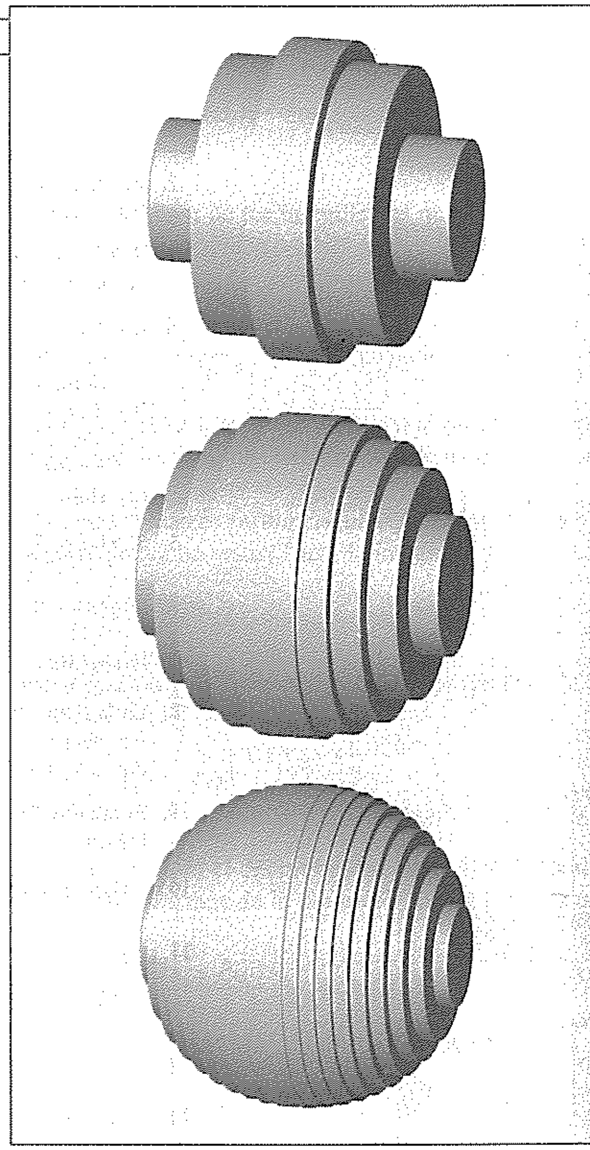
6

APLICACIONES DE LA INTEGRACIÓN



El volumen de una esfera es el límite de la suma de volúmenes de los cilindros que se aproximan a una esfera.

En este capítulo se exploran algunas de las aplicaciones de la integral definida como calcular áreas entre curvas, volúmenes de sólidos y el trabajo que efectúa una fuerza variable. El tema común es el método general siguiente, que es similar al usado para determinar áreas bajo curvas: divida una cantidad Q en un gran número de partes pequeñas. Luego obtenga el valor aproximado de cada parte pequeña mediante una cantidad de la forma $f(x_i^*)\,\Delta x$ y en seguida aproxime a Q mediante una suma de Riemann. Después obtenga el límite y exprese Q como una integral. Por último, evalúe la integral usando el teorema fundamental del cálculo o la regla del punto medio.

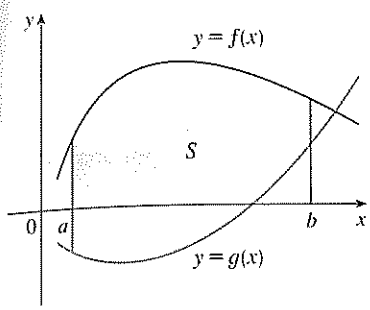


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

En el capítulo 5 se define y se calculan áreas de regiones que están bajo las gráficas de funciones. En este caso se usan integrales para calcular las áreas de regiones que quedan entre las gráficas de dos funciones.

Considere la región S que se ubica entre dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, donde f y g son funciones continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$. (Véase figura 1.)

De la misma manera como se señala para áreas bajo curvas de la sección 5.1, divida S en n franjas con igual anchura, y luego calcule el valor aproximado de la i-ésima franja mediante un rectángulo con base Δx y altura $f(x_i^*) - g(x_i^*)$. (Véase figura 2. Si lo desea, podría tomar todos los puntos de muestra como extremos derechos, en cuyo caso $x_i^* = x_i$.) Por lo tanto, la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x$$

es una aproximación a lo que se intuyo que es el área de S.

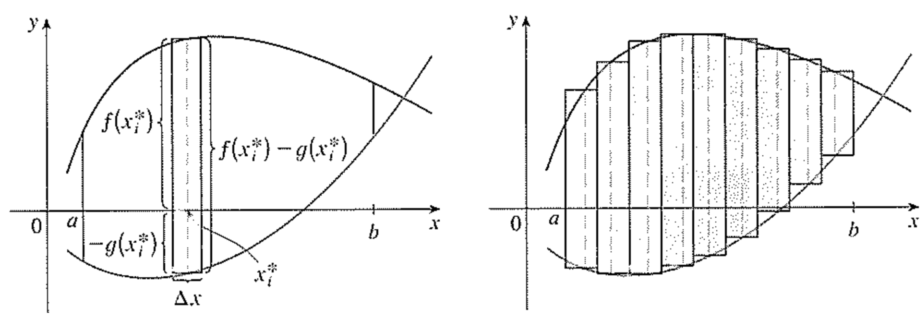


FIGURA 2 (a) Rectángulo representativo (b) Rectángulo de aproximación

Al parecer, esta aproximación es mejor cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, defina **área** A de S como el valor límite de la suma de áreas de estos rectángulos de aproximación.

$$\boxed{1} \qquad \boxed{A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i^*) - g(x_i^*)]\,\Delta x}$$

Identifique el límite en (1) como la integral definida de $f - g$. Por lo tanto, tiene la fórmula siguiente para el área.

> $\boxed{2}$ El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, donde$f$ y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para toda x en $[a, b]$ es
>
> $$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Observe que en el caso especial donde $g(x) = 0$, S es la región bajo la gráfica de f y la definición general del área (1) se reduce a la definición anterior (definición 2 de la sección 5.1).

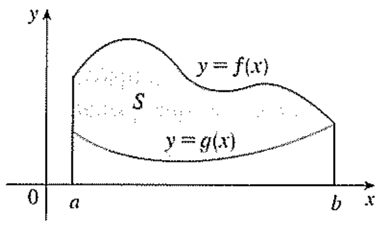


FIGURA 3

$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

En el caso donde tanto f y g son positivas, puede ver en la figura 3 por qué (2) es cierta:

$$A = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)]$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO 1 Determine el área de la región acotada por arriba con $y = e^x$, por abajo mediante $y = x$ y a los lados por $x = 0$ y $x = 1$.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 4. La curva del límite superior es $y = e^x$ y la curva del límite inferior es $y = x$. De este modo use la fórmula del área (2) con $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, $a = 0$ y $b = 1$:

$$A = \int_0^1 (e^x - x)\,dx = e^x - \tfrac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$= e - \tfrac{1}{2} - 1 = e - 1.5$$

□

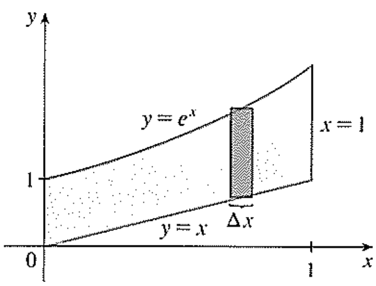


FIGURA 4

En la figura 4 se toma un rectángulo de aproximación representativo cuya anchura es Δx como recordatorio del procedimiento por medio del cual se define el área (1). En general, cuando plantee una integral para determinar un área, es útil elaborar un croquis de la región para identificar la curva superior y_T, la curva inferior y_B y el rectángulo de aproximación representativo como en la figura 5. Por consiguiente, el área de un rectángulo característico es $(y_T - y_B)\,\Delta x$ y la ecuación

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (y_T - y_B)\,\Delta x = \int_a^b (y_T - y_B)\,dx$$

resume el procedimiento al añadir, en el sentido limitante, las áreas de todos los rectángulos representativos.

Observe que, en la figura 5, el límite o frontera izquierda se reduce a un punto, en tanto que en la figura 3, la frontera derecha se reduce a un punto. En el ejemplo siguiente, ambos límites se reducen a un punto, de modo que el primer paso es determinar a y b.

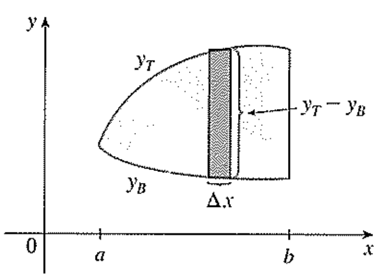


FIGURA 5

EJEMPLO 2 Calcule el área de la región definida por las parábolas $y = x^2$ y $y = 2x - x^2$.

SOLUCIÓN Primero determine los puntos de intersección de las parábolas resolviendo en forma simultánea sus ecuaciones. El resultado es $x^2 = 2x - x^2$, o $2x^2 - 2x = 0$. Por eso, $2x(x - 1) = 0$, de modo que $x = 0$ o 1. Los puntos de corte son $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

Según la figura 6, los límites superior e inferior son

$$y_T = 2x - x^2 \qquad \text{y} \qquad y_B = x^2$$

El área de un rectángulo representativo es

$$(y_T - y_B)\,\Delta x = (2x - x^2 - x^2)\,\Delta x$$

por lo que la región se sitúa entre $x = 0$ y $x = 1$. De modo que el área total es

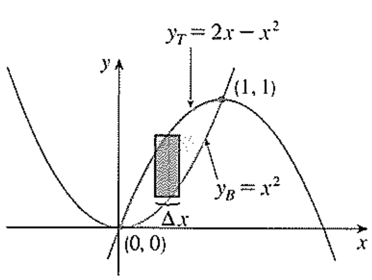


FIGURA 6

$$A = \int_0^1 (2x - 2x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x - x^2)\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

□

Algunas veces es difícil, o hasta imposible, determinar los puntos donde se cortan exactamente las dos curvas. Como se muestra en el ejemplo siguiente, con la ayuda de una calculadora para graficar o de una computadora, puede encontrar valores aproximados de los puntos de intersección, y luego proceder como antes.

EJEMPLO 3 Calcular el área aproximada de la región acotada por las curvas $y = x/\sqrt{x^2+1}$ y $y = x^4 - x$.

SOLUCIÓN Si tratara de determinar los puntos de intersección exactos, habría de resolver la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = x^4 - x$$

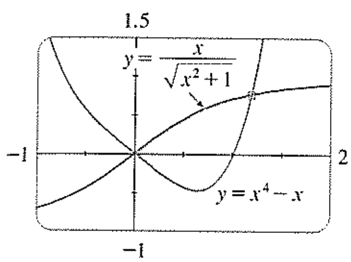


FIGURA 7

Esta ecuación luce muy difícil como para resolverla de manera exacta (de hecho, es imposible), de modo que recurra a una calculadora para graficar o a una computadora para trazar las gráficas de las dos curvas de la figura 7. Un punto de intersección es el origen. Haga un acercamiento en el otro punto de intersección y halle que $x \approx 1.18$. (Si se requiere mayor precisión, se podría aplicar el método de Newton o un buscador de raíces, si se cuenta con un instrumento para graficar.) En estos terminos, una aproximación al área entre las curvas es

$$A \approx \int_0^{1.18} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - (x^4 - x) \right] dx$$

Para integrar el primer término aplique la sustitución $u = x^2 + 1$. Después, $du = 2x\,dx$, y cuando $x = 1.18$, $u \approx 2.39$. Así,

$$\begin{aligned} A &\approx \tfrac{1}{2}\int_1^{2.39} \frac{du}{\sqrt{u}} - \int_0^{1.18} (x^4 - x)\,dx \\ &= \sqrt{u}\Big]_1^{2.39} - \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1.18} \\ &= \sqrt{2.39} - 1 - \frac{(1.18)^5}{5} + \frac{(1.18)^2}{2} \\ &\approx 0.785 \end{aligned}$$

□

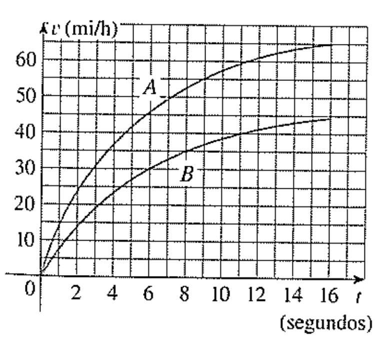


FIGURA 8

EJEMPLO 4 En la figura 8 se ilustran las curvas de velocidad para dos automóviles, A y B, parten juntos y se desplazan a lo largo de la misma carretera. ¿Qué representa el área entre las curvas? Aplique la regla del punto medio para estimarla.

SOLUCIÓN De acuerdo con la sección 5.4, el área bajo la curva A de la velocidad representa la distancia que recorre el vehículo A durante los primeros 16 segundos. En forma similar, el área bajo la curva B es la distancia que recorre el automóvil B durante ese tiempo. De este modo, el área entre estas curvas, que es la diferencia de las áreas bajo las curvas, es la distancia entre los vehículos después de 16 segundos. Tome las velocidades de la gráfica y conviértalas en pies por segundo (1 mi/h $= \frac{5280}{3600}$ pies/s).

t	0	2	4	6	8	10	12	14	16
v_A	0	34	54	67	76	84	89	92	95
v_B	0	21	34	44	51	56	60	63	65
$v_A - v_B$	0	13	20	23	25	28	29	29	30

Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ intervalos, de modo que $\Delta t = 4$. Los puntos medios de los intervalos son $\bar{t}_1 = 2$, $\bar{t}_2 = 6$, $\bar{t}_3 = 10$ y $\bar{t}_4 = 14$. Estime la distancia entre los automóviles después de 16 segundos, como se indica a continuación:

$$\int_0^{16} (v_A - v_B)\, dt \approx \Delta t\,[13 + 23 + 28 + 29]$$

$$= 4(93) = 372 \text{ pies}$$

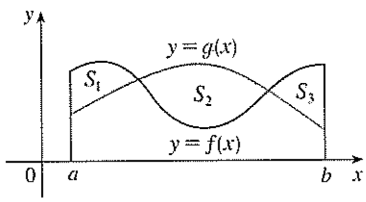


FIGURA 9

Si se pide determinar el área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ donde $f(x) \geq g(x)$ para algunos valores de x pero $g(x) \geq f(x)$ para otros valores de x, por lo tanto divida la región dada S en varias regiones $S_1, S_2, \ldots$ con áreas $A_1, A_2, \ldots$ como se ilustra en la figura 9. Después defina el área de la región S como la suma de las áreas de las regiones más pequeñas $S_1, S_2, \ldots$, es decir, $A = A_1 + A_2 + \cdots$. Puesto que

$$|f(x) - g(x)| = \begin{cases} f(x) - g(x) & \text{cuando } f(x) \geq g(x) \\ g(x) - f(x) & \text{cuando } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

tiene la expresión siguiente para A.

> $\boxed{3}$ El área entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es
>
> $$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

Al evaluar la integral en (3), aún puede dividir en integrales que corresponderían a $A_1, A_2, \ldots$.

EJEMPLO 5 Calcular el área de la región acotada por las curvas $y = \text{sen}\, x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \pi/2$.

SOLUCIÓN Los puntos de intersección se presentan cuando $\text{sen}\, x = \cos x$, es decir, cuando $x = \pi/4$ (puesto que $0 \leq x \leq \pi/2$). La región se ilustra en la figura 10. Observe que $\cos x \geq \text{sen}\, x$ cuando $0 \leq x \leq \pi/4$ pero $\text{sen}\, x \geq \cos x$ cuando $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$. Por lo tanto, el área requerida es

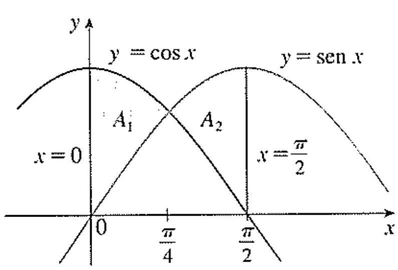


FIGURA 10

$$A = \int_0^{\pi/2} |\cos x - \text{sen}\, x|\, dx = A_1 + A_2$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \text{sen}\, x)\, dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\text{sen}\, x - \cos x)\, dx$$

$$= [\text{sen}\, x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \text{sen}\, x]_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 0 - 1\right) + \left(-0 - 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{2} - 2$$

En este ejemplo en particular podría haber ahorrado algún trabajo observando que la región es simétrica con respecto a $x = \pi/4$ y así

$$A = 2A_1 = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \text{sen}\, x)\, dx$$

Algunas regiones se manejan mejor si se considera a x en función de y. Si una región está limitada con curvas de ecuaciones $x = f(y)$, $x = g(y)$, $y = c$ y $y = d$, donde f y g son continuas y $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$ (véase figura 11), en seguida su área es

$$A = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,dy$$

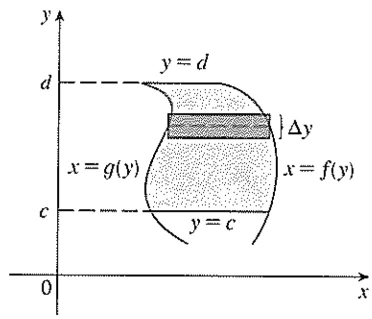


FIGURA 11

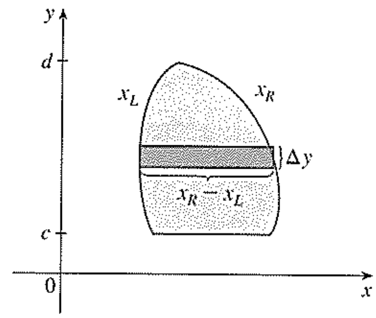


FIGURA 12

Si escribe x_R para el límite derecho y x_L para el límite izquierdo, en tal caso, según la figura 12, tiene

$$A = \int_c^d (x_R - x_L)\,dy$$

He aquí un rectángulo de aproximación característico con dimensiones $x_R - x_L$ y Δy.

