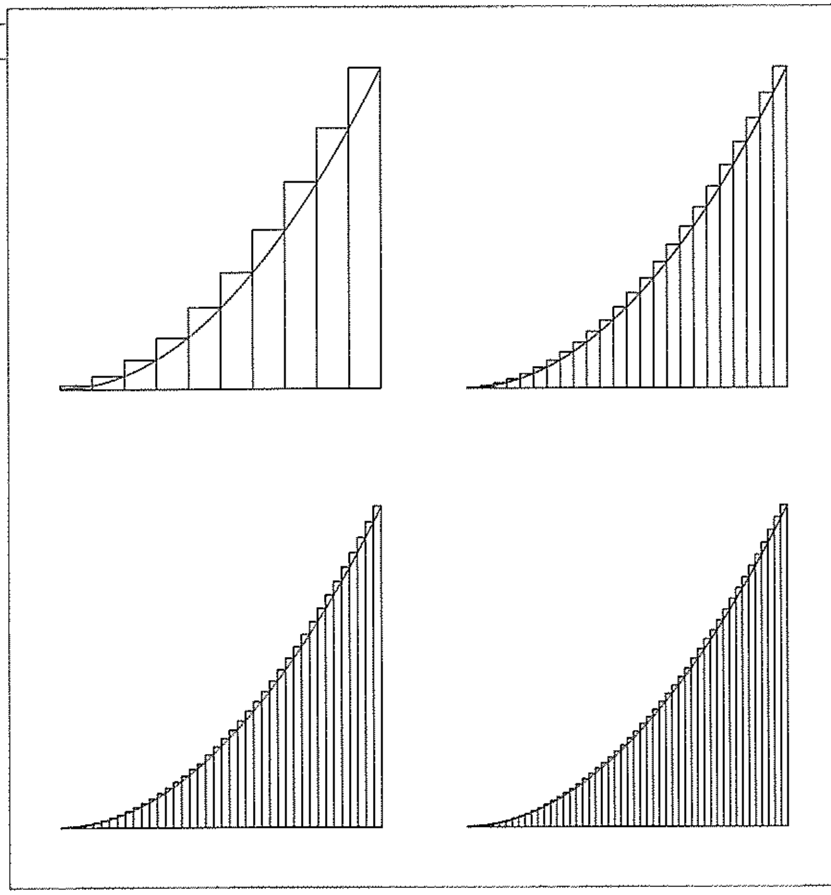
5

INTEGRALES



Para calcular un área aproxime una región mediante una gran cantidad de rectángulos. El área exacta es el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos.

En el capítulo 2 utilizó los problemas de la tangente y de la velocidad para introducir la derivada, la cual constituye la idea central del cálculo diferencial. De manera muy semejante, en este capítulo se empieza con los problemas del área y de la distancia y se utilizan para formular la idea de integral definida, la cual representa el concepto básico del cálculo integral. En los capítulos 6 y 8 verá cómo usar la integral para resolver problemas referentes a volúmenes, longitudes de curvas, predicciones sobre población, gasto cardiaco, fuerzas sobre la cortina de una presa, trabajo, superávit del consumidor y béisbol, entre muchos otros.

Existe una conexión entre el cálculo integral y el cálculo diferencial. El teorema fundamental del cálculo relaciona la integral con la derivada y, en este capítulo, verá que simplifica en gran parte la solución de muchos problemas.

5.1 ÁREAS Y DISTANCIAS

Ahora es un buen momento para leer (o volver a leer) *Presentación preliminar del cálculo* (véase la página 2), que analiza las ideas unificadoras del cálculo y le ayuda a situarse en la perspectiva de dónde está y hacia dónde va.

En esta sección se descubre que al intentar hallar el área debajo de una curva o la distancia recorrida por un automóvil, se finaliza con el mismo tipo especial de límite.

EL PROBLEMA DEL ÁREA

Empiece por intentar resolver el *problema del área*: hallar el área de la región S que está debajo de la curva $y = f(x)$, desde a hasta b. Esto significa que S (figura 1) está limitada por la gráfica de una función continua f [donde $f(x) \geqslant 0$], las rectas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje x.

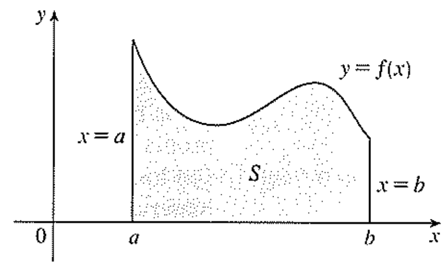


FIGURA 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$

Al intentar resolver el problema del área, debe preguntarse: ¿cuál es el significado de la palabra *área*? Esta cuestión es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, se define como el producto del largo y el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base multiplicada por la altura. El área de un polígono se encuentra al dividirlo en triángulos (figura 2) y sumar las áreas de esos triángulos.

