b, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

(b) Si f es continua en $(a, b]$ y es discontinua en a, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

si este límite existe (como un número finito).

La integral impropia $\int_a^b f(x)\,dx$ se llama **convergente** si existe el límite correspondiente y **divergente** si no existe el límite.

(c) Si f tiene una discontinuidad en c, donde $a < c < b$, como $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ son convergentes, después se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Los incisos (b) y (c) de la definición 3 se ilustran en las figuras 8 y 9 para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y f tiene asíntotas verticales en a y c, respectivamente.

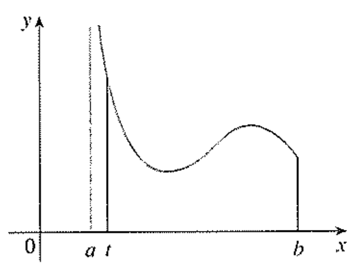


FIGURA 8

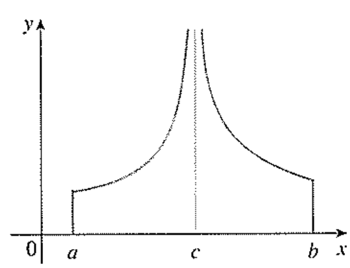


FIGURA 9

EJEMPLO 5 Determine $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Se nota primero que la integral dada es impropia porque $f(x) = 1/\sqrt{x-2}$ tiene la asíntota vertical $x = 2$. Puesto que la discontinuidad infinita aparece en el punto final izquierdo de $[2, 5]$, se usa el inciso (b) de la definición 3:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t \to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t \to 2^+} 2\sqrt{x-2}\,\Big]_t^5 \\ &= \lim_{t \to 2^+} 2\left(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

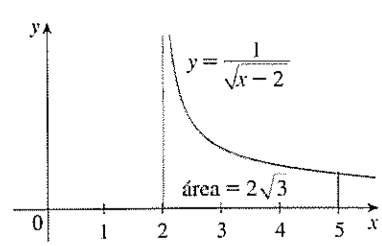


FIGURA 10

Así, la integral impropia dada es convergente y, puesto que el integrando es positivo, se puede interpretar el valor de la integral como el área de la región sombreada en la figura 10. □

EJEMPLO 6 Determine si $\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$ converge o diverge.

SOLUCIÓN Note que la integral dada es impropia porque $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \sec x = \infty$. Si usa el inciso (a) de la definición 3 y la fórmula 14 de la tabla de integrales, se tiene

$$\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \int_0^t \sec x\,dx = \lim_{t\to(\pi/2)^-} \ln|\sec x + \tan x|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to(\pi/2)^-} [\ln(\sec t + \tan t) - \ln 1] = \infty$$

porque $\sec t \to \infty$ y $\tan t \to \infty$ cuando $t \to (\pi/2)^-$. Así, la integral impropia dada es divergente.

EJEMPLO 7 Evalúe $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{x-1}$ si es posible.

SOLUCIÓN Observe que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical del integrando. Puesto que aparece a la mitad del intervalo $[0, 3]$, se debe usar el inciso (c) de la definición 3 con $c = 1$:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

donde

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to1^-} \ln|x-1|\Big]_0^t$$

$$= \lim_{t\to1^-} (\ln|t-1| - \ln|-1|)$$

$$= \lim_{t\to1^-} \ln(1-t) = -\infty$$

debido a $1 - t \to 0^+$ cuando $t \to 1^-$. Así, $\int_0^1 dx/(x-1)$ es divergente. Esto significa que $\int_0^3 dx/(x-1)$ es divergente. [No es necesario evaluar $\int_1^3 dx/(x-1)$.]

ADVERTENCIA Si no se hubiera notado la asíntota $x = 1$ en el ejemplo 7 y se hubiera confundido la integral con una integral ordinaria, entonces se podría haber hecho el siguiente cálculo erróneo:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1|\Big]_0^3 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Esto es incorrecto porque la integral es impropia y se debe calcular en términos de límites.

De ahora en adelante, siempre que se encuentre el símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ se debe decidir, observando la función f en $[a, b]$, si es una integral definida ordinaria o una integral impropia.

EJEMPLO 8 Evalúe $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN Se sabe que la función $f(x) = \ln x$ tiene una asíntota vertical en 0 puesto que $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$. Así, la integral dada es impropia y se tiene

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to0^+} \int_t^1 \ln x\,dx$$

Ahora se integra por partes con $u = \ln x$, $dv = dx$, $du = dx/x$, y $v = x$:

$$\int_t^1 \ln x\,dx = x\ln x\Big]_t^1 - \int_t^1 dx$$
$$= 1\ln 1 - t\ln t - (1 - t)$$
$$= -t\ln t - 1 + t$$

Para hallar el límite del primer término se usa la regla de l'Hospital:

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

Por lo tanto, $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{t\to 0^+} (-t\ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1$

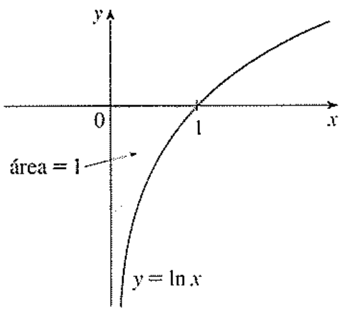


FIGURA 11

En la figura 11 se muestra la interpretación geométrica de este resultado. El área de la región sombreada arriba de $y = \ln x$ y abajo del eje x es 1. □

PRUEBA DE COMPARACIÓN PARA INTEGRALES IMPROPIAS

Algunas veces es imposible hallar el valor exacto de una integral impropia y, sin embargo, es importante saber si es convergente o divergente. En tales casos, es útil el siguiente teorema. Aunque se expresa para integrales de tipo 1, un teorema similar se cumple para integrales de tipo 2.