EJEMPLO 6 Calcular el área definida mediante la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

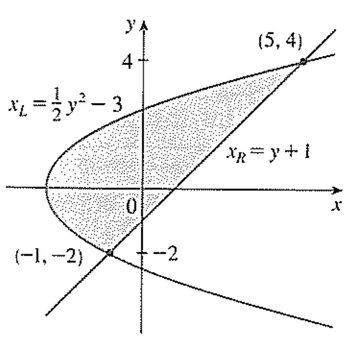


FIGURA 13

SOLUCIÓN Al resolver las dos ecuaciones los puntos de intersección son $(-1, -2)$ y $(5, 4)$. Al resolver la ecuación de la parábola y determinan x; observa que, según la figura 13, las curvas de los límites a la izquierda y a la derecha son

$$x_L = \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \qquad x_R = y + 1$$

Es necesario integrar entre los valores de y adecuados, $y = -2$ y $y = 4$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{4} (x_R - x_L)\,dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left[(y + 1) - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)\right] dy \\ &= \int_{-2}^{4} \left(-\tfrac{1}{2}y^2 + y + 4\right) dy \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{y^3}{3}\right) + \frac{y^2}{2} + 4y \Bigg]_{-2}^{4} \\ &= -\tfrac{1}{6}(64) + 8 + 16 - \left(\tfrac{4}{3} + 2 - 8\right) = 18 \end{aligned}$$

□

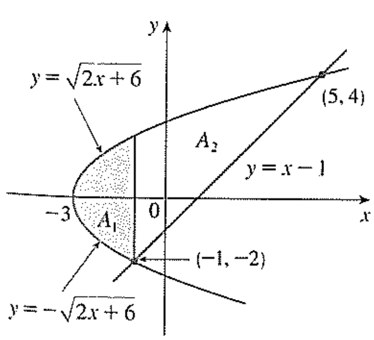


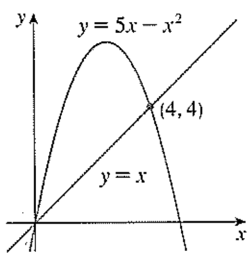
FIGURA 14

Pudo haber calculado el área del ejemplo 6 integrando con respecto a x en lugar de y, pero el cálculo es más complicado. Podría haber significado dividir la región en dos y determinar las áreas A_1 y A_2 de la figura 14. El método aplicado en el ejemplo 6 es mucho más fácil.

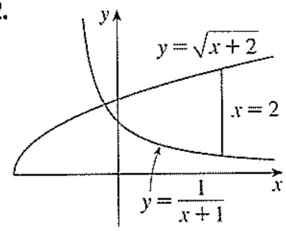
6.1 EJERCICIOS

1–4 Determinar el área de la región sombreada.

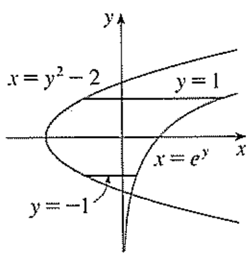
1.



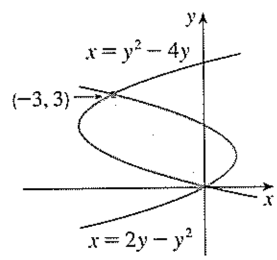
2.



3.



4.



5–28 Dibuje las regiones definidas por las curvas dadas. Decida si integra con respecto a x o y. Trace un rectángulo de aproximación representativo e indique su altura y su anchura. Luego determine el área de la región.

5. $y = x + 1, \quad y = 9 - x^2, \quad x = -1, \quad x = 2$

6. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

7. $y = x, \quad y = x^2$

8. $y = x^2 - 2x, \quad y = x + 4$

9. $y = 1/x, \quad y = 1/x^2, \quad x = 2$

10. $y = 1 + \sqrt{x}, \quad y = (3 + x)/3$

11. $y = x^2, \quad y^2 = x$

12. $y = x^2, \quad y = 4x - x^2$

13. $y = 12 - x^2, \quad y = x^2 - 6$

14. $y = \cos x, \quad y = 2 - \cos x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $y = \tan x, \quad y = 2 \operatorname{sen} x, \quad -\pi/3 \leqslant x \leqslant \pi/3$

16. $y = x^3 - x, \quad y = 3x$

17. $y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{1}{2}x, \quad x = 9$

18. $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -3, \quad x = 3$

19. $x = 2y^2, \quad x = 4 + y^2$

20. $4x + y^2 = 12, \quad x = y$

21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

22. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x$

23. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

24. $y = \cos x, \quad y = 1 - \cos x, 0 \leqslant x \leqslant \pi$

25. $y = x^2, \quad y = 2/(x^2 + 1)$

26. $y = |x|, \quad y = x^2 - 2$

27. $y = 1/x, \quad y = x, \quad y = \frac{1}{4}x, \quad x > 0$

28. $y = 3x^2, \quad y = 8x^2, \quad 4x + y = 4, \quad x \geqslant 0$

29–30 Mediante el cálculo determine el área del triángulo con los vértices dados.

29. $(0, 0), \quad (2, 1), \quad (-1, 6)$

30. $(0, 5), \quad (2, -2), \quad (5, 1)$

31–32 Evalúe la integral e interprétela como el área de una región. Dibuje la región.

31. $\int_0^{\pi/2} |\operatorname{sen} x - \cos 2x|\, dx$

32. $\int_0^4 |\sqrt{x+2} - x|\, dx$

33–34 Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para determinar un valor aproximado del área de la región limitada por las curvas dadas.

33. $y = \operatorname{sen}^2(\pi x/4), \quad y = \cos^2(\pi x/4), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$

34. $y = \sqrt[3]{16 - x^3}, \quad y = x, \quad x = 0$

35–38 Por medio de una gráfica encuentre un valor aproximado de las coordenadas x de los puntos de corte entre las curvas dadas. Luego estime en (forma aproximada) el área de la región definida por las curvas.

35. $y = x \operatorname{sen}(x^2), \quad y = x^4$

36. $y = e^x, \quad y = 2 - x^2$

37. $y = 3x^2 - 2x, \quad y = x^3 - 3x + 4$

38. $y = x \cos x, \quad y = x^{10}$

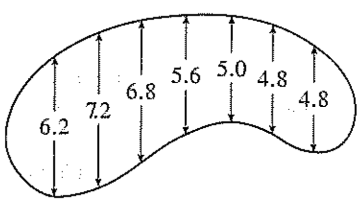
CAS **39.** Con ayuda de un sistema algebraico computacional, determine el área exacta definida por las curvas $y = x^5 - 6x^3 + 4x$ y $y = x$.

40. Trace la región en el plano xy definida por las desigualdades $x - 2y^2 \geqslant 0$, $1 - x - |y| \geqslant 0$ y determine su área.

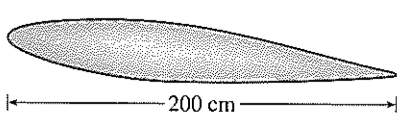
41. Los automóviles de carreras de Chris y Kelly están lado a lado al inicio de la carrera. En la tabla se proporcionan las velocidades de cada vehículo, (en millas por hora) durante los primeros 10 segundos de la competencia. Aplique la regla del punto medio para estimar cuánto se adelanta Kelly durante los 10 primeros segundos.

t	v_C	v_K	t	v_C	v_K
0	0	0	6	69	80
1	20	22	7	75	86
2	32	37	8	81	93
3	46	52	9	86	98
4	54	61	10	90	102
5	62	71			

42. Las anchuras, en metros, de una piscina en forma arriñonada se midieron a intervalos de 2 metros, como se indica en la figura. Mediante la regla del punto medio, estime el área de la piscina.



43. Se muestra la sección transversal de un ala de avión. Las mediciones de la altura del ala, en centímetros, en intervalos de 20 centímetros son 5.8, 20.3, 26.7, 29.0, 27.6, 27.6, 27.3, 23.8, 20.5, 15.1, 8.7, 7 y 2.8. Aplique la regla del punto medio para estimar el área de la sección transversal del área.



44. Si la proporción de nacimientos de una población es $b(t) = 2\,200e^{0.024t}$ personas por cada año y la de decesos es $d(t) = 1\,460e^{0.018t}$ personas por cada año. Hallar el área entre estas curvas para $0 \leq t \leq 10$. ¿Qué representa el área?

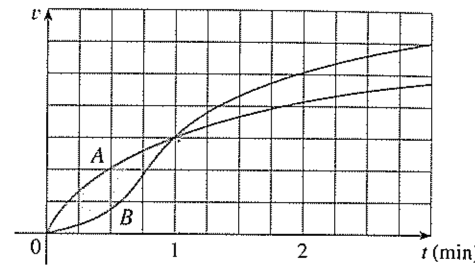
45. Dos automóviles, A y B, se encuentran lado a lado al inicio de la carrera, y aceleran desde el reposo. En la figura se muestran las gráficas de sus funciones de velocidad.

(a) ¿Cuál vehículo se adelanta después de un minuto? Explique.

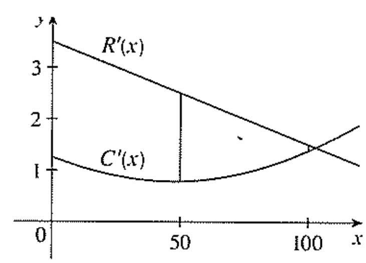
(b) ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada?

(c) ¿Cuál es el automóvil que se adelanta después de dos minutos? Explique.

(d) Estime el tiempo al cual los vehículos van de nuevo lado a lado



46. En la figura se muestran las gráficas de la función del ingreso marginal R' y la función del costo marginal C' de un fabricante. [Refiérase a la sección 4.8 en la que $R(x)$ y $C(x)$ representan los ingresos y el costo cuando se fabrican x unidades. Suponga que R y C se miden en miles de dólares.] ¿Cuál es el significado del área de la región sombreada? Estime el valor de esta cantidad mediante la regla del punto medio.



47. La curva cuya ecuación en $y^2 = x^2(x + 3)$ se denomina curva **cúbica de Tschirnhausen**. Si traza la gráfica de esta curva, podrá ver que una parte de la curva forma un bucle. Encuentre el área definida por este bucle.

48. Encuentre el área de la región definida por la parábola $y = x^2$, la tangente a esta parábola en $(1, 1)$ y el eje x.

49. Determine el número b tal que la recta $y = b$ divida a la región delimitada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones de igual área.

50. (a) Calcule el número a tal que la recta $x = a$ biseque el área bajo la curva $y = 1/x^2$, $1 \leqslant x \leqslant 4$.

(b) Determine el número b tal que la recta $y = b$ biseque el área del inciso (a).

51. Calcule los valores de c tal que el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.

52. Suponga que $0 < c < \pi/2$. ¿Para qué valor de c el área de la región que definen las curvas $y = \cos x$, $y = \cos(x - c)$, y $x = 0$ es igual al área de la región delimitada por las curvas $y = \cos(x - c)$, $x = \pi$ y $y = 0$?

53. ¿Para qué valores de m la recta $y = mx$ y la curva $y = x/(x^2 + 1)$ definen una región? Calcule el área de la región.

6.2 VOLÚMENES

Cuando trata de calcular el volumen de un sólido enfrenta el mismo tipo de problema que al determinar áreas. Intuitivamente sabe lo que significa un volumen, pero es necesario aclarar la idea usando el cálculo con el fin de dar una definición exacta de volumen.

Empiece con un tipo simple de sólido llamado **cilindro**, (o mejor dicho) un *cilindro recto*. Según se ilustra en la figura 1(a), un cilindro está limitado por una región plana B_1, que se llama **base**, y una región congruente B_2 en un plano paralelo. El cilindro consta de todos los puntos en los segmentos rectilíneos que son perpendiculares a la base y unen a B_1 con B_2. Si el área de la base es A y la altura del cilindro, es decir, (la distancia desde B_1 hasta B_2) es h, por lo tanto el volumen V del cilindro se define como

$$V = Ah$$

En particular, si la base es una circunferencia de radio r, después el cilindro es un cilindro circular cuyo volumen es $V = \pi r^2 h$ [véase figura 1(b)], y si la base es un rectángulo de largo l y ancho w, en seguida el cilindro es una caja rectangular (también se le llama *paralelepípedo rectangular*) cuyo volumen es $V = lwh$ [véase figura 1(c)].

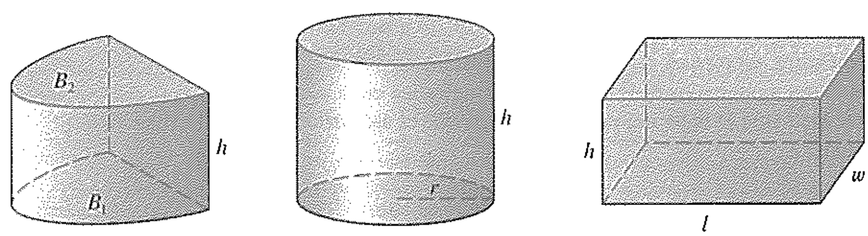


FIGURA 1

(a) Cilindro $V = Ah$ (b) Cilindro circular $V = \pi r^2 h$ (c) Caja rectangular $V = lwh$

En el caso de un sólido S que no es un cilindro, primero "corte" a S en trozos y haga que cada trozo se aproxime a un cilindro. Estime el volumen de S sumando los volúmenes de los cilindros. Obtiene el valor del volumen exacto de S a través de limitar un proceso en el cual el número de trozos se vuelve grande.

Inicie cortando a S con un plano, y obtenga una región plana que se denomina **sección transversal** de S. Sea $A(x)$ el área de la sección transversal de S en un plano P_x perpendicular al eje x y que pasa por el punto x, donde $a \leq x \leq b$. (Véase figura 2. Imagine que corta a S con un cuchillo a través de x y calcule el área de esta rebanada.) El área de la sección transversal $A(x)$ variará cuando x se incrementa desde a hasta b.

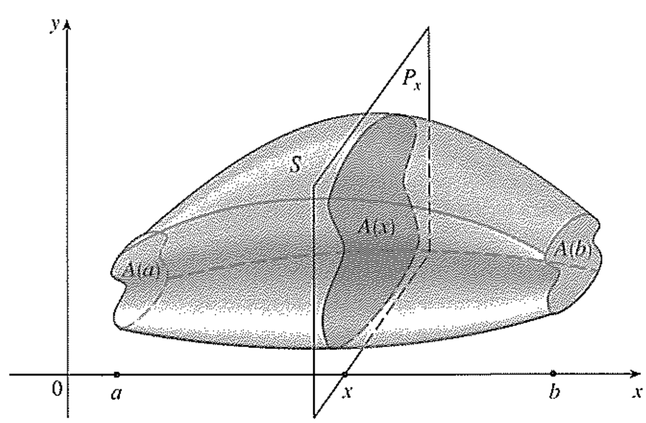


FIGURA 2

Divida S en n "rebanadas" del mismo ancho Δx mediante los planos P_{x_1}, $P_{x_2}, \ldots$ (Para rebanar el sólido imagine que está rebanando una hogaza de pan.) Si elige puntos muestrales x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$, puede tener un valor aproximado de la i-ésima rebanada S_i (la parte de S que queda entre los planos $P_{x_{i-1}}$ y P_{x_i}) con un cilindro cuya base tiene un área $A(x_i^*)$ y "altura" Δx. (Véase figura 3.)

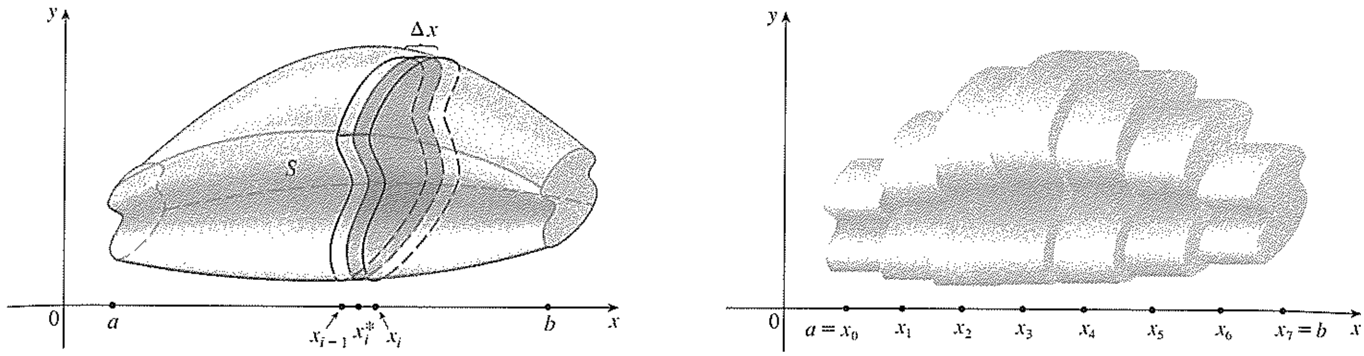


FIGURA 3

El volumen de este cilindro es $A(x_i^*)\,\Delta x$ de modo que una aproximación a la concepción intuitiva del volumen de la i-ésima rebanada S_i es.

$$V(S_i) \approx A(x_i^*)\,\Delta x$$

Al sumar los volúmenes de las rebanadas, llega a un valor aproximado del volumen total, es decir, a lo que piensa intuitivamente que es un volumen:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x$$

Esta aproximación parece ser cada vez mejor cuando $n \to \infty$. (Considere que las rebanadas cada vez son más delgadas.) Por lo tanto, *defina* al volumen como el límite de estas sumas cuando $n \to \infty$. Pero debe reconoce el límite de las sumas de Riemann como una integral definida y por eso tiene la definición siguiente.