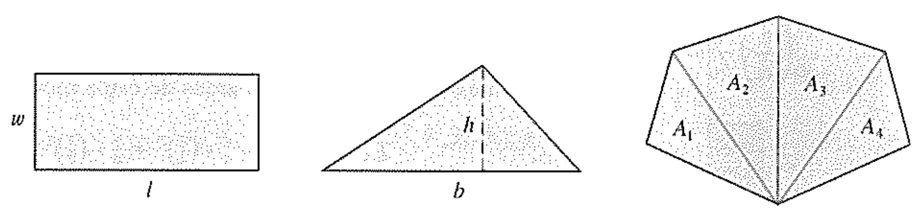


FIGURA 2 $A = lw$ $\quad A = \frac{1}{2}bh \quad A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tiene una idea intuitiva de lo que es el área de una región. Pero parte del problema del área es hacer que esta idea sea precisa dando una definición exacta de área.

Recuerde que al definir una tangente, primero se obtuvo una aproximación de la pendiente de la recta tangente por las pendientes de rectas secantes y, a continuación tomó el límite de estas aproximaciones. Siga una idea similar para las áreas. En primer lugar obtenga una aproximación de la región S por medio de rectángulos y después tome el límite de las áreas de estos rectángulos, como el incremento del número de rectángulos En el ejemplo siguiente se ilustra el procedimiento.

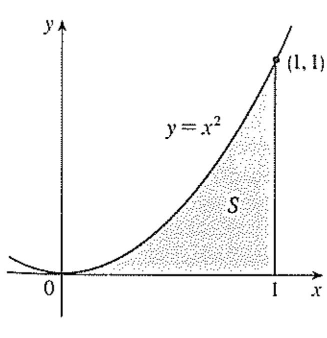


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Use rectángulos para estimar el área debajo de la parábola $y = x^2$, desde 0 hasta 1 (la región parabólica S se ilustra en la figura 3).

SOLUCIÓN En primer lugar, el área de S debe encontrarse en alguna parte entre 0 y 1, porque S está contenida en un cuadrado cuya longitud del lado es 1 pero, en verdad, puede lograr algo mejor que eso. Suponga que divide S en cuatro franjas S_1, S_2, S_3 y S_4, al trazar las rectas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4(a).

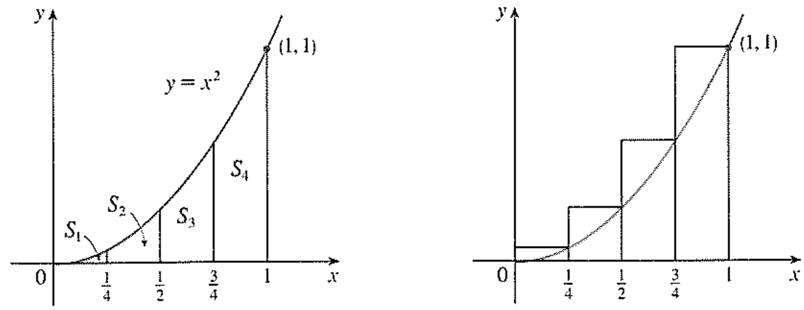


FIGURA 4 (a) (b)

Puede obtener una aproximación de cada franja por medio de un rectángulo cuya base sea la misma que la de la franja y cuya altura sea la misma que la del lado derecho de la propia franja [véase la figura 4(b)]. En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos extremos de la derecha de los subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$.

Cada rectángulo tiene un ancho de $\frac{1}{4}$ y las alturas son $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{3}{4})^2$ y 1^2. Si denota con R_4 la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, obtiene

$$R_4 = \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot 1^2 = \tfrac{15}{32} = 0.46875$$

A partir de la figura 4(b) se ve que el área A de S es menor que R_4, de modo que

$$A < 0.46875$$

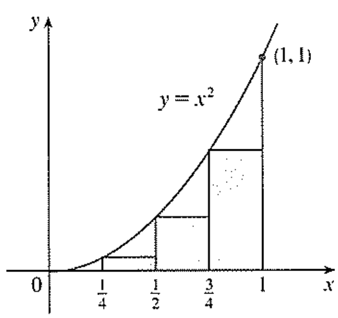


FIGURA 5

En lugar de usar los rectángulos de la figura 4(b), es posible optar por los más pequeños de la figura 5, cuyas alturas son los valores de f en los puntos extremos de la izquierda de los subintervalos. (El rectángulo de la extrema izquierda se ha aplastado, debido a que su altura es 0.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \tfrac{1}{4} \cdot 0^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{32} = 0.21875$$