> **TEOREMA DE COMPARACIÓN** Considere que f y g son funciones continuas con $f(x) \geq g(x) \geq 0$ para $x \geq a$.
>
> (a) Si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es convergente, entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente.
>
> (b) Si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es divergente, entonces $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente.

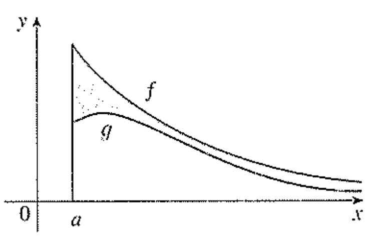


FIGURA 12

Se omite la demostración del teorema de comparación, pero la figura 12 hace que parezca plausible. Si el área bajo la curva superior $y = f(x)$ es finita, en tal caso también lo es el área bajo $y = g(x)$. Y si el área bajo $y = g(x)$ es infinita, por lo tanto también lo es el área bajo $y = f(x)$. [Note que lo contrario no necesariamente es cierto: si $\int_a^\infty g(x)\,dx$ es convergente, $\int_a^\infty f(x)\,dx$ podría ser convergente, o no, y si $\int_a^\infty f(x)\,dx$ es divergente, $\int_a^\infty g(x)\,dx$ podría ser divergente, o no.]

EJEMPLO 9 Muestre que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente.

SOLUCIÓN No se puede evaluar la integral de manera directa, porque la antiderivada de e^{-x^2} no es una función elemental (como se explicó en la sección 7.5). Se escribe

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

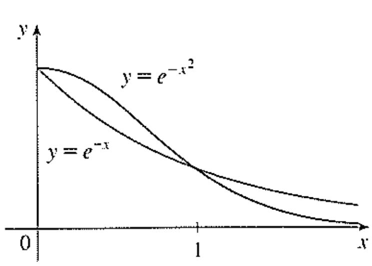


FIGURA 13

y observe que la primera integral del lado derecho es sólo una integral definida ordinaria. En la segunda integral se usa el hecho de que para $x \geq 1$ se tiene $x^2 \geq x$, así que $-x^2 \leq -x$ y, por lo tanto, $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. (Véase la figura 13). La integral de e^{-x} es fácil de evaluar:

$$\int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} (e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}$$

Así, si se toma $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = e^{-x^2}$ en el teorema de comparación, se ve que $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. Se deduce que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente. □

TABLA 1

t	$\int_0^t e^{-x^2}\,dx$
1	0.7468241328
2	0.8820813908
3	0.8862073483
4	0.8862269118
5	0.8862269255
6	0.8862269255

En el ejemplo 9 se mostró que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ es convergente sin calcular su valor. En el ejercicio 70 se indica cómo mostrar que su valor es aproximadamente 0.8862. En teoría de probabilidad es importante conocer el valor exacto de esta integral impropia, como se verá en la sección 8.5; con los métodos del cálculo de varias variables se puede demostrar que el valor exacto es $\sqrt{\pi}/2$. En la tabla 1 se ilustra la definición de una integral impropia mostrando cómo los valores (generados con computadora) de $\int_0^t e^{-x^2}\,dx$ se aproximan a $\sqrt{\pi}/2$ cuando t se vuelve grande. De hecho, estos valores convergen con bastante rapidez porque $e^{-x^2} \to 0$ es muy rápido cuando $x \to \infty$.

TABLA 2

t	$\int_1^t [(1 + e^{-x})/x]\,dx$
2	0.8636306042
5	1.8276735512
10	2.5219648704
100	4.8245541204
1 000	7.1271392134
10 000	9.4297243064

EJEMPLO 10 La integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1 + e^{-x}}{x}\,dx$ es divergente por el teorema de comparación porque

$$\frac{1 + e^{-x}}{x} > \frac{1}{x}$$

y $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ es divergente por el ejemplo 1 [o por (2) con $p = 1$]. □

En la tabla 2 se ilustra la divergencia de la integral del ejemplo 10. Al parecer los valores no se aproximan a ningún número fijo.

7.8 EJERCICIOS

1. Explique por qué cada una de las siguientes integrales es impropia.

 (a) $\displaystyle\int_1^\infty x^4 e^{-x^4}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec x\,dx$

 (c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{x^2 - 5x + 6}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2 + 5}\,dx$

2. ¿Cuáles de las siguientes integrales son impropias? ¿Por qué?

 (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x - 1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2x - 1}\,dx$

 (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_1^2 \ln(x - 1)\,dx$

3. Encuentre el área bajo la curva $y = 1/x^3$ de $x = 1$ a $x = t$ y evalúela para $t = 10$, 100 y 1 000. Después encuentre el área total bajo esta curva para $x \geqslant 1$.