Se puede comprobar que esta definición es independiente de donde S se ubica con respecto al eje x. En otras palabras, no importa cómo corte las rebanadas mediante planos paralelos, siempre obtendrá la misma respuesta para V.

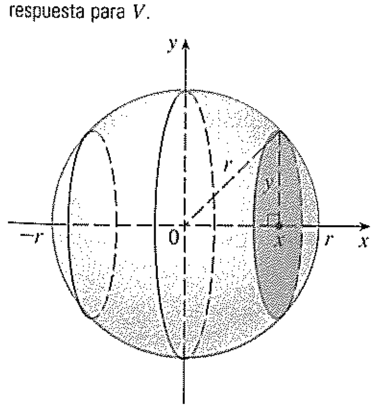


FIGURA 4

DEFINICIÓN DE VOLUMEN Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, a través de x y es perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, por lo tanto el **volumen** de S es

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx$$

Cuando aplica la fórmula del volumen $V = \int_a^b A(x)\,dx$ es importante recordar que $A(x)$ es el área de una sección transversal móvil que se obtiene al cortar a través de x con un plano perpendicular al eje x.

Observe que, en el caso de un cilindro, el área de la sección transversal es constante: $A(x) = A$ para toda x. De este modo, la definición de volumen da $V = \int_a^b A\,dx = A(b - a)$; esto concuerda con la fórmula $V = Ah$.

EJEMPLO 1 Demuestre que el volumen de una esfera de radio r es

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

SOLUCIÓN Si coloca la esfera de modo que su centro está en el origen (véase figura 4), después el plano P_x corta la esfera en un círculo cuyo radio (según el teorema de Pitágoras, es $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. De este modo el área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi y^2 = \pi(r^2 - x^2)$$

Si aplica la definición del volumen con $a = -r$ y $b = r$, tiene

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx \qquad \text{(El integrando es una función par.)} \\ &= 2\pi\left[r^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi\left(r^3 - \frac{r^3}{3}\right) \\ &= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

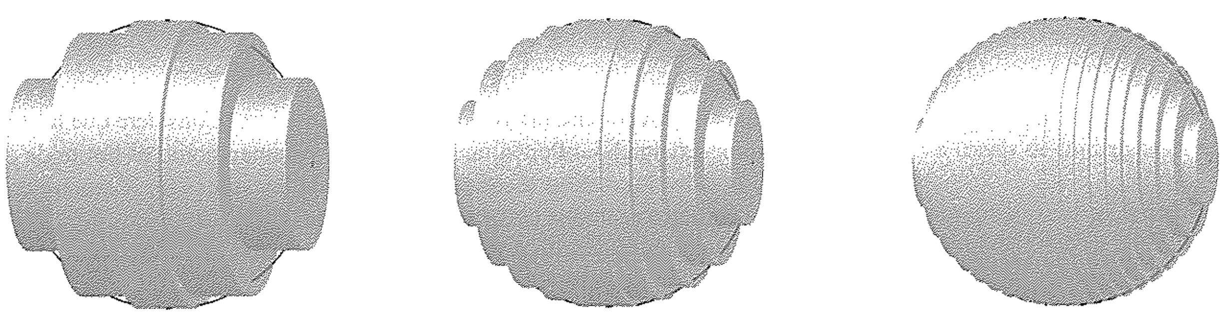
□

En la figura 5 se ilustra la definición de volumen cuando el sólido es una esfera de radio $r = 1$. De acuerdo con el resultado del ejemplo 1, sabe que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi \approx 4.18879$. En este caso, las rebanadas son cilindros circulares, o discos, y las tres partes de la figura 5 muestran las interpretaciones geométricas de las sumas de Riemann

$$\sum_{i=1}^{n} A(\bar{x}_i)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \pi(1^2 - \bar{x}_i^2)\,\Delta x$$

cuando $n = 5$, 10 y 20 si escoge los puntos muestrales x_i^* como los puntos medios $\bar{x}_i$. Observe que cuando incrementa la cantidad de cilindros de aproximación, las sumas correspondientes de Riemannn se vuelven más cercanas al volumen verdadero.

TEC En Visual 6.2A se muestra una animación de la figura 5.



(a) Mediante 5 discos, $V \approx 4.2726$ (b) Mediante 10 discos, $V \approx 4.2097$ (c) Mediante 20 discos, $V \approx 4.1940$

FIGURA 5 Aproximaciones del volumen de una esfera con radio 1

EJEMPLO 2 Determine el volumen de un sólido que se obtiene al girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ con respecto al eje x desde 0 hasta 1. Ilustre la definición de volumen dibujando un cilindro de aproximación representativo.

SOLUCIÓN La región se muestra en la figura 6(a). Si gira alrededor del eje x, obtiene el sólido que se ilustra en la figura 6(b). Cuando corta a través de punto x obtiene un disco de radio $\sqrt{x}$. El área de esta sección transversal es

$$A(x) = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi x$$

y el volumen del cilindro de aproximación, un disco cuyo espesor es Δx, es

$$A(x)\,\Delta x = \pi x\,\Delta x$$

¿Obtuvo una respuesta razonable en el ejemplo 2? Como verificación del trabajo, reemplace la región dada por un cuadrado de base [0, 1] y altura 1. Si gira el cuadrado obtendrá un cilindro de radio 1, y volumen $\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi$. Ya calculamos que el sólido dado tiene la mitad de este volumen. Eso parece casi correcto.

El sólido está entre $x = 0$ y $x = 1$, de modo que el volumen es

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi x\,dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

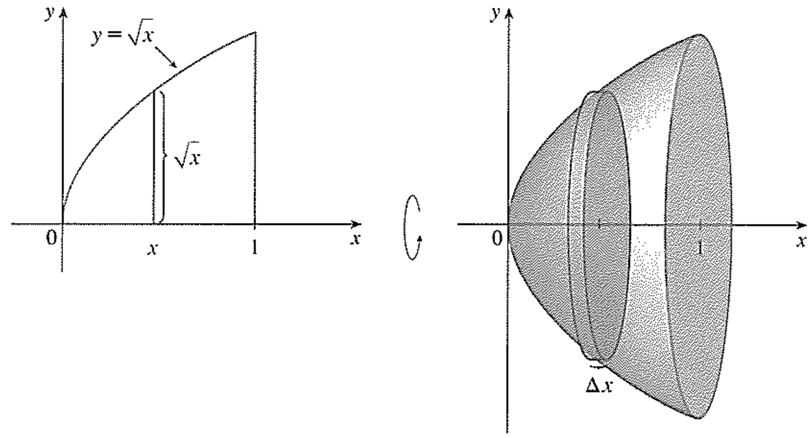


FIGURA 6 (a) (b)

EJEMPLO 3 Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región definida por $y = x^3$, $y = 8$ y $x = 0$ con respecto al eje y.

SOLUCIÓN La región se ilustra en la figura 7(a) y el sólido resultante se muestrea en la figura 7(b). Puesto que la región gira alrededor del eje y, tiene sentido "rebanar" el sólido en forma perpendicular al eje y, y, por lo tanto, integrar con respecto a y. Si corta a una altura y, obtiene un disco de radio x, donde $x = \sqrt[3]{y}$. De tal manera, el área de una sección transversal a través de y es

$$A(y) = \pi x^2 = \pi(\sqrt[3]{y})^2 = \pi y^{2/3}$$

y el volumen del cilindro de aproximación ilustrado en la figura 7(b) es

$$A(y)\,\Delta y = \pi y^{2/3}\,\Delta y$$

Puesto que el sólido está entre $y = 0$ y $y = 8$, su volumen es

$$V = \int_0^8 A(y)\,dy = \int_0^8 \pi y^{2/3}\,dy = \pi\left[\tfrac{3}{5}y^{5/3}\right]_0^8 = \frac{96\pi}{5}$$

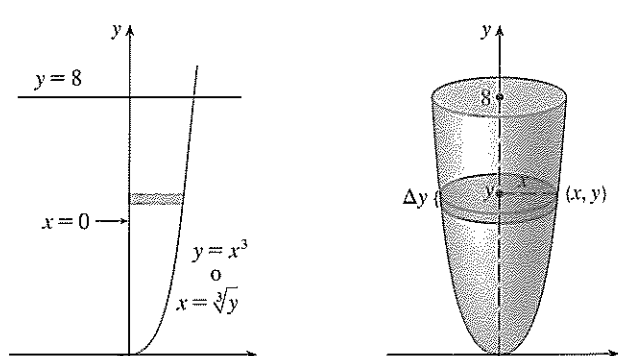


FIGURA 7 (a) (b)

EJEMPLO 4 La región $\mathcal{R}$ encerrada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje x. Calcule el volumen del sólido que resulta.

SOLUCIÓN Las curvas $y = x$ y $y = x^2$ se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$. La región entre ellas, el sólido de rotación y una sección transversal perpendicular al eje x se muestran en la figura 8. Una sección transversal en el plano P_x tiene la forma de una *rondana* (un aro anular) de radio interior x^2 y radio exterior x, de modo que determina el área de la sección transversal restando el área del círculo interno del área del círculo externo:

$$A(x) = \pi x^2 - \pi(x^2)^2 = \pi(x^2 - x^4)$$

Por lo tanto, tiene

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^2 - x^4)\,dx = \pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{15}$$

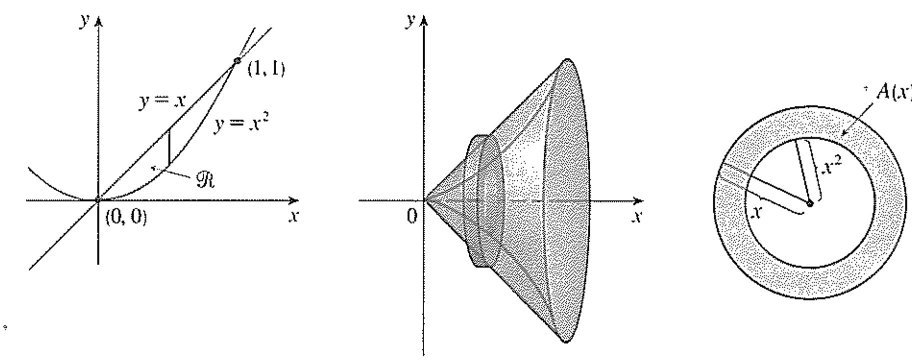


FIGURA 8 (a) (b) (c) □

EJEMPLO 5 Calcule el volumen del sólido obtenido al girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $y = 2$.

SOLUCIÓN El sólido y la sección transversal se muestran en la figura 9. Una vez más la sección transversal es una rondana, pero ahora el radio interior es $2 - x$ y el radio externo es $2 - x^2$.

TEC Visual 6.2B muestra cómo se forman los sólidos de rotación.

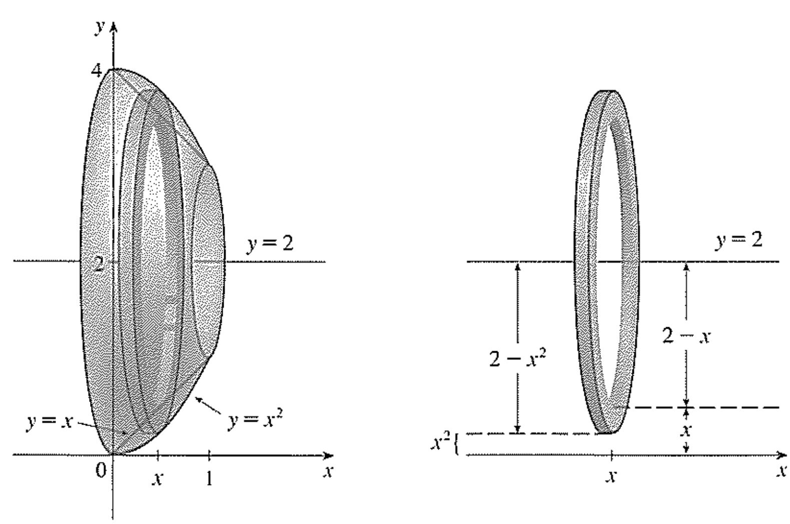


FIGURA 9

El área de la sección transversal es

$$A(x) = \pi(2 - x^2)^2 - \pi(2 - x)^2$$

y tanbién el volumen de S es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x)\,dx \\ &= \pi \int_0^1 [(2 - x^2)^2 - (2 - x)^2]\,dx \\ &= \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx \\ &= \pi\left[\frac{x^5}{5} - 5\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

□

Los sólidos de los ejemplos 1 a 5 reciben el nombre de **sólidos de rotación**, porque se generan haciendo girar una región alrededor de una recta. En general, determine el volumen de un sólido de revolución usando la fórmula básica de definición

$$V = \int_a^b A(x)\,dx \qquad \text{o} \qquad V = \int_c^d A(y)\,dy$$

y calcule el área de la sección transversal $A(x)$ o $A(y)$ mediante uno de los métodos siguientes:

- Si la sección transversal es un disco (como en los ejemplos 1 a 3) determine el radio del disco (en términos de x o y) y use

$$A = \pi(\text{radio})^2$$

- Si la sección transversal es una rondana, como en los ejemplos 4 y 5, determine el radio interior r_{int} y el r_{ext} a partir de un dibujo (como en las figuras 9 y 10) y calcule el área de la rondana efectuando la diferencia entre el área del disco interno y el área del disco externo:

$$A = \pi(\text{radio exerior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$

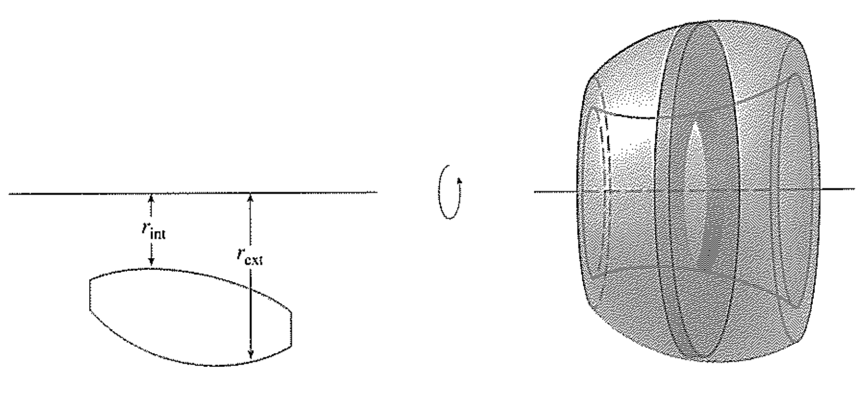


FIGURA 10

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

EJEMPLO 6 Calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región del ejemplo 4 alrededor de la recta $x = -1$.

SOLUCIÓN En la figura 11 se ilustra una sección transversal horizontal. Es una rondana con radio interior $1 + y$ y radio exterior $1 + \sqrt{y}$, por lo que el área de la sección transversal es

$$A(y) = \pi(\text{radio exterior})^2 - \pi(\text{radio interior})^2$$
$$= \pi(1 + \sqrt{y})^2 - \pi(1 + y)^2$$

El volumen es

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \pi \int_0^1 \left[(1 + \sqrt{y})^2 - (1 + y)^2\right] dy$$
$$= \pi \int_0^1 (2\sqrt{y} - y - y^2)\,dy = \pi \left[\frac{4y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

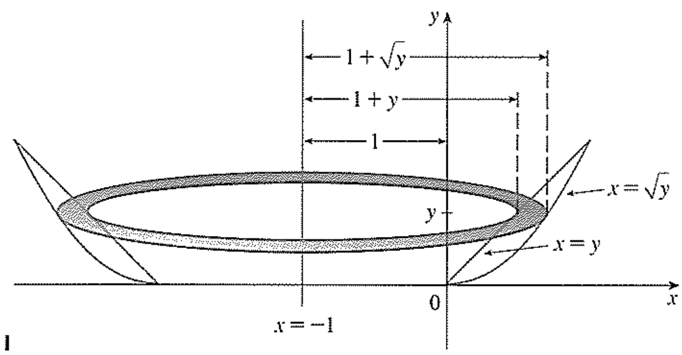


FIGURA 11

□

En seguida se determinan los volúmenes de tres sólidos que *no* son sólidos de revolución.

EJEMPLO 7 En la figura 12 se muestra un sólido con una base circular de radio 1. Las secciones transversales paralelas pero perpendiculares a la base son triángulos equiláteros. Determine el volumen del sólido.

SOLUCIÓN Sea el círculo $x^2 + y^2 = 1$. El sólido, su base y una sección transversal representativa a una distancia x desde el origen se ilustran en la figura 13.

TEC En Visual 6.2C se muestra una animación de la figura 12.