El área de S es mayor que L_4, de modo que se tiene estimaciones superior e inferior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Es posible repetir este procedimiento con un número mayor de franjas. En la figura 6 se muestra lo que sucede cuando divide la región S en ocho franjas de anchos iguales.

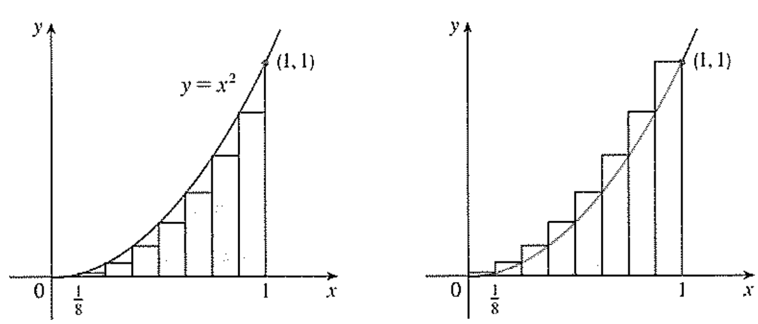


FIGURA 6
Aproximación de S con ocho rectángulos

(a) Usando los puntos extremos de la izquierda

(b) Usando los puntos extremos de la derecha

Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), obtiene mejores estimaciones inferior y superior para A:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

De modo que una respuesta posible para la pregunta es decir que el área verdadera de S se encuentra en alguna parte entre 0.2734375 y 0.3984375.

Podría obtener estimaciones mejores al incrementar el número de franjas. En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos semejantes (con una computadora), usando n rectángulos cuyas alturas se encontraron con los puntos extremos de la izquierda (L_n) o con los puntos extremos de la derecha (R_n). En particular, al usar 50 franjas, el área se encuentra entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 franjas, lo estrecha incluso más: A se halla entre 0.3328335 y 0.3338335. Se obtiene una buena aproximación, promediando estos números: $A \approx 0.3333335$. □

Con base en los valores de la tabla en el ejemplo 1, parece que R_n tiende a $\frac{1}{3}$ conforme n crece. Se confirma esto en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Para la región S del ejemplo 1, demuestre que la suma de las áreas de los rectángulos superiores de aproximación tiende a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

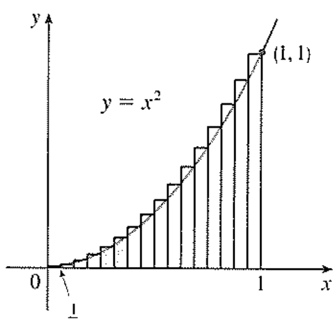


FIGURA 7

SOLUCIÓN R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos de la figura 7. Cada rectángulo tiene un ancho de $1/n$ y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \dots, n/n$; es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \dots, (n/n)^2$. De este modo,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

En este punto necesita la fórmula para la suma de los cuadrados de los n primeros enteros positivos:

$$\boxed{1} \qquad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Es posible que ya haya visto esta fórmula. Se prueba en el ejemplo 5 del apéndice E.

Al agregar la fórmula 1 a la expresión para R_n, obtiene

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

De modo que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{6}\cdot 1 \cdot 2 = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$ □

En este caso se calcula el límite de la sucesión $\{R_n\}$. En *Presentación preliminar del cálculo* se analizaron las sucesiones y en el capítulo 11 se estudian con detalle. Sus límites se calculan de la misma manera que los límites en el infinito (sección 2.6). En particular, sabe que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Se puede demostrar que las sumas inferiores de aproximación también tienden a $\frac{1}{3}$; es decir,

$$\lim_{n \to \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

Con base en las figuras 8 y 9 parece que conforme n crece, tanto L_n como R_n se vuelven cada vez mejores aproximaciones para el área de S. Por tanto, se *define* el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación; esto es,

TEC En Visual 5.1 puede crear figuras como la 8 y 9 para otros valores de n.