4. (a) Grafique las funciones $f(x) = 1/x^{1.1}$ y $g(x) = 1/x^{0.9}$ en los rectángulos de visión $[0, 10]$ por $[0, 1]$ y $[0, 100]$ por $[0, 1]$.
 (b) Encuentre el área bajo las gráficas de f y g de $x = 1$ a $x = t$ y evalúe para $t = 10$, 100, 10^4, 10^6, 10^{10}, y 10^{20}.
 (c) Encuentre el área total bajo cada curva para $x \geqslant 1$, si existe.

5–40 Determine si cada integral es convergente o divergente. Evalúe las que son convergentes.

5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(3x + 1)^2}\,dx$ 6. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2x - 5}\,dx$

7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 - w}}\,dw$ 8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^2 + 2)^2}\,dx$

9. $\displaystyle\int_4^\infty e^{-y/2}\,dy$ 10. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{-2t}\,dt$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1 + x^2}\,dx$ 12. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty (2 - v^4)\,dv$

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x e^{-x^2}\,dx$ 14. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{2\pi}^\infty \operatorname{sen}\theta\,d\theta$ 16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \cos \pi t\,dt$

17. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x + 1}{x^2 + 2x}\,dx$ 18. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + 3z + 2}$

19. $\displaystyle\int_0^\infty s e^{-5s}\,ds$ 20. $\displaystyle\int_{-\infty}^6 r e^{r/3}\,dr$

21. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$ 22. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^4}\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{9 + x^6}\,dx$ 24. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^x}{e^{2x} + 3}\,dx$

25. $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^3}\,dx$ 26. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{(1 + x^2)^2}\,dx$

27. $\displaystyle\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$ 28. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3 - x}}\,dx$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$

30. $\displaystyle\int_{6}^{8} \frac{4}{(x-6)^3}\, dx$

31. $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{1}{x^4}\, dx$

32. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

33. $\displaystyle\int_{0}^{33} (x-1)^{-1/5}\, dx$

34. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{4y-1}\, dy$

35. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2-6x+5}$

36. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \csc x\, dx$

37. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

38. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\, dx$

39. $\displaystyle\int_{0}^{2} z^2 \ln z\, dz$

40. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$

41–46 Bosqueje la región y encuentre su área (si el área es finita).

41. $S = \{(x, y) \mid x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant e^x\}$

42. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant -2,\ 0 \leqslant y \leqslant e^{-x/2}\}$

43. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2/(x^2+9)\}$

44. $S = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant x/(x^2+9)\}$

45. $S = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < \pi/2,\ 0 \leqslant y \leqslant \sec^2 x\}$

46. $S = \{(x, y) \mid -2 < x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{x+2}\}$

47. (a) Si $g(x) = (\operatorname{sen}^2 x)/x^2$, use su calculadora o computadora para construir una tabla de valores aproximados de $\int_1^t g(x)\, dx$ para $t = 2, 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Al parecer $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente?
(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/x^2$ para mostrar que $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente.
(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g en la misma pantalla para $1 \leqslant x \leqslant 10$. Use su gráfica para explicar de manera intuitiva por qué $\int_1^\infty g(x)\, dx$ es convergente.

48. (a) Si $g(x) = 1/(\sqrt{x} - 1)$, use su calculadora o computadora para elaborar una tabla de valores aproximados de $\int_2^t g(x)\, dx$ para $t = 5, 10, 100, 1000$ y $10\,000$. ¿Al parecer $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es convergente o divergente?
(b) Use el teorema de comparación con $f(x) = 1/\sqrt{x}$ para mostrar que $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es divergente.
(c) Ilustre el inciso (b) graficando f y g en la misma pantalla para $2 \leqslant x \leqslant 20$. Use su gráfica para explicar de forma intuitiva por qué $\int_2^\infty g(x)\, dx$ es divergente.

49–54 Use el teorema de comparación para determinar si la integral es convergente o divergente.

49. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\, dx$

50. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{2+e^{-x}}{x}\, dx$

51. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}}\, dx$

52. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{2+e^x}\, dx$

53. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}}\, dx$

54. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\sqrt{x}}\, dx$

55. La integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$$

es impropia por dos razones: el intervalo $[0, \infty)$ es infinito y el integrando tiene una discontinuidad infinita en 0. Evalúela expresándola como una suma de integrales impropias de tipo 2 y tipo 1 como sigue:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx + \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx$$

56. Evalúe

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\, dx$$

con el mismo método que empleó en el ejercicio 55.

57–59 Determine los valores de p para los cuales la integral converge, y evalúe la integral para esos valores de p.

57. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^p}\, dx$

58. $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$

59. $\displaystyle\int_{0}^{1} x^p \ln x\, dx$

60. (a) Evalúe la integral $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ para $n = 0, 1, 2$ y 3.
(b) Infiera el valor de $\int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx$ cuando n es un entero positivo arbitrario.
(c) Demuestre su conjetura por inducción matemática.