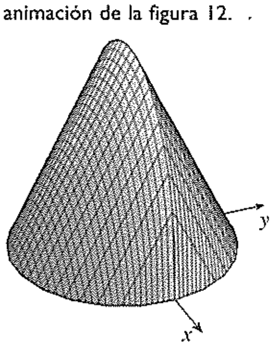
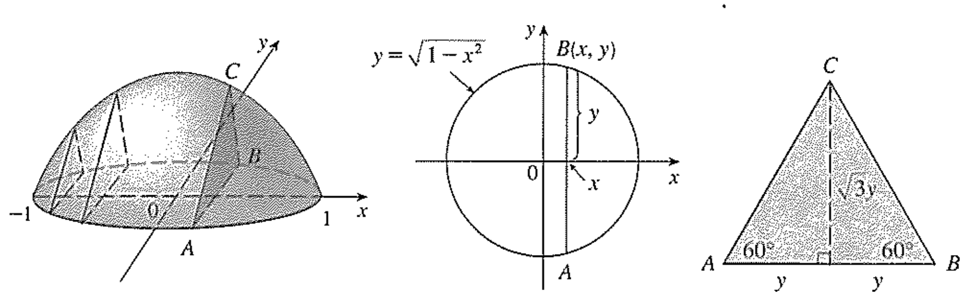


FIGURA 12
Imagen generada mediante computadora del sólido del ejemplo 7



(a) El sólido (b) Su base (c) Una sección transversal

FIGURA 13

Puesto que B está en el círculo, $y = \sqrt{1 - x^2}$, y, de esa manera, la base del triángulo ABC es $|AB| = 2\sqrt{1 - x^2}$. Como el triángulo es equilátero, según la figura 13(c), su altura es $\sqrt{3}\,y = \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2}$. Por lo tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{3}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{3}\,(1 - x^2)$$

y el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} A(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx \\ &= 2\int_{0}^{1} \sqrt{3}\,(1 - x^2)\,dx = 2\sqrt{3}\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$ □

V EJEMPLO 8 Calcule el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado L y cuya altura es h.

SOLUCIÓN Coloque el origen O en el vértice de la pirámide y el eje x a lo largo de su eje central, como se ilustra en la figura 14. Se dice que cualquier plano P_x que pase por x y sea perpendicular al eje x corta a la pirámide en un cuadrado de lado s. Puede expresar s en función de x observando por triángulos semejantes de la figura 15 que

$$\frac{x}{h} = \frac{s/2}{L/2} = \frac{s}{L}$$

y, de este modo, $s = Lx/h$. [Otro método es observar que la recta OP tiene pendiente $L/(2h)$ y, de este modo, su ecuación es $y = Lx/(2h)$.] Por eso, el área de la sección transversal es

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2$$

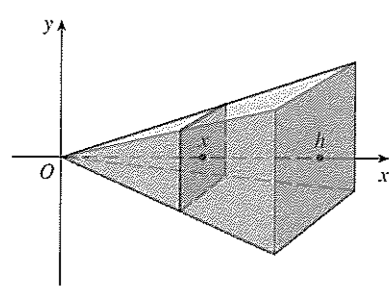


FIGURA 14

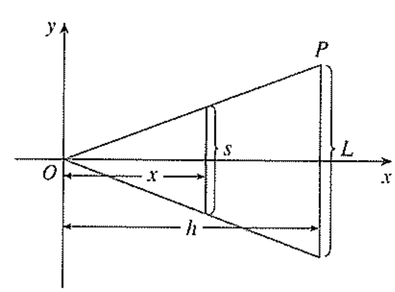


FIGURA 15

La pirámide se ubica entre $x = 0$ y $x = h$, por lo que su volumen es

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Bigg]_0^h = \frac{L^2h}{3}$$ □

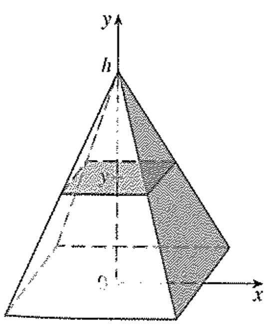


FIGURA 16

NOTA No era necesario colocar el vértice de la pirámide en el origen en el ejemplo 8. Se hizo así para que las ecuaciones resultaran más sencillas. Si en lugar de eso se hubiera colocado el centro de la base en el origen y el vértice en el eje y positivo, como en la figura 16, usted podría comprobar que habría obtenido la integral

$$V = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}(h - y)^2\,dy = \frac{L^2 h}{3}$$

EJEMPLO 9 Se corta una cuña de un cilindro circular de radio 4 definida mediante dos planos. Un plano es perpendicular al eje del cilindro. El otro corta al primero en un ángulo de 30° a lo largo del diámetro del cilindro. Determine el volumen de la cuña.

SOLUCIÓN Si hace coincidir el eje x con el diámetro en el lugar donde se encuentran los planos, después la base del sólido es un semicírculo con ecuación $y = \sqrt{16 - x^2}$, $-4 \leqslant x \leqslant 4$. Una sección transversal que es perpendicular al eje x a una distancia x del origen es un triángulo ABC, según se muestra en la figura 17, cuya base es $y = \sqrt{16 - x^2}$ y cuya altura es $|BC| = y \tan 30° = \sqrt{16 - x^2}/\sqrt{3}$. Por lo tanto, el área de la sección transversal es

$$A(x) = \tfrac{1}{2}\sqrt{16 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{16 - x^2} = \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}$$

y el volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_{-4}^{4} A(x)\,dx = \int_{-4}^{4} \frac{16 - x^2}{2\sqrt{3}}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^4 (16 - x^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 \\ &= \frac{128}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

En el ejercicio 64 se proporciona otro método. □

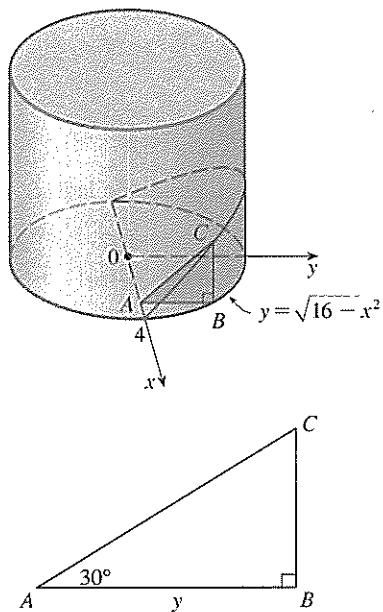


FIGURA 17

6.2 EJERCICIOS

1–18 Encuentre el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Grafique la región, el sólido y un disco o arandela representativos.

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$; alrededor del eje x

2. $y = 1 - x^2$, $y = 0$; alrededor del eje x

3. $y = 1/x$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$; alrededor del eje x

4. $y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; alrededor del eje x

5. $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 9$; alrededor del eje y

6. $y = \ln x$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$; alrededor del eje y

7. $y = x^3$, $y = x$, $x \geqslant 0$; alrededor del eje x

8. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 5 - x^2$; alrededor del eje x

9. $y^2 = x$, $x = 2y$; alrededor del eje y

10. $y = \frac{1}{4}x^2$, $x = 2$, $y = 0$; alrededor del eje y

11. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; alrededor de $y = 1$

12. $y = e^{-x}$, $y = 1$, $x = 2$; alrededor de $y = 2$

13. $y = 1 + \sec x$, $y = 3$; alrededor de $y = 1$

14. $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$; alrededor de $y = -1$

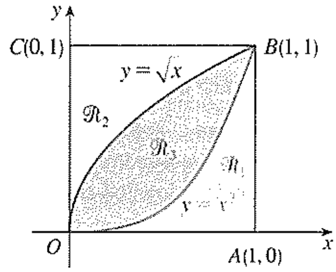
15. $x = y^2$, $x = 1$; alrededor de $x = 1$

16. $y = x$, $y = \sqrt{x}$; alrededor de $x = 2$

17. $y = x^2$, $x = y^2$; alrededor de $x = -1$

18. $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$; alrededor de $x = 1$

19–30 Refiérase a la figura y calcule el volumen generado al hacer girar la región dada alrededor de la recta especificada.



19. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OA
20. $\mathcal{R}_1$ alrededor de OC
21. $\mathcal{R}_1$ alrededor de AB
22. $\mathcal{R}_1$ alrededor de BC
23. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OA
24. $\mathcal{R}_2$ alrededor de OC
25. $\mathcal{R}_2$ alrededor de AB
26. $\mathcal{R}_2$ alrededor de BC
27. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OA
28. $\mathcal{R}_3$ alrededor de OC
29. $\mathcal{R}_3$ alrededor de AB
30. $\mathcal{R}_3$ alrededor de BC

31–36 Plantee una integral, pero no la evalúe, para el volumen del sólido obtenido al hacer girar alrededor de la recta especificada la región delimitada por las curvas dadas.

31. $y = \tan^3 x$, $y = 1$, $x = 0$; alrededor de $y = 1$

32. $y = (x - 2)^4$, $8x - y = 16$; alrededor de $x = 10$

33. $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $y = 1$

34. $y = 0$, $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $y = -2$

35. $x^2 - y^2 = 1$, $x = 3$; alrededor de $x = -2$

36. $y = \cos x$, $y = 2 - \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$; alrededor de $y = 4$

37–38 Utilice una gráfica para encontrar coordenadas x aproximadas de los puntos de intersección de las curvas especificadas. Luego estime (en forma aproximada) el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región definida por las curvas.

37. $y = 2 + x^2 \cos x$, $\quad y = x^4 + x + 1$

38. $y = 3\operatorname{sen}(x^2)$, $\quad y = e^{x/2} + e^{-2x}$

CAS **39–40** Mediante un sistema algebraico computacional, calcule el volumen exacto del sólido obtenido al rotar alrededor de la recta especificada la región delimitada por las curvas.

39. $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; $\quad$ alrededor de $y = -1$

40. $y = x$, $y = xe^{1-x/2}$; $\quad$ alrededor de $y = 3$

41–44 Cada integral representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

41. $\pi \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx$ $\qquad$ **42.** $\pi \int_2^5 y \, dy$

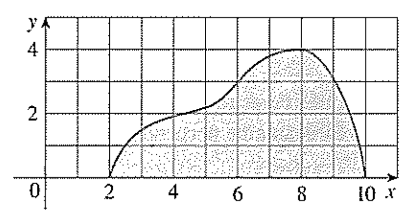
43. $\pi \int_0^1 (y^4 - y^8) \, dy$ $\qquad$ **44.** $\pi \int_0^{\pi/2} [(1 + \cos x)^2 - 1^2] \, dx$

45. El estudio de tomografía por medio de computadora proporciona vistas transversales separadas a distancias iguales de un órgano del cuerpo humano, las cuales dan información que, de no ser por este medio, sólo se obtendría mediante una intervención quirúrgica. Suponga que este estudio de tomografía en un hígado humano muestra secciones transversales separadas 1.5 cm. El hígado mide 15 cm de largo y las áreas de las secciones transversales, en centímetros cuadrados, son 0, 18, 58, 79, 94, 106, 117, 128, 63, 39 y 0. Aplique la regla del punto medio para estimar el volumen del hígado.

46. Se corta un tronco de árbol de 10 m de largo a intervalos de 1 m y las áreas de las secciones transversales A (a una distancia x del extremo del tronco) se proporcionan en la tabla. Mediante la regla del punto medio $n = 5$ estime el volumen del tronco.

x (m)	A (m^2)	x (m)	A (m^2)
0	0.68	6	0.53
1	0.65	7	0.55
2	0.64	8	0.52
3	0.61	9	0.50
4	0.58	10	0.48
5	0.59		

47. (a) Si la región que se muestra en la figura se gira con respecto al eje x para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar el volumen del sólido.



(b) Estimar el volumen si se gira la región con respecto al eje y. Una vez más aplique la regla del punto medio con $n = 4$

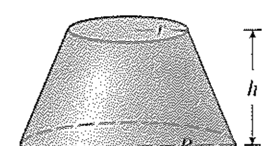
CAS **48.** (a) Se obtiene un modelo para la forma de un huevo de un ave mediante el giro, con respecto al eje x, de la región bajo la gráfica de

$$f(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\sqrt{1 - x^2}$$

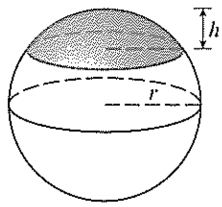
49–61 Calcule el volumen del sólido descrito S.

49. Un cono circular recto cuya altura es h el radio de la base es r.

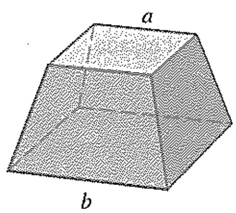
50. Un tronco de un cono circular recto cuya altura es h, base inferior de radio R, y radio de la parte superior r.



51. La tapa de una esfera con radio h y altura .



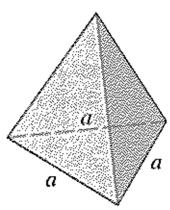
52. Un tronco de pirámide con base cuadrada de lado b, parte superior de lado a y altura h.



¿Qué sucede si $a = b$? ¿Qué sucede si $a = 0$?

53. Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.

54. Una pirámide de altura h base en forma de triángulo equilátero con lado a (tetraedro).



55. Un tetraedro con tres caras recíprocamente perpendiculares y tres aristas recíprocamente perpendiculares con distancias 3, 4 y 5 cm.

56. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales perpendiculares a la base son cuadradas.

57. La base de S es una región elíptica con curva límite $9x^2 + 4y^2 = 36$. Las secciones transversales son perpendiculares al eje x y son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base.

58. La base de S es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos equiláteros.

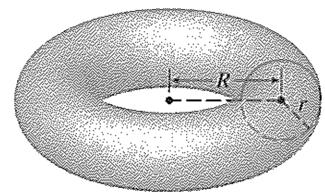
59. S tiene la misma base que en el ejercicio 58, pero las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadradas.

60. La base de S es la región encerrada por la parábola $y = 1 - x^2$ y el eje x. Las secciones transversales perpendiculares el eje y son cuadrados

61. S tiene la misma base que la del ejercicio 60, pero las secciones transversales perpendiculares al eje y son triángulos isósceles con altura igual a la base.

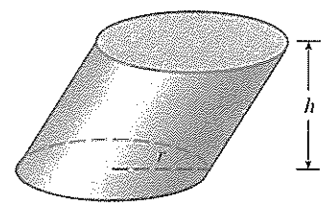
62. La base de S es un disco circular de radio r. Las secciones transversales perpendiculares a la base son triángulos isósceles de altura h y el lado desigual es la base.
   (a) Plantee una integral para el volumen de S.
   (b) De acuerdo con la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen de S.

63. (a) Plantee una integral para el volumen de un sólido *toro* (el sólido en forma de dona mostrado en la figura) de radio r y R.
   (b) Por la interpretación de la integral como un área, calcule el volumen del toro.

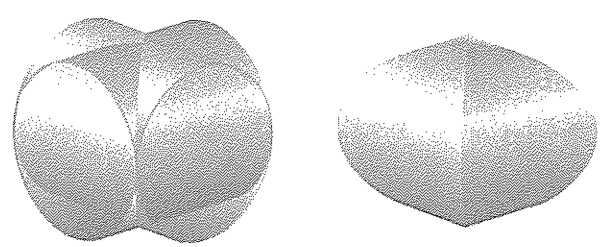


64. Resuelva el ejemplo 9 tomando secciones transversales paralelas a la línea de intersección de los dos planos.

65. (a) El principio de Cavalieri establece que si una familia de planos paralelos da áreas iguales de secciones transversales para dos sólidos S_1 y S_2, en tal caso los volúmenes de S_1 y S_2 son iguales. Demuestre este principio.
   (b) Mediante el principio de Cavalieri determine el volumen del cilindro oblicuo que se muestra en la figura.



66. Determine el volumen común a dos cilindros circulares, ambos de radio r, si los ejes de los cilindros se cortan en ángulos rectos.



67. Calcule el volumen común a dos esferas, cada una de radio r, si el centro de cada esfera está en la superficie de la otra esfera.

68. Un cuenco tiene la forma de un hemisferio con diámetro igual a 30 cm. Una pelota de 10 cm de diámetro se coloca dentro del recipiente, y se vierte agua en éste hasta que alcanza una altura de h centímetros. Calcule el volumen de agua que hay en el recipiente.

69. Se abre un agujero de radio r en un cilindro de radio $R > r$ en ángulos rectos al eje del cilindro. Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen cortado.

70. Un agujero de radio r se taladra en el centro de una esfera de radio $R > r$. Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

71. Algunos de los iniciadores del cálculo, como Kepler o Newton, se inspiraron en el problema de determinar volúmenes de barriles de vino. (De hecho, Kepler publicó un libro *Stereometria doliorum* en 1715, en el que se tratan los métodos para determinar volúmenes de los barriles.) A menudo se aproximan la forma de sus lados mediante parábolas.

(a) Se genera un barril de altura h y radio máximo R al girar alrededor del eje x la parábola $y = R - cx^2$, $-h/2 \leq x \leq h/2$, donde c es una constante positiva. Demuestre que el radio de cada extremo del barril es $r = R - d$, donde $d = ch^2/4$.

(b) Demuestre que el volumen encerrado por el barril es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h\left(2R^2 + r^2 - \tfrac{2}{5}d^2\right)$$

72. Suponga que una región $\mathcal{R}$ tiene un área A que se localiza por arriba del eje x. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x, genera un sólido de volumen V_1. Cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = -k$, donde k es un número positivo, genera un sólido de volumen V_2. Exprese V_2 en función de V_1, k y A.

6.3 VOLÚMENES MEDIANTE CASCARONES CILÍNDRICOS

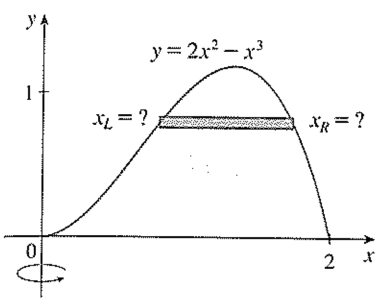


FIGURA 1

Algunos problemas relacionados con volúmenes son muy difíciles de manejar con los métodos de las secciones anteriores. Por ejemplo, considere el problema de determinar el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región definida por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del eje y. (Véase figura 1.) Si corta en forma perpendicular al eje y, obtendrá una rondana. Pero para calcular los radios interior y exterior de la rondana, tendría que resolver la ecuación cúbica $y = 2x^2 - x^3$ para encontrar x en función de y. Eso no es fácil.