61. (a) Muestre que $\int_{-\infty}^\infty x\, dx$ es divergente.
(b) Muestre que

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} x\, dx = 0$$

Esto muestra que no se puede definir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx$$

62. La *rapidez promedio* de las moléculas en un gas ideal es

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \int_0^\infty v^3 e^{-Mv^2/(2RT)}\, dv$$

donde M es el peso molecular del gas, R es la constante de los gases, T es la temperatura del gas y v es la rapidez molecular. Muestre que

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

63. Se sabe del ejemplo 1 que la región $\mathcal{R} = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 0 \leq y \leq 1/x\}$ tiene área infinita. Demuestre que girando $\mathcal{R}$ respecto al eje x se obtiene un sólido con volumen finito.

64. Use la información y los datos en los ejercicios 29 y 30 de la sección 6.4 con la finalidad de determinar el trabajo requerido para propulsar un satélite de 1 000 kg fuera del campo gravitacional de la Tierra.

65. Determine la *velocidad de escape* v_0 que se requiere para propulsar un cohete de masa m fuera del campo gravitacional de un planeta con masa M y radio R. Use la ley de la gravitación de Newton (véase el ejercicio 29 en la sección 6.4) y el hecho de que la energía cinética inicial de $\frac{1}{2}mv_0^2$ suministra el trabajo necesario.

66. Los astrónomos usan una técnica llamada *estereografía estelar* para determinar la densidad de estrellas en un cúmulo estelar de la densidad observada (bidimensional) que se puede analizar a partir de una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R la densidad de estrellas depende sólo de la distancia r desde el centro del cúmulo. Si la densidad estelar percibida está dada por $y(s)$, donde s es la distancia planar observada desde el centro del cúmulo, y $x(r)$ es la densidad real, se puede mostrar que

$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}}\, x(r)\, dr$$

Si la densidad real de estrellas en un cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

67. Un fabricante quiere producir lámparas que duren cerca de 700 horas pero, por supuesto, algunas se queman más rápido que otras. Sea $F(t)$ la fracción de las lámparas de la compañía que se queman antes de t horas, así que $F(t)$ yace siempre entre 0 y 1.

(a) Elabore una gráfica aproximada de lo que considera se podría parecer la gráfica de F.

(b) ¿Cuál es el significado de la derivada $r(t) = F'(t)$?

(c) ¿Cuál es el valor de $\int_0^\infty r(t)\, dt$? ¿Por qué?

68. Como se verá en la sección 3.8, una sustancia radiactiva decae de manera exponencial: la masa en el tiempo t es $m(t) = m(0)e^{kt}$, donde $m(0)$ es la masa inicial y k es una constante negativa. El tiempo de *vida media* M de un átomo en la sustancia es

$$M = -k \int_0^\infty t e^{kt}\, dt$$

Para el isótopo de carbono radiactivo, ^{14}C, emplee el fechado con radiocarbono, el valor de k is -0.000121. Determine el tiempo de vida media de un átomo de ^{14}C.

69. Determine cúan grande tiene que ser el número a para que

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2 + 1}\, dx < 0.001$$

70. Estime el valor numérico de $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ escribiéndolo como la suma de $\int_0^4 e^{-x^2} dx$ y $\int_4^\infty e^{-x^2} dx$. Aproxime la primera integral por medio de la regla de Simpson con $n = 8$ y muestre que la segunda integral es más pequeña que $\int_4^\infty e^{-4x} dx$, que es menor que 0.0000001.

71. Si $f(t)$ es continua para $t \geq 0$, la *transformada de Laplace de f* es la función de F definida por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st}\, dt$$

y el dominio de F es el conjunto que consta de los números s para los que la integral converge. Encuentre las transformadas de Laplace de las siguientes funciones.

(a) $f(t) = 1$ (b) $f(t) = e^t$ (c) $f(t) = t$

72. Muestre que si $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ para $t \geq 0$, donde M y a son constantes, por lo tanto la transformada de Laplace $F(s)$ existe para $s > a$.

73. Suponga que $0 \leq f(t) \leq Me^{at}$ y $0 \leq f'(t) \leq Ke^{at}$ para $t \geq 0$, donde f' es continua. Si la transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s)$ y la transformada de Laplace de $f'(t)$ es $G(s)$, muestre que

$$G(s) = sF(s) - f(0) \qquad s > a$$

74. Si $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$ es convergente y a y b son números reales, demuestre que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \int_a^\infty f(x)\, dx = \int_{-\infty}^b f(x)\, dx + \int_b^\infty f(x)\, dx$$

75. Muestre que $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

76. Muestre que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{-\ln y}\, dy$ interpretando las integrales como áreas

77. Determine el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} - \frac{C}{x + 2} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

78. Encuentre el valor de la constante C para la cual la integral

$$\int_0^\infty \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{C}{3x + 1} \right) dx$$

converge. Evalúe la integral para este valor de C.

79. Considere que f es continua en $[0, \infty]$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$. ¿Es posible que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ sea convengente?

80. Demuestre que si $a > -1$ y $b > a + 1$, en tal caso la integral siguiente es convergente

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1 + x^b}\, dx$$

7 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Enuncie la regla para la integración por partes. En la práctica, ¿cómo la emplea?

2. ¿Cómo evalúa $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, dx$ si m es impar? ¿Qué pasa si n es impar? ¿Qué pasa si tanto m como n son pares?

3. Si la expresión $\sqrt{a^2 - x^2}$ ocurre en una integral, ¿qué sustitución se podría probar? ¿Qué pasa si ocurre $\sqrt{a^2 + x^2}$? ¿Qué pasa si aparece $\sqrt{x^2 - a^2}$?

4. ¿Cuál es la forma del desarrollo en fracciones parciales de una función racional $P(x)/Q(x)$ si el grado de P es menor que el grado de Q y $Q(x)$ sólo tiene factores lineales distintos? ¿Qué sucede si se repite un factor lineal? ¿Qué pasa si $Q(x)$ tiene un factor cuadrático irreducible (no repetido)? ¿Qué sucede si se repite el factor cuadrático?

5. Enuncie las reglas para aproximar la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$ con la regla del punto medio, la regla del trapecio y la regla de Simpson. ¿Qué esperaría que produjera la mejor estimación? ¿Cómo aproxima el error para cada regla?

6. Defina las siguientes integrales impropias.

   (a) $\int_a^\infty f(x)\, dx$ (b) $\int_{-\infty}^b f(x)\, dx$ (c) $\int_{-\infty}^\infty f(x)\, dx$

7. Defina la integral impropia $\int_a^b f(x)\, dx$ para cada uno de los siguientes casos.
   (a) f tiene una discontinuidad infinita en a.
   (b) f tiene una discontinuidad infinita en b.
   (c) f tiene una discontinuidad infinita en c, donde $a < c < b$.

8. Enuncie el teorema de comparación para integrales impropias.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es verdadero, explique por qué. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que refute al enunciado.

1. $\dfrac{x(x^2+4)}{x^2-4}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-2}$.

2. $\dfrac{x^2+4}{x(x^2-4)}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-2}$.

3. $\dfrac{x^2+4}{x^2(x-4)}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x-4}$.

4. $\dfrac{x^2-4}{x(x^2+4)}$ se puede escribir en la forma $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2+4}$.

5. $\displaystyle\int_0^4 \frac{x}{x^2-1}\, dx = \tfrac{1}{2} \ln 15$

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{\sqrt{2}}}\, dx$ es convergente.

7. Si f es continua, por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\, dx$.

8. La regla del punto medio es siempre más exacta que la regla del trapecio.

9. (a) Toda función elemental tiene una derivada elemental.
   (b) Toda función elemental tiene una antiderivada elemental.

10. Si f es continua en $[0, \infty)$ y $\int_1^\infty f(x)\, dx$ es convergente, en seguida $\int_0^\infty f(x)\, dx$ es convergente.

11. Si f es una función continua decreciente en $[1, \infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, después $\int_1^\infty f(x)\, dx$ es convergente.

12. Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ y $\int_a^\infty g(x)\, dx$ son convergentes, por lo tanto $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\, dx$ es convergente.

13. Si $\int_a^\infty f(x)\, dx$ y $\int_a^\infty g(x)\, dx$ son divergentes, luego $\int_a^\infty [f(x) + g(x)]\, dx$ es divergente.

14. Si $f(x) \leqslant g(x)$ y $\int_0^\infty g(x)\, dx$ diverge, en consecuencia $\int_0^\infty f(x)\, dx$ también diverge.

EJERCICIOS

Nota: En los ejercicios 7.5 se provee práctica adicional en técnicas de integración.

1–40 Evalúe la integral.

1. $\displaystyle\int_0^5 \frac{x}{x+10}\, dx$

2. $\displaystyle\int_0^5 y e^{-0.6y}\, dy$

3. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{1+\operatorname{sen}\theta}\, d\theta$

4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{dt}{(2t+1)^3}$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\theta \cos^2\theta\, d\theta$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{y^2-4y-12}\, dy$

7. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln t)}{t}\, dt$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

9. $\displaystyle\int_1^4 x^{3/2} \ln x\, dx$

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}\, dx$

11. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$

12. $\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$

13. $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$

14. $\int \frac{x^2+2}{x+2}\,dx$

15. $\int \frac{x-1}{x^2+2x}\,dx$

16. $\int \frac{\sec^6\theta}{\tan^2\theta}\,d\theta$

17. $\int x \sec x \tan x\,dx$

18. $\int \frac{x^2+8x-3}{x^3+3x^2}\,dx$

19. $\int \frac{x+1}{9x^2+6x+5}\,dx$

20. $\int \tan^5\theta \sec^3\theta\,d\theta$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x}}$

22. $\int te^{\sqrt{t}}\,dt$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

24. $\int e^x \cos x\,dx$

25. $\int \frac{3x^3-x^2+6x-4}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$

26. $\int x \operatorname{sen} x \cos x\,dx$

27. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \operatorname{sen} 2x\,dx$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1}\,dx$

29. $\int_{-1}^1 x^5 \sec x\,dx$

30. $\int \frac{dx}{e^x\sqrt{1-e^{-2x}}}$

31. $\int_0^{\ln 10} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+8}\,dx$

32. $\int_0^{\pi/4} \frac{x \operatorname{sen} x}{\cos^3 x}\,dx$

33. $\int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}}\,dx$

34. $\int (\operatorname{arcsen} x)^2\,dx$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{x+x^{3/2}}}\,dx$

36. $\int \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\,d\theta$

37. $\int (\cos x + \operatorname{sen} x)^2 \cos 2x\,dx$

38. $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\,dx$

39. $\int_0^{1/2} \frac{xe^{2x}}{(1+2x)^2}\,dx$

40. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sqrt{\tan\theta}}{\operatorname{sen} 2\theta}\,d\theta$

41–50 Evalúe la integral o muestre que es divergente.