Por fortuna, hay un sistema llamado **método de los cascarones cilíndricos**, que es más fácil de usar en tal caso. En la figura 2 se ilustra un cascarón cilíndrico de radio interior r_1, radio exterior r_2 y altura h. Su volumen V se calcula restando el volumen V_1 del cilindro interior del volumen V_2 que corresponde al cilindro exterior:

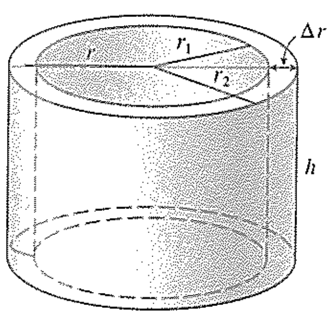


FIGURA 2

$$\begin{aligned} V &= V_2 - V_1 \\ &= \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h = \pi(r_2^2 - r_1^2)h \\ &= \pi(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)h \\ &= 2\pi \frac{r_2 + r_1}{2} h(r_2 - r_1) \end{aligned}$$

Si hace $\Delta r = r_2 - r_1$ (el espesor del cascarón) y $r = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)$ (el radio promedio del cascarón) por lo tanto esta fórmula del volumen de un cascarón cilíndrico se transforma en

$$\boxed{1} \qquad \boxed{V = 2\pi r h \, \Delta r}$$

que se puede recordar como

$$V = [\text{circunferencia}][\text{altura}][\text{espesor}]$$

Ahora, sea S el sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y a la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geq 0$], $y = 0$, $x = a$ y $x = b$, donde $b > a \geq 0$. (Véase figura 3.)

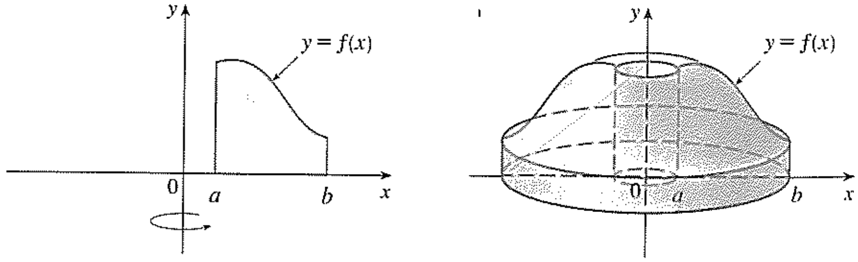


FIGURA 3

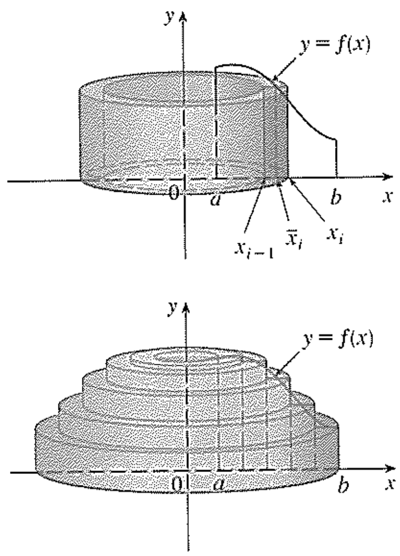


FIGURA 4

Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de igual anchura Δx y sea $\overline{x}_i$ el punto medio del i-ésimo subintervalo. Si el rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(\overline{x}_i)$ se hace girar alrededor del eje y, después el resultado es un cascarón cilíndrico cuyo radio promedio es $\overline{x}_i$, altura $f(\overline{x}_i)$ y espesor Δx (véase figura 4), de modo que por la fórmula 1 su volumen es

$$V_i = (2\pi\overline{x}_i)[f(\overline{x}_i)]\,\Delta x$$

Por lo tanto, un volumen aproximado V de S se obtiene mediante la suma de los volúmenes de estos cascarones:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\overline{x}_i f(\overline{x}_i)\,\Delta x$$

Esta aproximación mejora cuando $n \longrightarrow \infty$. Pero, de acuerdo con la definición de una integral, sabe que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\overline{x}_i f(\overline{x}_i)\,\Delta x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Por eso, lo siguiente es posible:

> $\boxed{2}$ El volumen del sólido de la figura 3, que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es
>
> $$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx \qquad \text{donde } 0 \leqslant a < b$$

El argumento de usar cascarones cilíndricos hace que la fórmula 2 parezca razonable, pero posteriormente será capaces de comprobarlo (véase ejercicio 67 de la sección 7.1).

La mejor manera de recordar la fórmula 2 es pensar en el cascarón característico, cortado y aplanado como en la figura 5, con radio x, circunferencia $2\pi x$, altura $f(x)$ y espesor Δx o dx:

$$\int_a^b \underbrace{(2\pi x)}_{\text{circunferencia}} \;\underbrace{[f(x)]}_{\text{altura}} \;\underbrace{dx}_{\text{espesor}}$$

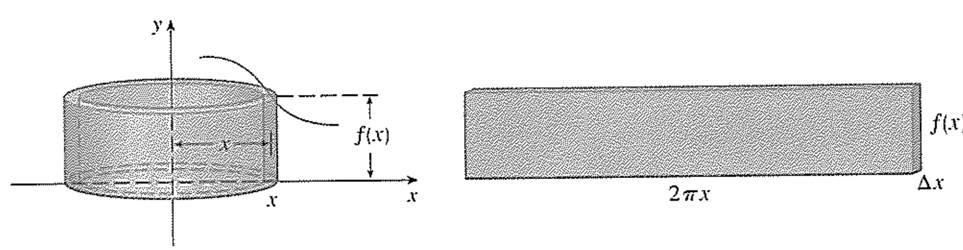


FIGURA 5

Este tipo de razonamiento es útil en otras situaciones, como cuando hace girar alrededor de rectas distintas al eje y.

EJEMPLO 1 Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región delimitada por $y = 2x^2 - x^3$ y $y = 0$ alrededor del eje y.

SOLUCIÓN En el dibujo de la figura 6, puede ver que un cascarón característico tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $f(x) = 2x^2 - x^3$. También, según el método del cascarón, el volumen es

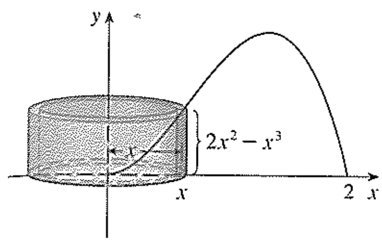


FIGURA 6

$$V = \int_0^2 (2\pi x)(2x^2 - x^3)\,dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{5}x^5\right]_0^2 = 2\pi\left(8 - \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{5}\pi$$

Se puede comprobar que el método del cascarón cilíndrico proporciona la misma respuesta que las "rebanadas". □

▨ En la figura 7 se observa una imagen generada mediante computadora del sólido cuyo volumen se calcula en el ejemplo 1.

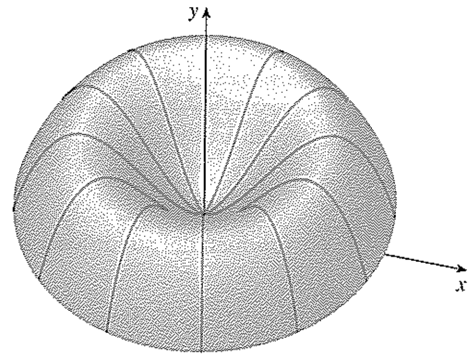


FIGURA 7

NOTA Al comparar la solución del ejemplo 1 con las observaciones del comienzo de esta sección, es claro que el método de los cascarones cilíndricos es mucho más sencillo que el método en el que se utilizan rondanas para este problema. No es necesario encontrar las coordenadas del máximo local y no se tiene que resolver la ecuación de la curva, ni dar x en función de y. Sin embargo, en otros ejemplos, pueden ser más sencillos los métodos de la sección anterior.

V EJEMPLO 2 Calcular el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región entre $y = x$ y $y = x^2$ alrededor del eje y.

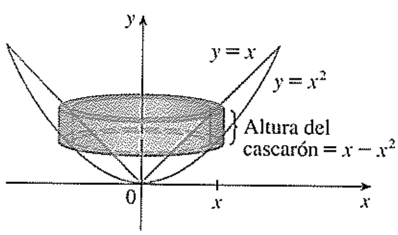


FIGURA 8

SOLUCIÓN La región y un cascarón característico se ilustran en la figura 8. El cascarón tiene radio x, circunferencia $2\pi x$ y altura $x - x^2$. También, el volumen es

$$V = \int_0^1 (2\pi x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$
$$= 2\pi\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}$$ □

Como se muestra en el ejemplo siguiente, el método del cascarón cilíndrico funciona muy bien si hace girar alrededor del eje x. Simplemente dibuje un croquis para identificar el radio y la altura del cascarón.

V EJEMPLO 3 Mediante un cascarón cilíndrico calcule el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región bajo la curva $y = \sqrt{x}$ desde 0 hasta 1 alrededor del eje x.

SOLUCIÓN Este problema se resolvió usando discos en el ejemplo 2 de la sección 6.2. Para usar cascarones, llame a la curva $y = \sqrt{x}$ (en la figura de ese ejemplo) $x = y^2$ en la figura 9. Por lo que toca a la rotación alrededor del eje x, un cascarón característico tiene radio y, circunferencia $2\pi y$ y altura $1 - y^2$. Así, el volumen es

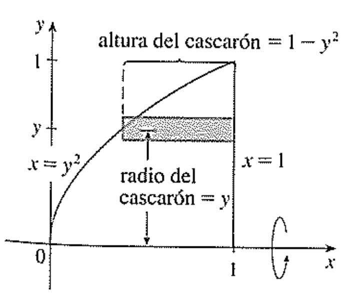


FIGURA 9

$$V = \int_0^1 (2\pi y)(1 - y^2)\,dy = 2\pi \int_0^1 (y - y^3)\,dy = 2\pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

En este problema, el método del disco fue más simple. □

V EJEMPLO 4 Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región definida por $y = x - x^2$ y $y = 0$.

SOLUCIÓN En la figura 10 se ilustra la región y un cascarón cilíndrico formado por la rotación alrededor de la recta $x = 2$. El radio es $2 - x$, circunferencia $2\pi(2 - x)$ y altura $x - x^2$.

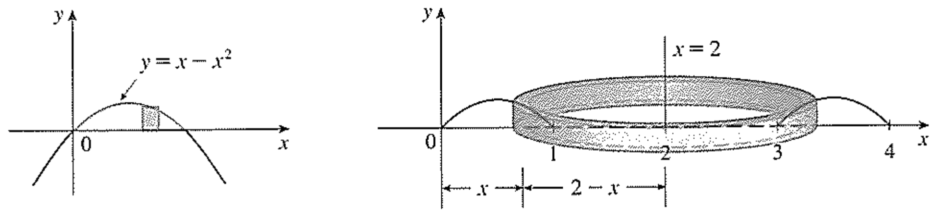


FIGURA 10

El volumen del sólido es

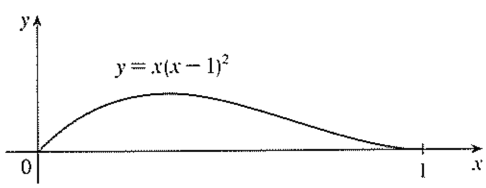
$$V = \int_0^1 2\pi(2 - x)(x - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx$$

$$= 2\pi\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

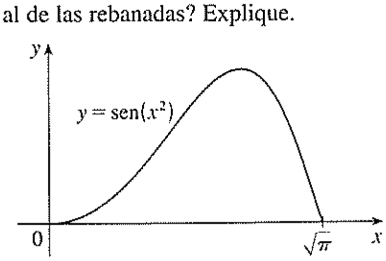
□

6.3 EJERCICIOS

1. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Explique por qué es inconveniente usar los cortes por rebanadas para determinar el volumen V de S. Dibuje un cascarón de aproximación representativo. ¿Cuáles son la circunferencia y la altura? Mediante cascarones encuentre V.



2. Sea S el sólido que se genera al girar alrededor del eje y la región que se ilustra en la figura. Dibuje un cascarón cilíndrico representativo y determine su circunferencia y altura. Mediante cascarones calcule el volumen de S. ¿Cree usted que este método es mejor al de las rebanadas? Explique.



3–7 Mediante el método de los cascarones cilíndricos, determine el volumen que se genera al hacer girar alrededor del eje y la región definida por las curvas dadas. Dibuje la región y un cascarón representativo.

3. $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

4. $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 1$

5. $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1$

6. $y = 3 + 2x - x^2, \quad x + y = 3$

7. $y = 4(x - 2)^2, \quad y = x^2 - 4x + 7$

8. Sea V el volumen del sólido que se obtiene cuando la región definida por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$ gira alrededor del eje y. Calcule V cortando rebanadas y formando cascarones cilíndricos. En ambos casos elabore un diagrama para explicar el método.

9–14 Mediante el método de los cascarones cilíndricos determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar alrededor del eje x la región que delimitan las curvas dadas. Grafique la región y un cascarón cilíndrico.

9. $x = 1 + y^2, \quad x = 0, \quad y = 1, \quad y = 2$

10. $x = \sqrt{y}, \quad x = 0, \quad y = 1$

11. $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0$

12. $x = 4y^2 - y^3, \quad x = 0$

13. $x = 1 + (y - 2)^2, x = 2$

14. $x + y = 3, \quad x = 4 - (y - 1)^2$

15–20 Mediante el método de los cascarones cilíndricos, determine el volumen generado cuando gira la región que definen las curvas dadas alrededor del eje especificado. Grafique la región y un cascarón cilíndrico.

15. $y = x^4, y = 0, x = 1$; alrededor de $x = 2$

16. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1$; alrededor $x = -1$

17. $y = 4x - x^2, y = 3$; alrededor de $x = 1$

18. $y = x^2, y = 2 - x^2$; alrededor de $x = 1$

19. $y = x^3, y = 0, x = 1$; alrededor de $y = 1$

20. $y = x^2,\ x = y^2$; alrededor de $y = -1$

21–26 Plantee pero no evalúe una integral para el volumen del sólido que se genera al hacer rotar la región que definen las curvas dadas alrededor del eje especificado.

21. $y = \ln x,\ y = 0,\ x = 2$; alrededor del eje y

22. $y = x,\ y = 4x - x^2$; alrededor de $x = 7$

23. $y = x^4,\ y = \text{sen}(\pi x/2)$; alrededor de $x = -1$

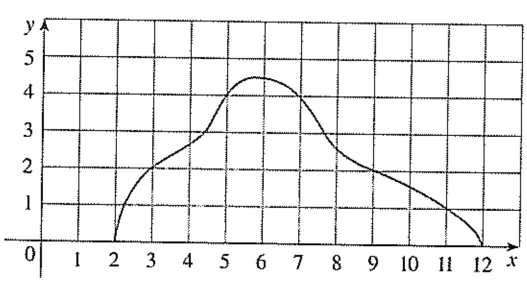
24. $y = 1/(1 + x^2),\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2$; alrededor de $x = 2$

25. $x = \sqrt{\text{sen}\, y},\ 0 \leqslant y \leqslant \pi,\ x = 0$; alrededor de $y = 4$

26. $x^2 - y^2 = 7,\ x = 4$; alrededor de $y = 5$

27. Aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen obtenido cuando la región bajo la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ gira alrededor del eje y.

28. Si la región que se ilustra en la figura gira alrededor del eje y para formar un sólido, aplique la regla del punto medio con $n = 5$ para estimar el volumen del sólido.



29–32 Cada una de las integrales representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

29. $\int_0^3 2\pi x^5\, dx$

30. $2\pi \int_0^2 \frac{y}{1 + y^2}\, dy$

31. $\int_0^1 2\pi(3 - y)(1 - y^2)\, dy$

32. $\int_0^{\pi/4} 2\pi(\pi - x)(\cos x - \text{sen}\, x)\, dx$

33–34 Por medio de una gráfica, estime las coordenadas x de los puntos donde se cortan las curvas dadas. Luego con esa información estime el volumen del sólido obtenido cuando giran alrededor del eje y la región delimitada por estas curvas.

33. $y = e^x, y = \sqrt{x} + 1$

34. $y = x^3 - x + 1,\ y = -x^4 + 4x - 1$

CAS **35–36** Use un sistema algebraico computacional para calcular el volumen exacto del sólido obtenido al girar la región que definen las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

35. $y = \text{sen}^2 x,\ y = \text{sen}^4 x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $x = \pi/2$

36. $y = x^3\, \text{sen}\, x,\ y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$; alrededor de $x = -1$

37–42 La región delimitada por las curvas dadas gira alrededor del eje especificado. Determine el volumen del sólido que resulta por medio de cualquier método.

37. $y = -x^2 + 6x - 8, y = 0$; alrededor del eje y

38. $y = -x^2 + 6x - 8, y = 0$; alrededor del eje x

39. $y = 5,\ y = x + (4/x)$; alrededor de $x = -1$

40. $x = 1 - y^4,\ x = 0$; alrededor de $x = 2$

41. $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; alrededor del eje y

42. $x = (y - 3)^2, x = 4$; alrededor de $y = 1$

43–45 Mediante cascarones cilíndricos, calcule el volumen del sólido.

43. Una esfera de radio r.

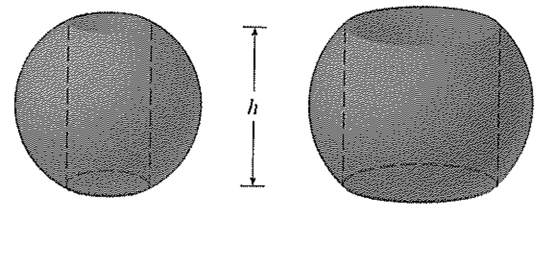
44. El sólido toro del ejercicio 63 de la sección 6.2.