41. $\int_1^\infty \frac{1}{(2x+1)^3}\,dx$

42. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

43. $\int_2^\infty \frac{dx}{x\ln x}$

44. $\int_2^6 \frac{y}{\sqrt{y-2}}\,dy$

45. $\int_0^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

46. $\int_0^1 \frac{1}{2-3x}\,dx$

47. $\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$

48. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-2x}$

49. $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

50. $\int_1^\infty \frac{\tan^{-1}x}{x^2}\,dx$

51–52 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable graficando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

51. $\int \ln(x^2+2x+2)\,dx$

52. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

53. Grafique la función $f(x) = \cos^2 x \operatorname{sen}^3 x$ y use la gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. Después evalúe la integral para confirmar su conjetura.

CAS 54. (a) ¿Cómo evaluaría a mano $\int x^5 e^{-2x}\,dx$? (No realice la integración.)
(b) ¿Cómo evaluaría $\int x^5 e^{-2x}\,dx$ por medio de tablas? (No realice la evaluación.)
(c) Emplee un CAS para evaluar $\int x^5 e^{-2x}\,dx$.
(d) Grafique el integrando y la integral indefinida en la misma pantalla.

55–58 Use la tabla de integrales de las páginas de referencia para evaluar la integral.

55. $\int \sqrt{4x^2-4x-3}\,dx$

56. $\int \csc^5 t\,dt$

57. $\int \cos x\sqrt{4+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

58. $\int \frac{\cot x}{\sqrt{1+2\operatorname{sen} x}}\,dx$

59. Compruebe la fórmula 33 en la tabla de integrales (a) por derivación y (b) por medio de una sustitución trigonométrica.

60. Compruebe la fórmula 62 de la tabla de integrales.

61. ¿Es posible hallar un número n tal que $\int_0^\infty x^n\,dx$ es convergente?

62. ¿Para qué valores de a es $\int_0^\infty e^{ax}\cos x\,dx$ convergente? Evalúe la integral para esos valores de a.

63–64 Emplee (a) la regla del trapecio, (b) la regla del punto medio y (c) la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar la integral dada. Redondee sus respuestas a seis decimales.

63. $\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx$

64. $\int_1^4 \sqrt{x}\cos x\,dx$

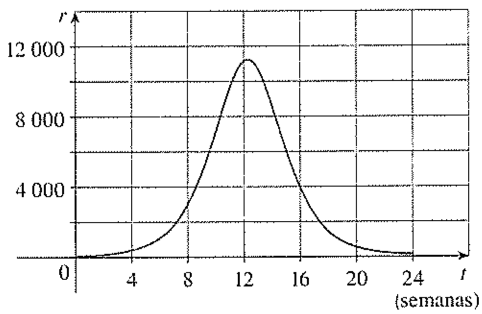
65. Estime los errores relacionados con el ejercicio 63, incisos (a) y (b). ¿Qué tan grande debe ser n en cada caso para garantizar un error menor que 0.00001?

66. Use la regla de Simpson con $n = 6$ para estimar el área bajo la curva $y = e^x/x$ de $x = 1$ a $x = 4$.

67. La lectura del velocímetro (v) en un automóvil se observó a intervalos de 1 minuto y se registró en una tabla. Use la regla de Simpson para estimar la distancia que recorrió el automóvil.

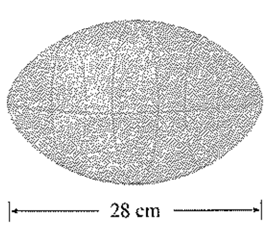
t (min)	v (mi/h)	t (min)	v (mi/h)
0	40	6	56
1	42	7	57
2	45	8	57
3	49	9	55
4	52	10	56
5	54		

68. Una población de abejas se incrementó en una proporción de $r(t)$ abejas por semana, donde la gráfica de r es como se muestra. Use la regla de Simpson con seis subintervalos para estimar el incremento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



69. (a) Si $f(x) = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, emplee una gráfica para hallar una cota superior para $|f^{(4)}(x)|$.
(b) Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ y emplee el inciso (a) para estimar el error.
(c) ¿Qué tan grande debe ser n para garantizar que el tamaño del error al usar S_n sea menor que 0.00001?

70. Suponga que se pide estimar el volumen de un balón de futbol americano. Al hacer la medición encuentra que un balón de futbol mide 28 cm de largo. Con una cuerda determina que la circunferencia en su punto más amplio mide 53 cm. La circunferencia a 7 cm de cada extremo es 45 cm. Use la regla de Simpson para hacer su estimación.



71. Use el teorema de comparación para determinar si la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{x^3}{x^5 + 2}\, dx$$

es convergente o divergente.

72. Encuentre el área de la región acotada por la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$ y la recta $y = 3$.