45. Un cono circular recto de altura h y base de radio r.

46. Suponga que usted fabrica anillos para servilletas perforando agujeros de diferentes diámetros en dos bolas de madera (las cuales también tienen diámetros distintos). Usted descubre que ambos anillos para las servilletas tienen la misma altura h, como se muestra en la figura.

(a) Adivine cuál anillo contiene más madera.

(b) Verifique su conjetura: mediante cascarones cilíndricos calcule el volumen de un anillo para servilleta generado al perforar un agujero con radio r a través del centro de una esfera de radio R y exprese la respuesta en función de h.



6.4 TRABAJO

El término *trabajo* se utiliza en el habla de todos los días para dar a entender la cantidad total de esfuerzo que se requiere para ejecutar una tarea. En física tiene significado técnico que depende de la idea de una *fuerza*. De manera intuitiva usted puede pensar en una fuerza que describa un impulso o un jalón de un objeto, por ejemplo, el empuje horizontal de un libro hacia el otro lado de la mesa, o bien, el jalón hacia abajo que ejerce la gravedad de la Tierra en una pelota. En general, si un objeto se desplaza en línea recta con función de posición $s(t)$, por lo tanto la **fuerza** F sobre el objeto (en la misma dirección) está definida por la segunda ley de Newton del movimiento. Es el producto de su masa m por su aceleración, es decir:

$$\boxed{1} \qquad F = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

En el sistema métrico SI, la masa se mide en kilogramos (kg), el desplazamiento en metros (m), el tiempo en segundos (s) y la fuerza en newtons ($N = kg \cdot m/s^2$). Por eso, una fuerza de 1 N que actúa en una masa de 1 kg produce una aceleración de 1 m/s^2. En el sistema usual de Estados Unidos, la unidad fundamental que se ha elegido como la unidad de fuerza es la libra.

En el caso de aceleración constante la fuerza F también es constante y el trabajo realizado está definido como el producto de la fuerza F por la distancia d que el objeto recorre:

$$\boxed{2} \qquad W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si F se mide en newtons y d en metros, enseguida la unidad de W es un newton-metro, que se llama joule (J). Si F se mide en libras y d en pies, en tal caso la unidad de W es libra-pie (lb-pie), que es de casi 1.36 J.

EJEMPLO 1

(a) ¿Qué tanto trabajo se realiza al levantar un libro de 1.2 kg desde el suelo y colocarlo en un escritorio que tiene 0.7 m de altura? Recuerde que la aceleración de la gravedad es $g = 9.8$ m/s^2.

(b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al levantar desde el suelo un peso de 20 lb a una altura de 6 pies?

SOLUCIÓN

(a) La fuerza ejercida es igual y opuesta a la que ejerce la gravedad, de modo que con la ecuación 1 se obtiene

$$F = mg = (1.2)(9.8) = 11.76 \text{ N}$$

y luego la ecuación 2 proporciona el trabajo efectuado

$$W = Fd = (11.76)(0.7) \approx 8.2 \text{ J}$$

(b) En este caso, la fuerza es $F = 20$ lb, de modo que el trabajo realizado es

$$W = Fd = 20 \cdot 6 = 120 \text{ lb-pie}$$

Observe que en el inciso (b), a diferencia del inciso (a), no tuvo que multiplicar por g porque ya conocía el *peso*, que es una fuerza y no la masa del objeto. □

La ecuación 2 define el trabajo siempre y cuando la fuerza sea constante, pero ¿qué sucede si la fuerza es variable? Suponga que el objeto se desplaza a lo largo del eje x en la dirección positiva, desde $x = a$ hasta $x = b$, y en cada punto x entre a y b una fuerza $f(x)$ actúa sobre el objeto, donde f es una función continua. Divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos extremos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e igual ancho Δx. Eliga un punto muestral x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Después la fuerza en el punto es $f(x_i^*)$. Si n es grande, luego Δx es pequeña, y puesto que f es continua, los valores de f no cambian mucho en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En otras palabras, f es casi constante en el intervalo, por lo que el trabajo W_i que se realiza al desplazar la partícula desde x_{i-1} hasta x_i se obtiene aproximadamente mediante la ecuación 2:

$$W_i \approx f(x_i^*)\,\Delta x$$

Por eso, puede dar un valor aproximado del trabajo total con

$$\boxed{3} \qquad W \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Parece que esta aproximación es mejor a medida que incrementa n. Por lo tanto, defina al **trabajo efectuado al mover el objeto desde a hasta b** como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$. Puesto que el lado derecho de (3) es una suma de Riemann, su límite es una integral definida y de este modo

$$\boxed{4} \qquad \boxed{W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx}$$

EJEMPLO 2 Cuando una partícula se ubica a una distancia x pies del origen, una fuerza de $x^2 + 2x$ libras actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se efectúa al moverla desde $x = 1$ hasta $x = 3$?

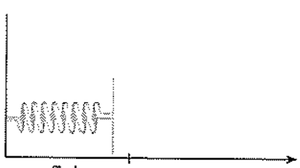
SOLUCIÓN
$$W = \int_1^3 (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 \Big]_1^3 = \frac{50}{3}$$

El trabajo realizado es $16\frac{2}{3}$ lb-pie. □

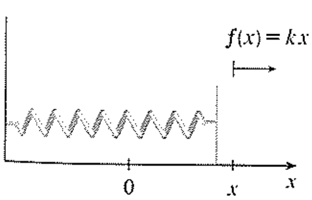
En el ejemplo siguiente aplique una ley de la física: la **ley de Hooke** establece que la fuerza requerida para mantener un resorte estirado x unidades más de su longitud natural es proporcional a x:

$$f(x) = kx$$

donde k es una constante positiva (que se denomina **constante del resorte**). La ley de Hooke se cumple siempre que x no sea demasiado grande (véase figura 1).



(a) Posición natural del resorte



(b) Resorte estirado

FIGURA 1
Ley de Hooke

EJEMPLO 3 Una fuerza de 40 N se requiere para detener un resorte que está estirado desde su longitud natural de 10 cm a una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se hace al estirar el resorte de 15 a 18 cm?

SOLUCIÓN De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza que se requiere para mantener el resorte estirado x metros más allá de su longitud natural es $f(x) = kx$. Cuando el resorte se pasa de 10 a 15 cm, la cantidad estirada es 5 cm = 0.05 m. Esto quiere decir que $f(0.05) = 40$, de modo que

$$0.05k = 40 \qquad k = \tfrac{40}{0.05} = 800$$

Por eso, $f(x) = 800x$ y el trabajo hecho para estirar el resorte de 15 a 18 cm es

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\,dx = 800\,\frac{x^2}{2}\Big]_{0.05}^{0.08}$$
$$= 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] = 1.56 \text{ J}$$ □

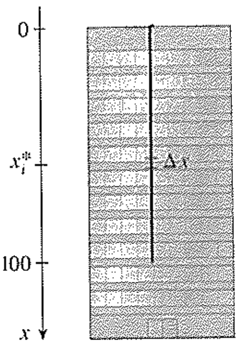


FIGURA 2

▪ Si hubiera colocado el origen en la parte inferior del cable y el eje x hacia arriba habría obtenido

$$W = \int_0^{100} 2(100 - x)\,dx$$

lo cual genera la misma respuesta.

EJEMPLO 4 Un cable de 200 lb mide 100 pies de largo y cuelga verticalmente desde lo alto de un edificio. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir el cable hasta la parte superior del edificio?

SOLUCIÓN En este caso no hay una fórmula para la función fuerza, pero puede aplicar un razonamiento similar al que originó la definición 4.

Coloque el origen en lo alto del edificio y el eje x señalando hacia abajo como se ilustra en la figura 2. Divida el cable en pequeños segmentos de longitud Δx. Si x_i^* es un punto en el i-ésimo intervalo, por lo tanto todos los puntos del intervalo se levantan casi la misma cantidad, a saber, x_i^*. El cable pesa 2 libras por cada pie, de modo que el peso del i-ésimo segmento es $2\Delta x$. Así, el trabajo hecho en el i-ésimo segmento, en lb-pie, es

$$\underbrace{(2\Delta x)}_{\text{fuerza}} \quad \underbrace{x_i^*}_{\text{distancia}} = 2x_i^*\,\Delta x$$

Obtenga el trabajo total que se realizó sumando todas las aproximaciones y dejando que la cantidad de segmentos sea grande (de este modo $\Delta x \to 0$):

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2x_i^*\,\Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$

$$= x^2\Big]_0^{100} = 10\,000 \text{ lb-pie}$$ □

EJEMPLO 5 Un depósito tiene la forma de un cono circular invertido de altura igual a 10 m y radio de la base de 4 m. Se llena con agua hasta alcanzar una altura de 8 m. Calcule el trabajo que se requiere para vaciar el agua mediante bombeo por la parte superior del depósito. (La densidad del agua es 1 000 kg/m.)

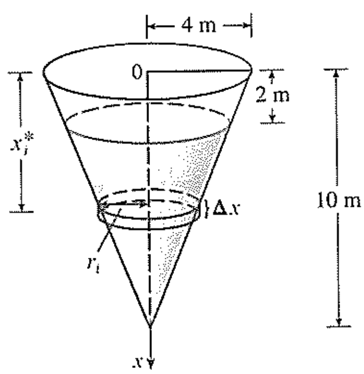


FIGURA 3

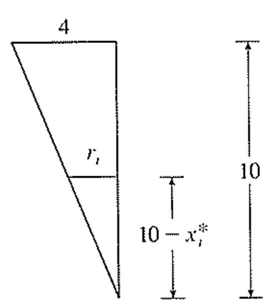


FIGURA 4

SOLUCIÓN Mida profundidades desde la parte superior del recipiente introduciendo una recta vertical de coordenadas como en la figura 3. Hay agua desde una profundidad de 2 m hasta una profundidad de 10 m y, también, divida el intervalo $[2, 10]$ en n subintervalos con extremos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y elija x_i^* en el i-ésimo subintervalo. De este modo el agua se divide en n capas. La i-ésima capa es aproximadamente un cilindro de radio r_i y altura Δx. Puede calcular r_i a partir de triángulos semejantes y con ayuda de la figura 4 como se indica a continuación:

$$\frac{r_i}{10 - x_i^*} = \frac{4}{10} \qquad r_i = \tfrac{2}{5}(10 - x_i^*)$$

Por eso, un volumen aproximado de la i-ésima capa es

$$V_i \approx \pi r_i^2\,\Delta x = \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

de modo que su masa es

$$m_i = \text{densidad} \times \text{volumen}$$

$$\approx 1000 \cdot \frac{4\pi}{25}(10 - x_i^*)^2\,\Delta x = 160\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

La fuerza necesaria para subir esta capa debe superar a la fuerza de gravedad y de este modo

$$F_i = m_i g \approx (9.8)160\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

$$\approx 1570\pi(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

Cada partícula de la capa debe viajar una distancia de aproximadamente x_i^*. El trabajo W_i realizado para subir esta capa hasta lo alto del depósito es casi el producto de la fuerza F_i por la distancia x_i^*:

$$W_i \approx F_i x_i^* \approx 1570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2\,\Delta x$$

Para encontrar el trabajo total en el vaciado del tanque, sume las contribuciones de cada una de las n capas y tome el límite como $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1570\pi x_i^*(10 - x_i^*)^2 \Delta x = \int_2^{10} 1570\pi x(10 - x)^2\, dx$$

$$= 1570\pi \int_2^{10} (100x - 20x^2 + x^3)\, dx = 1570\pi \left[50x^2 - \frac{20x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_2^{10}$$

$$= 1570\pi\left(\tfrac{2048}{3}\right) \approx 3.4 \times 10^6 \text{ J}$$ □

6.4 EJERCICIOS

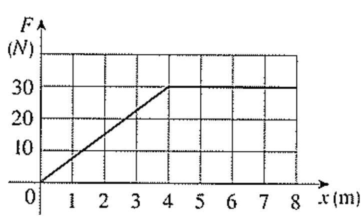
1. ¿Cuánto trabajo se invierte en levantar una bolsa de arena de 40 kg hasta una altura de 1.5 m?

2. Hallar el trabajo gastado si se aplica una fuerza constante de 100 lb para jalar una carreta una distancia de 200 pies

3. Una partícula se desplaza a lo largo del eje x impulsada por una fuerza que mide $10/(1 + x)^2$ libras en un punto a x pies del origen. Calcule el trabajo realizado al mover la partícula desde el origen a una distancia de 9 pies.

4. Cuando una partícula se localiza a una distancia de x metros desde el origen, una fuerza de $\cos(\pi x/3)$ newtons actúa sobre ella. ¿Cuánto trabajo se realiza al mover la partícula desde $x = 1$ hasta $x = 2$? Interprete su respuesta considerando que el trabajo se hace desde $x = 1$ hasta $x = 1.5$ y desde $x = 1.5$ hasta $x = 2$.

5. Se ilustra la gráfica de una función fuerza (en newtons) que se incrementa a su máximo valor y luego permanece constante. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza al mover un objeto a una distancia de 8 m?



6. La tabla muestra los valores de una función fuerza $f(x)$, donde x se mide en metros y $f(x)$ en newtons. Aplique la regla del punto medio para estimar el trabajo que realiza la fuerza al mover un objeto desde $x = 4$ hasta $x = 20$.

x	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$f(x)$	5	5.8	7.0	8.8	9.6	8.2	6.7	5.2	4.1

7. Se requiere una fuerza de 10 lb para mantener estirado un resorte 4 pulg más de su longitud natural. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde su longitud natural hasta 6 pulg más de su longitud natural?

8. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Si se requiere una fuerza de 25 N para mantenerlo estirado a una longitud de 30 cm, ¿cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 20 hasta 25 cm?

9. Suponga que se necesitan 2 J de trabajo para estirar un resorte desde su longitud natural de 30 cm hasta una longitud de 42 cm.
   (a) ¿Cuánto trabajo se requiere para estirarlo desde 35 hasta 40 cm?
   (b) ¿Cuánto más allá de su longitud natural una fuerza de 30 N mantendrá el resorte estirado?

10. Si el trabajo que se requiere para estirar un resorte 1 pie más de su longitud natural es 12 lb-pie, ¿cuánto trabajo se requiere para estirar al resorte 9 pulg más de su longitud natural?

11. Un resorte tiene una longitud natural de 20 cm. Compare el trabajo W_1 invertido en alargar un resorte desde 20 cm hasta 30 cm con el trabajo W_2 gastado en estirarlo desde 30 cm hasta 40 cm. ¿Cómo se relacionan W_1 y W_2?

12. Si se necesitan 6 J de trabajo para estirar un resorte de 10 cm a 12 cm y otros 10 J para estirarlo de 12 hasta 14, ¿cuál es la longitud natural del resorte?

13–20 Demuestre cómo obtener un valor aproximado del trabajo requerido mediante una suma de Riemann. Luego exprese el trabajo como una integral, y evalúela.

13. Una pesada soga de 50 pies de largo pesa 0.5 lb/pie y está colgando por un lado de un edificio de 120 pies de alto.
   (a) ¿Cuánto trabajo se efectúa al jalar la soga por la parte superior del edificio?
   (b) ¿Cuánto trabajo se efectúa al jalar la mitad de la soga por la parte superior del edificio?

14. Una cadena está en el suelo y mide 10 m de largo y su masa es de 80 kg. ¿Cuánto trabajo se efectúa para subir un extremo de la cadena a una altura de 6 m?

15. Un cable que pesa 2 lb/pie se usa para subir 800 lb de carbón por el tiro de la mina de 500 m de profundidad. Calcule el trabajo realizado.

16. Un cubo que pesa 4 lb y una soga de peso insignificante se usan para extraer agua de un pozo de 80 pies de profundidad. El cubo se llena con 40 lb de agua y se jala hacia arriba con una rapidez de 2 pies/s, pero el agua se sale por un agujero que tiene el cubo con una rapidez de 0.2 lb/s. Calcule el trabajo hecho al jalar el cubo hasta la boca del pozo.

17. Un cubo de 10 kg pero con un agujero, se sube desde el suelo hasta una altura de 12 m con rapidez constante por medio de una soga que pesa 0.8 kg/m. Al principio, el cubo contiene 36 kg de agua, pero el agua se sale con rapidez constante y

termina de salirse justo cuando el cubo llega a los 12 metros de altura. ¿Cuánto trabajo se realizó?

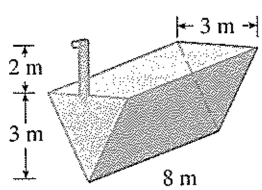
18. Una cadena de 10 pies de largo pesa 25 lb y cuelga de un techo. Calcule el trabajo hecho al subir el extremo inferior de la cadena al techo de modo que esté al mismo nivel que el extremo superior.

19. Un acuario que mide 2 m de largo, 1 m de ancho y 1 m de profundidad está lleno con agua. Determine el trabajo que se requiere para extraer por bombeo la mitad del agua de dicho acuario. (Recuerde que la densidad del agua es de 1 000 kg/m^3.)

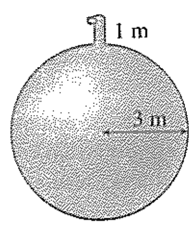
20. Una piscina circular tiene un diámetro de 24 pies, los lados miden 5 pies de altura y la profundidad del agua es de 4 pies. ¿Cuánto trabajo se requiere para extraer por bombeo toda el agua por uno de los lados? (Recuerde que el peso del agua es de 62.5 lb/pie^3.)

21–24 Un tanque está lleno con agua. Determine el trabajo necesario para que, mediante bombeo, el agua salga por el tubo de descarga. En los ejercicios 23 y 24 recuerde que el peso del agua es de 62.5 lb/pie^3.