73. Encuentre el área acotada por las curvas $y = \cos x$ y $y = \cos^2 x$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

74. Encuentre el área de la región acotada por las curvas $y = 1/(2 + \sqrt{x})$, $y = 1/(2 - \sqrt{x})$, y $x = 1$.

75. La región bajo la curva $y = \cos^2 x$, $0 \leq x \leq \pi/2$, se hace girar respecto al eje x. Encuentre el volumen del sólido resultante.

76. La región del ejercicio 75 se hace girar respecto al eje y. Determine el volumen del sólido resultante.

77. Si f' es continua en $[0, \infty)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, muestre que

$$\int_0^{\infty} f'(x)\, dx = -f(0)$$

78. Se puede extender la definición de valor promedio de una función continua a un intervalo infinito definiendo el valor promedio de f en el intervalo $[a, \infty)$ como

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t - a} \int_a^t f(x)\, dx$$

(a) Encuentre el valor promedio de $y = \tan^{-1} x$ en el intervalo $[0, \infty)$.
(b) Si $f(x) \geq 0$ y la $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ es divergente, muestre que el valor promedio de f en el intervalo $[a, \infty)$ es $\lim_{x \to \infty} f(x)$, si existe este límite.
(c) Si $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ es convergente, ¿cuál es el valor promedio de f en el intervalo $[a, \infty)$?
(d) Encuentre el valor promedio de $y = \text{sen}\, x$ en el intervalo $[0, \infty)$.

79. Use la sustitución $u = 1/x$ para mostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx = 0$$

80. La magnitud de la fuerza repulsiva entre dos cargas puntuales con el mismo signo, una de tamaño 1 y la otra de tamaño q, es

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

donde r es la distancia entre las cargas y ε_0 es una constante. El *potencial* V en un punto P debido a la carga q se define como el trabajo invertido para llevar una carga unitaria a P desde el infinito a lo largo de la recta que une a q y P. Encuentre una fórmula para V.

PROBLEMAS ADICIONALES

Cubra la solución del ejemplo e intente resolverlo primero.

EJEMPLO 1

(a) Demuestre que si f es una función continua, en tal caso

$$\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

(b) Use el inciso (a) para mostrar que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

para todos los números positivos n.

SOLUCIÓN

Los principios de la resolución de problemas se discuten en la página 76.

(a) A primera vista, la ecuación dada podría parecer un poco desconcertante. ¿Cómo es posible conectar el lado izquierdo con el lado derecho? Con frecuencia las conexiones se pueden hacer a través de uno de los principios de resolución de problemas: *introducir algo extra*. Aquí el ingrediente extra es una nueva variable. Es común pensar en introducir una nueva variable cuando se usa la regla de sustitución para integrar una función específica. Pero esa técnica aún es útil en la circunstancia actual en la que se tiene una función general f.

Una vez que se piensa hacer la sustitución, la forma del lado derecho hace pensar que debe ser $u = a - x$. Después $du = -dx$. Cuando $x = 0$, $u = a$; cuando $x = a$, $u = 0$. Así,

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du$$

Pero esta integral del lado derecho es sólo otra forma de escribir $\int_0^a f(x)\,dx$. Por lo tanto, queda demostrada la ecuación dada.

(b) Si se permite que la integral dada sea I y se aplica el inciso (a) con $a = \pi/2$, se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x)}{\operatorname{sen}^n(\pi/2 - x) + \cos^n(\pi/2 - x)}\,dx$$

Las gráficas de computadora de la figura 1 hacen que parezca plausible que todas las integrales del ejemplo tengan el mismo valor. La gráfica de cada integrando se identifica con el valor correspondiente de n.

Una identidad trigonométrica bien conocida indica que $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$ y $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$, así que se obtiene

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \operatorname{sen}^n x}\,dx$$

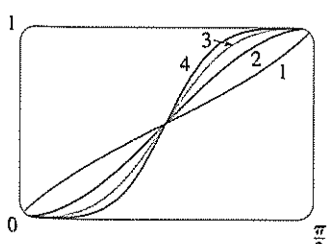


FIGURA 1

Observe que las dos expresiones para I son muy similares. De hecho, los integrandos tienen el mismo denominador. Esto hace pensar que se deben sumar las dos expresiones. Si se procede de esta manera, se obtiene

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}{\operatorname{sen}^n x + \cos^n x}\,dx = \int_0^{\pi/2} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto, $I = \pi/4$. □

PROBLEMAS ADICIONALES

PROBLEMAS

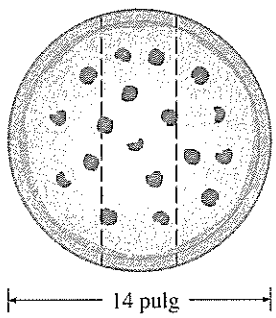


FIGURA PARA EL PROBLEMA 1

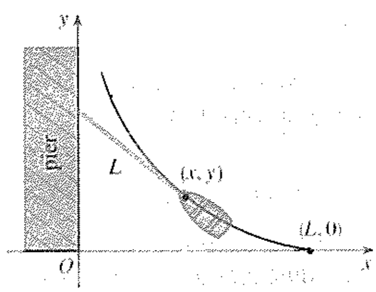


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

1. Tres estudiantes de matemáticas han ordenado una pizza de 14 pulgadas. En lugar de cortar en la forma tradicional, deciden hacer cortes paralelos, como se ilustra en la figura. Debido a sus conocimientos de matemáticas, pueden determinar dónde cortar de modo que cada uno obtenga la misma cantidad de pizza. ¿Dónde se hacen los cortes?