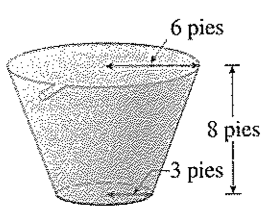
21.



22.

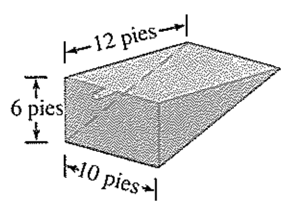


23.



trono de un cono

24.

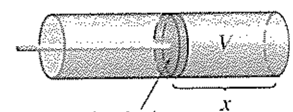


25. Suponga que en el caso del depósito del ejercicio 21, la bomba se descompone después de que se ha realizado un trabajo de 4.7×10^5 J. ¿Cuál es la profundidad del agua que queda en el depósito?

26. Resuelva el ejercicio 22 suponiendo que el tanque está lleno a la mitad de aceite con densidad de 920 kg/m^3.

27. Cuando el gas se expande en un cilindro de radio r, la presión en cualquier tiempo dado es una función del volumen: $P = P(V)$. La fuerza que ejerce el gas en el émbolo (véase la figura) es el producto de la presión por el área: $F = \pi r^2 P$. Demuestre que el trabajo que realiza el gas cuando el volumen se expande desde el volumen V_1 al volumen V_2 es

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\, dV$$



28. En un motor de vapor, la presión P y el volumen V del vapor cumple con la ecuación $PV^{1.4} = k$, donde k es una constante. (Esto es válido en el caso de la expansión adiabática, es decir, la expansión en la cual no hay transferencia de calor entre el cilindro y sus alrededores.) Refiérase al ejercicio 27 para calcular el trabajo realizado por el motor durante un ciclo cuando el vapor inicia a una presión de 160 lb/pulg^2 y un volumen de 100 pulg^3 y se expande a un volumen de 800 pulg^3.

29. La ley de Newton de la gravitación establece que dos cuerpos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde r es la distancia entre los cuerpos y G es la constante gravitacional. Si uno de los cuerpos está fijo, determine el trabajo necesario para llevar al otro desde $r = a$ hasta $r = b$.

30. Mediante la ley de Newton de la gravitación, calcule el trabajo que se requiere para lanzar un satélite de 1 000 kg en dirección vertical hasta una órbita a 1 000 km de altura. Puede suponer que la masa de la Tierra es de 5.98×10^{24} kg y está concentrada en el centro. Tome el radio de la Tierra como 6.37×10^6 m y $G = 6.67 \times 10^{-11}$ N·m^2/kg^2.

6.5 VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN

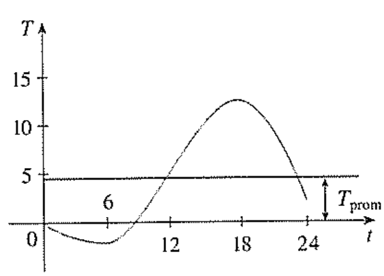


FIGURA 1

Es fácil calcular el valor promedio de una cantidad finita de números $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y_{\text{prom}} = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}$$

Pero ¿de qué manera calcular la temperatura promedio durante un día, si hay una cantidad infinita de lecturas de temperatura? En la figura 1 se ilustra la gráfica de una función de temperatura $T(t)$, donde t se mide en horas y T en °C, y una conjetura a la temperatura promedio, T_{prom}.

En general, trate de calcular el valor promedio de una función $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Empiece por dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos iguales, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Luego escoja los puntos $x_1^*, \ldots, x_n^*$ en subintervalos sucesivos y calcule el promedio de los números $f(x_1^*), \ldots, f(x_n^*)$:

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}$$

(Por ejemplo, si f representa una función de temperatura y $n = 24$, esto quiere decir que tome lecturas de la temperatura cada hora y luego promédielos.) Puesto que $\Delta x = (b - a)/n$, puede escribir $n = (b - a)/\Delta x$ y el promedio de los valores es

$$\frac{f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)}{\dfrac{b-a}{\Delta x}} = \frac{1}{b-a}\left[f(x_1^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x\right]$$

$$= \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

Si deja que n se incremente, calcularía el valor promedio de un gran número de valores muy poco separados. (Por ejemplo, promediaría lecturas de temperatura tomadas cada minuto o hasta cada segundo.) El valor límite es

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

por la definición de una integral definida.

Por lo tanto, defina el **valor promedio de f** en el intervalo $[a, b]$ como

Para una función positiva, considere a esta definición como

$$\frac{\text{área}}{\text{ancho}} = \text{altura promedio}$$

$$\boxed{f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

EJEMPLO 1 Determine el valor promedio de la función $f(x) = 1 + x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$.

SOLUCIÓN Con $a = -1$ y $b = 2$

$$f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[x + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2$$ □

Si $T(t)$ es la temperatura en el tiempo t, es posible maravillarse si existe un tiempo específico cuando la temperatura es la misma que la temperatura promedio. Para la función temperatura dibujada en la figura 1, existen dos tiempos; justo antes del mediodía y antes de la medianoche. En general ¿hay un número c al cual el valor de f es exactamente igual al valor promedio de la función, es decir, $f(c) = f_{\text{prom}}$? El teorema siguiente dice que esto es válido para funciones continuas.

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA INTEGRALES Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = f_{\text{prom}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$$

El teorema del valor medio para integrales es una consecuencia del teorema del valor medio para las derivadas y el teorema fundamental del cálculo. La demostración se esboza en el ejercicio 23.

La interpretación geométrica del teorema del valor medio para integrales es que, para funciones positivas f, hay un número c tal que el rectángulo con base $[a, b]$ y altura $f(c)$ tiene la misma área que la región bajo la gráfica de f desde a hasta b. (Véase figura 2 y la interpretación más clara en la nota al margen.)

Siempre se puede cortar una parte de lo alto de una (dos dimensiones) montaña hasta una cierta altura, y usarla para rellenar con eso los valles de tal modo que la montaña se vuelva completamente plana.

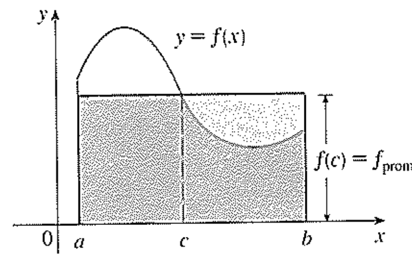


FIGURA 2

EJEMPLO 2 Puesto que $f(x) = 1 + x^2$ es continua en el intervalo $[-1, 2]$, el teorema del valor medio para integrales establece que hay un número c en $[-1, 2]$ tal que

$$\int_{-1}^{2} (1 + x^2)\, dx = f(c)[2 - (-1)]$$

En este caso particular puede hallar c, en forma explícita. Según el ejemplo 1, sabe que $f_{\text{prom}} = 2$, de modo que el valor de c cumple con

$$f(c) = f_{\text{prom}} = 2$$

Por lo tanto $\qquad 1 + c^2 = 2 \qquad$ de modo que $\qquad c^2 = 1$

Por consiguiente, sucede en este caso que hay dos números $c = \pm 1$ en el intervalo $[-1, 2]$ que funciona en el teorema del valor medio para las integrales. □

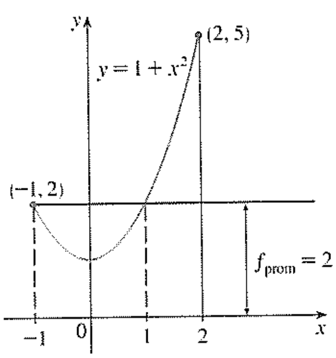


FIGURA 3

Los ejemplos 1 y 2 se ilustran mediante la figura 3.

EJEMPLO 3 Demuestre que la velocidad promedio de un automóvil en un intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ es la misma que el promedio de sus velocidades durante el viaje.

SOLUCIÓN Si $s(t)$ es el desplazamiento del automóvil en el tiempo t, entonces, por definición, la velocidad promedio del automóvil en el intervalo es

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Por otro lado, el valor promedio de la función de velocidad en el intervalo es

$$v_{\text{prom}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} s'(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_1}[s(t_2) - s(t_1)] \qquad \text{(según el teorema del cambio total)}$$

$$= \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \text{velocidad promedio}$$ □

6.5 EJERCICIOS

1–8 Determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

1. $f(x) = 4x - x^2$, $[0, 4]$

2. $f(x) = \operatorname{sen} 4x$, $[-\pi, \pi]$

3. $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $[1, 8]$

4. $g(x) = x^2\sqrt{1 + x^3}$, $[0, 2]$

5. $f(t) = te^{-t^2}$, $[0, 5]$

6. $f(\theta) = \sec^2(\theta/2)$, $[0, \pi/2]$

7. $h(x) = \cos^4 x \operatorname{sen} x$, $[0, \pi]$

8. $h(u) = (3 - 2u)^{-1}$, $[-1, 1]$

9–12
(a) Calcule el valor promedio de f en el intervalo dado.
(b) Encuentre c tal que $f_{\text{prom}} = f(c)$.
(c) Grafique f y el rectángulo cuya área es la misma que el área bajo la gráfica de f.

9. $f(x) = (x - 3)^2$, $[2, 5]$

10. $f(x) = \sqrt{x}$, $[0, 4]$

11. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$, $[0, \pi]$

12. $f(x) = 2x/(1 + x^2)^2$, $[0, 2]$

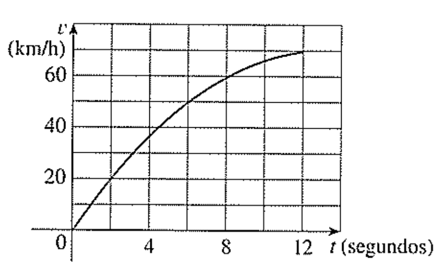
13. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, demuestre que f toma el valor de 4 por lo menos una vez en el intervalo $[1, 3]$.

14. Determine los números b tales que el valor promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3.

15. La tabla da valores de una función continua. Mediante la regla del punto medio estime el valor promedio de f en $[20, 50]$.

x	20	25	30	35	40	45	50
$f(x)$	42	38	31	29	35	48	60

16. Se muestra la gráfica de velocidad de un automóvil que acelera.
(a) Estime la velocidad promedio del automóvil durante los primeros 12 segundos.
(b) ¿En qué momento la velocidad instantánea fue igual a la velocidad promedio?



17. En una cierta ciudad la temperatura (en °F) t horas después de las 9 A.M. se modeló mediante la función

$$T(t) = 50 + 14 \operatorname{sen} \frac{\pi t}{12}$$

Calcule la temperatura promedio durante el periodo de 9 AM hasta 9 P.M.

18. (a) Una taza de café tiene una temperatura de 95°C y le toma 30 minutos enfriarse a 61°C en una habitación con una temperatura de 20°C. Utilice la ley del enfriamiento de Newton (sección 3.8) para demostrar que la temperatura del café después de t minutos es.

$$T(t) = 20 + 75e^{-kt}$$

donde $k \approx 0.02$.

(b) ¿Cuál es la temperatura promedio del café durante la primera media hora?

19. La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $12/\sqrt{x + 1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Determine la densidad promedio de la varilla.

20. Si un cuerpo en caída libre parte del reposo, después su desplazamiento está de acuerdo con $s = \frac{1}{2}gt^2$. Sea la velocidad v_T después del tiempo T. Demuestre que si calcula el promedio de las velocidades con respecto a t obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{1}{2}v_T$,pero si calcula el promedio de las velocidades con respecto a s obtiene $v_{\text{prom}} = \frac{2}{3}v_T$.

21. Con el resultado del ejercicio 79 de la sección 5.5 calcule el volumen promedio de aire inhalado en los pulmones en un ciclo respiratorio.

22. La velocidad v de la sangre que fluye en un vaso sanguíneo de radio R y longitud l a una distancia r desde el eje central es

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde P es la diferencia de presión entre los extremos del vaso y η es la viscosidad de la sangre (véase ejemplo 7 de la sección 3.7). Determine la velocidad promedio (con respecto a r) en el intervalo $0 \leqslant r \leqslant R$. Compare la velocidad promedio con la velocidad máxima.

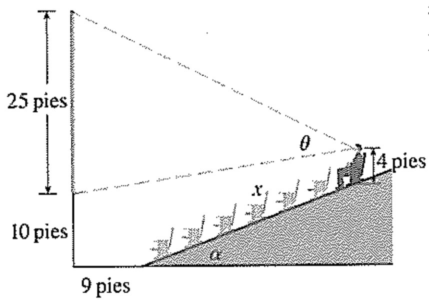
23. Demuestre el teorema del valor medio para integrales aplicando el teorema del valor medio para derivadas (véase sección 4.2) a la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

24. Si $f_{\text{prom}}[a, b]$ denota el valor promedio de f en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, demuestre que

$$f_{\text{prom}}[a, b] = \frac{c - a}{b - a} f_{\text{prom}}[a, c] + \frac{b - c}{b - a} f_{\text{prom}}[c, b]$$

PROYECTO DE APLICACIÓN ¿DÓNDE SENTARSE EN LAS SALAS CINEMATOGRÁFICAS?

Un cinematógrafo tiene una pantalla que está colocada a 10 pies arriba del piso y mide 25 pies de altura. La primera fila de asientos está ubicada a 9 pies de la pantalla, y las filas están separadas 3 pies. El piso de la zona de asientos está inclinada un ángulo de $\alpha = 20°$ por arriba de la horizontal y la distancia inclinada hasta donde usted está sentado es x. La sala tiene 21 filas de asientos, de modo que $0 \leqslant x \leqslant 60$. Suponga que usted decide que el mejor lugar para sentarse es la fila donde el ángulo θ que subtiende la pantalla en sus ojos es un máximo. Suponga también que sus ojos están 4 pies por arriba del piso, según se ilustra en la figura. (En el ejercicio 70 de la sección 4.7 se estudia una versión más sencilla de este problema, en el que el piso es horizontal, pero este proyecto plantea una situación más complicada y requiere técnicas modernas.)



1. Demuestre que

$$\theta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - 625}{2ab}\right)$$

donde $$a^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (31 - x\operatorname{sen}\alpha)^2$$

y $$b^2 = (9 + x\cos\alpha)^2 + (x\operatorname{sen}\alpha - 6)^2$$

2. Mediante una gráfica de θ como función de x estime el valor de x que maximiza θ. ¿En cuál fila debe sentarse? ¿Cuál es el ángulo de visión θ en esta fila?

3. Utilice un sistema algebraico computacional para derivar θ y calcular un valor numérico para la raíz de la ecuación $d\theta/dx = 0$. ¿Este valor confirma su resultado del problema 2?

4. Mediante una gráfica de θ estime el valor promedio de θ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 60$. Luego aplique su sistema algebraico computacional para calcular el valor promedio. Compare con los valores máximos y mínimos de θ.

6 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Trace dos curvas representativas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, donde $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$. Muestre cómo aproximarse al área entre estas curvas mediante la suma de Riemann, y dibuje los rectángulos correspondientes de aproximación. Luego plantee una expresión del área exacta.

(b) Explique cómo la situación cambia si las curvas tienen por ecuaciones a $x = f(y)$ y $x = g(y)$, donde $f(y) \geqslant g(y)$ para $c \leqslant y \leqslant d$.

2. Suponga que Sue corre más rápido que Kathy en la competencia de los 1 500 m. ¿Cuál es el significado físico del área entre sus curvas de velocidad durante el primer minuto de la competencia?

3. (a) Suponga que S es un sólido con áreas de secciones transversales conocidas. Explique cómo obtener un valor aproximado del volumen de S mediante una suma de Riemann. Luego escriba una expresión para el volumen exacto.

(b) Si S es un sólido de revolución, ¿cómo determina las áreas de las secciones transversales?

4. (a) ¿Cuál es el volumen de un cascarón cilíndrico?

(b) Explique cómo utilizar los cascarones cilíndricos para calcular el volumen de un sólido de revolución.

(c) ¿Por qué prefería usted usar el método de cálculo mediante cascarones en lugar del método de las rebanadas?

5. Suponga que empuja un libro al otro lado de una mesa de 6 m de largo ejerciendo una fuerza $f(x)$ en cada punto desde $x = 0$ hasta $x = 6$. ¿Qué representa $\int_0^6 f(x)\,dx$? Si $f(x)$ se mide en newtons, ¿cuáles son las unidades para la integral?

6. (a) ¿Cuál es el valor medio de una función f en un intervalo $[a, b]$?

(b) ¿Qué establece el teorema del valor medio para integrales? ¿Cuál es su interpretación geométrica?

EJERCICIOS

1–6 Calcule el área de la región acotada por las curvas dadas.

1. $y = x^2,\ y = 4x - x^2$

2. $y = 1/x\ y = x^2,\ y = 0,\ x = e$

3. $y = 1, -2x^2,\ y = |x|$

4. $x + y = 0, \quad x = y^2 + 3y$

5. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2), \quad y = x^2 - 2x$

6. $y = \sqrt{x}$; $y = x^2$, $x = 2$

7–11 Determine el volumen del sólido que se obtiene al hacer girar la región definida por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

7. $y = 2x$, $y = x^2$; alrededor del eje x

8. $x = 1 + y^2$, $y = x - 3$; alrededor del eje y

9. $x = 0$, $x = 9 - y^2$; alrededor de $x = -1$

10. $y = x^2 + 1$, $y = 9 - x^2$; alrededor de $y = -1$

11. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = a + h$ (donde $a > 0$, $h > 0$); alrededor del eje y

12–14 Plantee una integral, pero no la evalúe, para determinar el volumen del sólido que se obtiene al rotar la región delimitada por las curvas dadas alrededor del eje especificado.