2. Evalúe $\int \frac{1}{x^7 - x}\,dx$.

El método directo sería empezar con fracciones parciales, pero eso sería cruel. Pruebe con una sustitución.

3. Evalúe $\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 - x^7} - \sqrt[7]{1 - x^3}\right) dx$.

4. Los centros de dos discos de radio 1 son una unidad aparte. Encuentre el área de la unión de los dos discos.

5. Una elipse es cortado por un círculo de radio a. El eje mayor de la elipse coincide con el diámetro del círculo y el eje menor de la elipse tiene una longitud $2b$. Demuestre que el área del resto del círculo es igual al área de una elipse con semiejes a y $a - b$.

6. Una persona parada inicialmente en el punto O camina a lo largo de un muelle jalando un bote mediante una cuerda de longitud L. La persona mantiene la cuerda recta y tensa. La trayectoria que sigue el bote es una curva llamada *tractrix* y tiene la propiedad de que la cuerda es siempre tangente a la curva (véase la figura).

(a) Muestre que si la trayectoria seguida por el bote es la gráfica de la función $y = f(x)$, en consecuencia

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{-\sqrt{L^2 - x^2}}{x}$$

(b) Determine la función $y = f(x)$.

7. Una función f se define mediante

$$f(x) = \int_0^{\pi} \cos t \cos(x - t)\,dt \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Determine el valor mínimo de f.

8. Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\int_0^1 (\ln x)^n\,dx = (-1)^n n!$$

9. Muestre que

$$\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

Sugerencia: comience mostrando que si I_n denota la integral, en tal caso

$$I_{k+1} = \frac{2k + 2}{2k + 3} I_k$$

10. Suponga que f es una función positiva tal que f' es continua.
(a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(x)$ sen nx con la gráfica de $y = f(x)$? ¿Qué sucede cuando $n \longrightarrow \infty$?
(b) Haga una conjetura en cuanto al valor del límite

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f(x) \operatorname{sen} nx \, dx$$

con respecto a las gráficas del integrando.
(c) Por medio de la integración por partes, confirme la suposición que hizo en el inciso (b). [Use el hecho de que, puesto que f' es continua, hay una constante M tal que $|f'(x)| \leq M$ para $0 \leq x \leq 1$.]

11. Si $0 < a < b$, encuentre $\lim\limits_{t \to 0} \left\{ \int_0^1 [bx + a(1 - x)]^t \, dx \right\}^{1/t}$.

12. Grafique $f(x) = \operatorname{sen}(e^x)$ y use la gráfica para estimar el valor de t tal que $\int_t^{t+1} f(x)\, dx$ es un máximo. Después encuentre el valor exacto de t que maximiza esta integral.

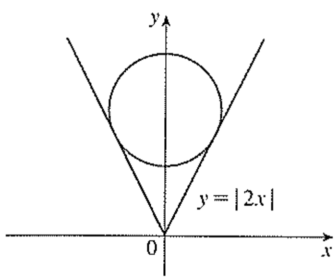


FIGURA PARA EL PROBLEMA 13

13. El círculo con radio 1 mostrado en la figura toca la curva $y = |2x|$ dos veces. Encuentre el área de la región que yace entre las dos curvas.

14. Se prende un cohete en posición recta, quemando combustible con una proporción constante de b kilogramos por segundo. Sea $v = v(t)$ la velocidad del cohete en el instante t y suponga que la velocidad u del gas de salida es constante. Sea $M = M(t)$ la masa del cohete en el instante t y note que M disminuye cuando se quema el combustible. Si se ignora la resistencia del aire, se deduce de la segunda ley de Newton que

$$F = M \frac{dv}{dt} - ub$$

donde la fuerza $F = -Mg$. Así,

$$\boxed{1} \qquad M \frac{dv}{dt} - ub = -Mg$$

Sea M_1 la masa del cohete sin combustible, M_2 la masa inicial del combustible y $M_0 = M_1 + M_2$. Por lo tanto, hasta que se agota el combustible en el tiempo $t = M_2 b$, la masa es $M = M_0 - bt$.
(a) Sustituya $M = M_0 - bt$ en la ecuación 1 y resuelva la ecuación resultante para v. Use la condición inicial $v(0) = 0$ para evaluar la constante.
(b) Determine la velocidad del cohete en el tiempo $t = M_2/b$. Ésta se llama *velocidad de combustible agotado.*
(c) Determine la altura del cohete $y = y(t)$ y el tiempo en que se quema todo el combustible.
(d) Encuentre la altura del cohete en cualquier tiempo t.

15. Use la integración por partes para mostrar que, para toda $x > 0$,

$$0 < \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\ln(1 + x + t)}\, dt < \frac{2}{\ln(1 + x)}$$

16. Suponga que $f(1) = f'(1) = 0$, f'' es continua en $[0, 1]$ y $|f''(x)| \leq 3$ para toda x. Demuestre que

$$\left| \int_0^\infty f(x)\, dx \right| \leq \frac{1}{2}$$