12. $y = \tan x$, $y = x$, $x = \pi/3$; alrededor del eje y

13. $y = \cos^2 x$, $|x| \leq \pi/2$, $y = \frac{1}{4}$; alrededor de $x = \pi/2$

14. $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$; alrededor de $y = 2$

15. Determine los volúmenes de los sólidos obtenidos al hacer girar la región delimitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$ alrededor de las rectas siguientes:
(a) El eje x (b) El eje y (c) $y = 2$

16. Sea $\mathcal{R}$ la región que se encuentra en el primer cuadrante y que está limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = 2x - x^2$. Calcule las cantidades siguientes.
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x
(c) El volumen obtenido al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje y

17. Sea $\mathcal{R}$ la región delimitada por las curvas $y = \tan(x^2)$, $x = 1$ y $y = 0$. Aplique la regla del punto medio con $n = 4$ para estimar lo siguiente.
(a) El área de $\mathcal{R}$
(b) El volumen obtenido al hacer girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje x

18. Sea $\mathcal{R}$ la región que definen las curvas $y = 1 - x^2$ y $y = x^6 - x + 1$. Estime las cantidades siguientes.
(a) Las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas
(b) El área de $\mathcal{R}$
(c) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje x
(d) El volumen generado cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor del eje y

19–22 Cada integral representa el volumen de un sólido. Describa el sólido.

19. $\int_0^{\pi/2} 2\pi x \cos x \, dx$ 20. $\int_0^{\pi/2} 2\pi \cos^2 x \, dx$

21. $\int_0^{\pi} \pi(2 - \operatorname{sen} x)^2 \, dx$ 22. $\int_0^4 2\pi(6 - y)(4y - y^2) \, dy$

23. La base del sólido es un disco circular de radio 3. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales paralelas y perpendiculares a la base son triángulos rectángulos isósceles cuya hipotenusa se apoya en la base.

24. La base de un sólido es la región que definen las parábolas $y = x^2$ y $y = 2 - x^2$. Calcule el volumen del sólido si las secciones transversales perpendiculares al eje x son cuadrados y uno de sus lados coincide con la base.

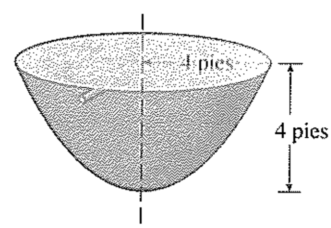
25. La altura de un monumento es de 20 m. Una sección transversal horizontal a una distancia de x metros desde la parte alta es un triángulo equilátero con $\frac{1}{4}x$ metros por lado. Calcule el volumen del monumento.

26. (a) La base de un sólido es un cuadrado cuyos vértices están ubicados en $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. Todas las secciones transversales perpendiculares al eje x es un semicírculo. Determine el volumen del sólido.
(b) Demuestre que al cortar el sólido del inciso (a) lo puede reacomodar para formar un cono. Calcule por lo tanto su volumen con más facilidad.

27. Se requiere una fuerza de 30 N para mantener estirado un resorte desde su longitud natural de 12 cm hasta una longitud de 15 cm. ¿Cuánto trabajo se realiza al estirar el resorte desde 12 cm hasta 20 cm?

28. Un elevador de 1 600 lb está suspendido de un cable de 200 pies que pesa 10 lb/pie. ¿Cuánto trabajo se requiere para subir el elevador desde el sótano hasta el tercer piso, que es una distancia de 30 pies?

29. Un depósito lleno con agua tiene la forma de un paraboloide de revolución como se muestra en la figura, es decir, su forma se obtiene al hacer girar una parábola alrededor del eje vertical.
(a) Si su altura es de 4 pies, el radio en lo alto es de 4 pies, determine el trabajo requerido para extraer por bombeo el agua del tanque
(b) Después de 4 000 lb-pies de trabajo realizado, ¿cuál es la profundidad del agua que queda en el depósito?



30. Calcule el valor promedio de la función $f(t) = t \operatorname{sen}(t^2)$ en el intervalo $[0, 10]$.

31. Si f es una función continua, ¿cuál es el límite cuando $h \to 0$ del valor promedio de f en el intervalo $[x, x + h]$?

32. Sea $\mathcal{R}_1$ la región definida por $y = x^2$, $y = 0$ y $x = b$, donde $b > 0$. Sea $\mathcal{R}_2$ la región delimitada por $y = x^2$, $x = 0$ y $y = b^2$.
(a) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ tengan la misma área?
(b) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ abarca el mismo volumen cuando gira alrededor del eje x que alrededor del eje y?
(c) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ abarcan el mismo volumen cuando gira alrededor del eje x?
(d) ¿Hay un valor de b tal que $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ abarcan el mismo volumen cuando gira alrededor del eje y?

PROBLEMAS ADICIONALES

1. (a) Encuentre una función f continua positiva tal que el área bajo la gráfica de f desde 0 hasta t es $A(t) = t^3$ para toda $t > 0$.

(b) Se genera un sólido al hacer girar alrededor del eje x la región bajo la curva $y = f(x)$, donde f es una función positiva y $x \geqslant 0$. El volumen generado por la parte de la curva desde que $x = 0$ hasta $x = b$ es b^2 para toda $b > 0$. Determine la función f.

2. Hay una recta que pasa por el origen que divide la región definida por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x en dos regiones de área igual. ¿Cuál es la pendiente de la recta?

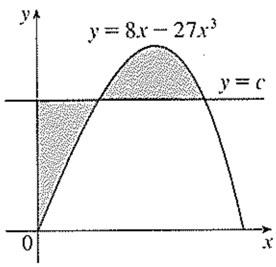


FIGURA PARA EL PROBLEMA 3

3. En la figura se ilustra una horizontal $y = c$ que corta a la curva $y = 8x - 27x^3$. Encuentre el número c tal que las áreas de las regiones sombreadas sean iguales.

4. Un recipiente de vidrio, cilíndrico, de radio r y altura L se llena con agua y luego se ladea hasta que el agua que queda en el recipiente cubra exactamente la base.

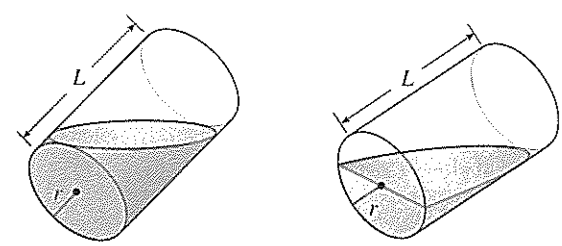
(a) Determine una manera de "rebanar" el agua en secciones transversales, rectangulares y paralelas, y luego *plantee* una integral definida para determinar el volumen del agua en el recipiente.

(b) Encuentre una manera de obtener "rebanadas" de agua que sean secciones transversales y paralelas, pero que sean trapezoides, y luego *plantee* una integral definida para obtener el volumen del agua.

(c) Calcule el volumen de agua en el recipiente evaluando una de las integrales de los incisos (a) o (b).

(d) Calcule el volumen del agua en el recipiente a partir de consideraciones puramente geométricas.

(e) Suponga que el recipiente se ladea hasta que el agua cubre exactamente la mitad de la base. ¿En qué dirección puede "rebanar" el agua en secciones transversales triangulares? ¿Y en secciones transversales rectangulares? ¿En secciones transversales que son segmentos de círculos? Determine el volumen del agua en el recipiente.



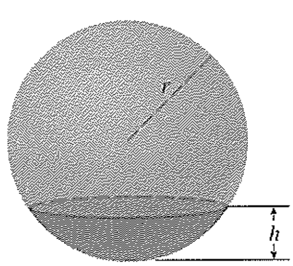


FIGURA PARA EL PROBLEMA 5

5. (a) Demuestre que el volumen de un segmento de altura h de una esfera de radio r es

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$$

(b) Demuestre que si una esfera de radio 1 se corta mediante un plano a una distancia x desde el centro de tal manera que el volumen de un segmento es el doble del volumen del otro, por lo tanto x es una solución de la ecuación.

$$3x^3 - 9x + 2 = 0$$

donde $0 < x < 1$. Aplique el método de Newton para determinar una x exacta con cuatro cifras decimales.

(c) Utilice la fórmula del volumen de un segmento de una esfera para demostrar que la profundidad x a la cual una esfera flotante de radio r se hunde en el agua es una raíz de la ecuación

$$x^3 - 3rx^2 + 4r^3s = 0$$

donde s es la densidad relativa de la esfera. Suponga que una esfera de madera de radio igual a 0.5 m tiene densidad relativa de 0.75. Calcule la profundidad, con cuatro cifras decimales, a la cual la esfera se hunde.

(d) Un recipiente semiesférico tiene radio de 5 pulg y entra agua al recipiente a una cantidad de 0.2 pulg^3/s.
   (i) ¿Qué tan rápido sube el nivel de agua en el recipiente en el instante en que el agua tiene 3 pulg de profundidad?
   (ii) En un cierto momento, el agua tiene 4 pulg de profundidad. ¿Qué tanto tiempo se requiere para llenar con agua el recipiente?

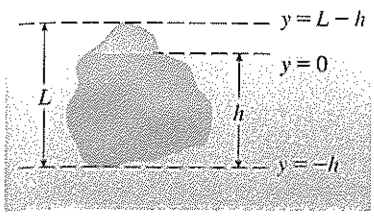


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

6. El principio de Arquímedes establece que la fuerza de flotación de un objeto parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido que el objeto desaloja. Por lo tanto, en el caso de un objeto de densidad ρ_0, que flota parcialmente sumergido en un líquido de densidad ρ_0 la fuerza de flotación es $F = \rho_f g \int_{-h}^{0} A(y)\, dy$, donde g es la aceleración debido a la gravedad y $A(y)$ es el área de una sección transversal representativa del objeto. El peso del objeto se representa mediante

$$W = \rho_0 g \int_{-h}^{L-h} A(y)\, dy$$

(a) Demuestre que el porcentaje del volumen del objeto por arriba de la superficie del líquido es

$$100\,\frac{\rho_f - \rho_0}{\rho_f}$$

(b) La densidad del hielo es 917 kg/m^3 y la densidad del agua de mar es 1 030 kg/m^3. ¿Qué porcentaje del volumen de un iceberg sobresale del agua?

(c) Un cubo de hielo flota en un vaso lleno hasta el borde con agua. ¿Se derramará el agua cuando se funda el cubo de hielo?

(d) Una esfera de radio 0.4 m y de peso insignificante flota en un lago enorme de agua dulce. ¿Qué tanto trabajo se requiere para sumergir del todo a la esfera? La densidad del agua es de 1 000 kg/m^3.

7. El agua que se encuentra en un recipiente se evapora con una rapidez proporcional al área de la superficie del agua. (Esto quiere decir que la rapidez de decremento del volumen es proporcional al área de la superficie.) Demuestre que la profundidad del agua disminuye a una rapidez constante, sin que importe la forma del recipiente.

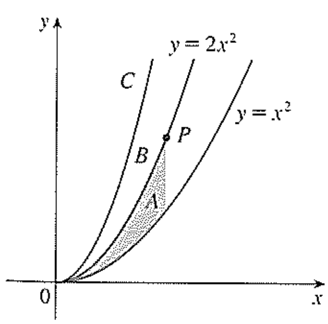
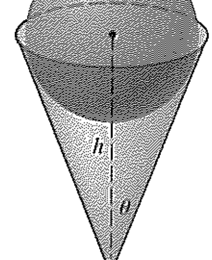


FIGURA PARA EL PROBLEMA 9

8. Una esfera de radio 1 se sobrepone a una esfera más pequeña de radio r de tal manera que su intersección es una circunferencia de radio r. (En otras palabras, cuando ambas se cortan, el resultado es el gran círculo de la esfera menor.) Determine r de modo que el volumen en el interior de la esfera pequeña y el volumen incluyendo el exterior de la esfera grande sea tan grande como sea posible.

9. En la figura se ilustra una curva C con la propiedad de que para todo punto P en la mitad de la curva $y = 2x^2$, las áreas A y B son iguales. Determine una ecuación de C.

10. Un vaso de papel lleno con agua tiene la forma de un cono de altura h y ángulo semivertical θ (véase la figura). Se coloca una pelota con todo cuidado en el vaso, con lo cual se desplaza una parte de agua y se derrama. ¿Cuál es el radio de la pelota que ocasiona que el volumen máximo de agua se derrame?



PROBLEMAS ADICIONALES

11. Una *clepsidra* o reloj de agua es un recipiente de vidrio con un pequeño agujero en el fondo a través del cual el agua puede salir. El reloj se calibra para que mida el tiempo; la calibración se efectúa colocando marcas en el recipiente que corresponden a los niveles de agua en tiempos con separación igual. Sea $x = f(y)$ continua en el intervalo $[0, b]$ y suponga que el recipiente se formó al hacer girar la gráfica de f alrededor del eje y. Sea V el volumen de agua y h la altura del nivel de agua en el tiempo t.

(a) Determine V en función de h.

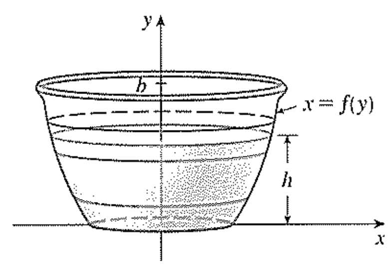
(b) Demuestre que

$$\frac{dV}{dt} = \pi[f(h)]^2 \frac{dh}{dt}$$

(c) Suponga que A es el área del agujero en el fondo del recipiente. Se infiere de la ley de Torricelli que la relación de cambio del volumen del agua es

$$\frac{dV}{dt} = kA\sqrt{h}$$

donde k es una constante negativa. Determine una fórmula para la función f tal que dh/dt es una constante C. ¿Cuál es la ventaja de tener $dh/dt = C$?



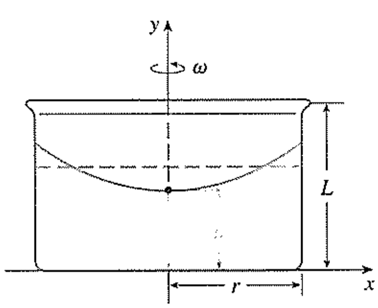


FIGURA PARA EL PROBLEMA 12

12. Un recipiente cilíndrico de radio r y altura L está lleno en parte con un líquido cuyo volumen es V. Si se hace girar el recipiente alrededor del eje de simetría con rapidez angular constante ω, por lo tanto el recipiente inducirá un movimiento rotatorio en el líquido alrededor del mismo eje. A la larga, el líquido estará girando a la misma rapidez angular que el recipiente. La superficie del líquido será convexa, como se señala en la figura, porque la fuerza centrífuga en las partículas de líquido aumenta con la distancia desde el eje del recipiente. Se puede demostrar que la superficie del líquido es un paraboloide de revolución generado al hacer girar la parábola

$$y = h + \frac{\omega^2 x^2}{2g}$$

alrededor del eje de las y, donde g es la aceleración de la gravedad.

(a) Determine h como una función de ω.

(b) ¿A qué rapidez angular la superficie del líquido tocará el fondo? ¿A qué rapidez se derramará el agua por el borde?

(c) Suponga que el radio del recipiente es 2 pies, la altura es 7 pies y que el recipiente y el líquido giran a la misma rapidez angular constante. La superficie del líquido está a 5 pies por abajo de la parte superior del depósito en el eje central y a 4 pies por abajo de la parte superior del recipiente a 1 pie del eje central.

(i) Determine la rapidez angular del recipiente y el volumen del líquido.

(ii) ¿Qué tanto por abajo de la parte superior el recipiente está el líquido en la pared del recipiente?

13. Considere la grafica de un polinomio cúbico que corta transversalmente la parábola $y = x^2$ cuando $x = 0$, $x = a$, y $x = b$, donde $0 < a < b$. Si las dos regiones entre las curvas tiene la misma área, ¿cómo se relaciona b con a?

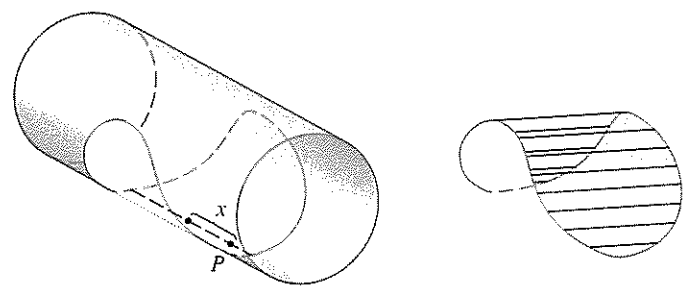
CAS **14.** Suponga que planea hacer un taco con una tortilla de 8 pulg de diámetro, de modo que la tortilla parezca que está rodeando en parte un cilindro circular. Llene la tortilla hasta la orilla, (y no más) con carne, queso y otros ingredientes. El problema es decidir cómo curvar la tortilla para maximizar el volumen de comida que pueda contener.

(a) Empiece por colocar un cilindro circular de radio r a lo largo del diámetro de la tortilla, y rodee con ésta el cilindro. Represente con x la distancia desde el centro de la tortilla hasta el punto P en el diámetro (véase la figura). Demuestre que el área de la sección transversal del taco lleno en el plano que pasa por P y que es perpendicular al eje del cilindro es

$$A(x) = r\sqrt{16 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{r}\sqrt{16 - x^2}\right)$$

y escriba una expresión para el volumen del taco lleno.

(b) Determine en forma aproximada el valor de r que maximiza el volumen del taco. (Recurra a un método gráfico con su CAS.)



15. Si la tangente en un punto P en la curva $y = x^2$ corta transversalmente otra vez la curva en Q, sea A el área de la región limitada por la curva y el segmento de línea PQ. Sea B el área de la región definida de la misma manera iniciando con Q en lugar de P. ¿Cuál es la correspondencia entre A y B?