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} L_n = \frac{1}{3}$$

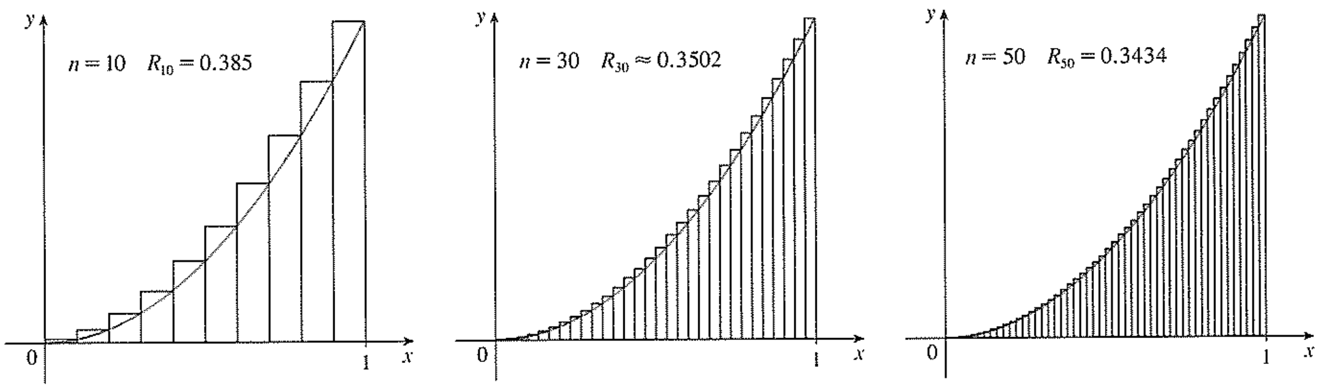


FIGURA 8

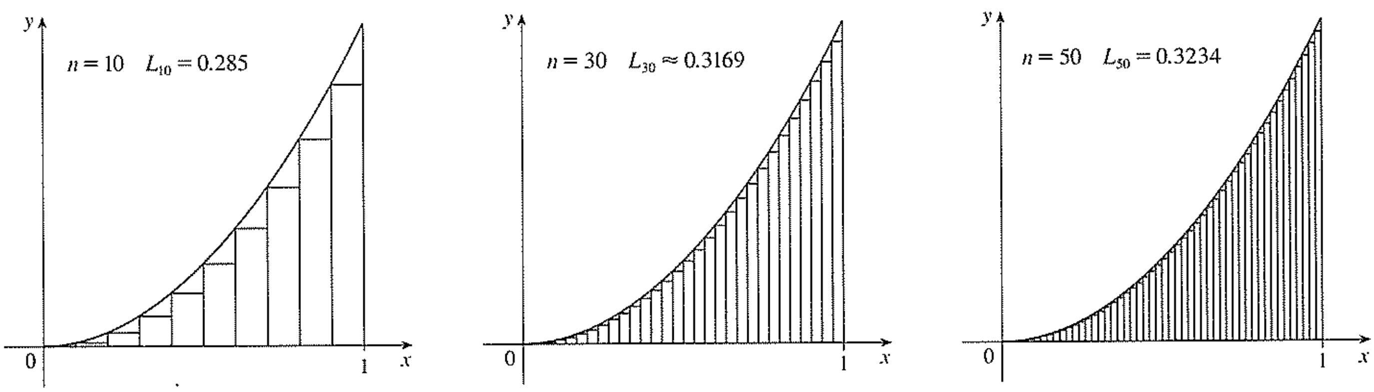


FIGURA 9

El área es aquel número que es menor que todas las sumas superiores y mayor que todas las sumas inferiores

Aplique la idea de los ejemplos 1 y 2 a la región más general S de la figura 1. Empiece por subdividir S en n franjas $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de anchos iguales, como en la figura 10.

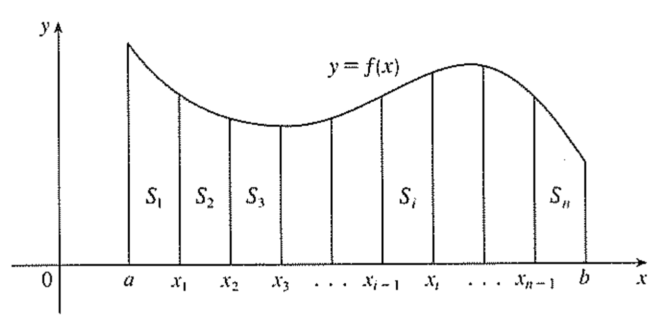


FIGURA 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, de modo que el ancho de cada una de las n franjas es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Estas franjas dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos extremos de la derecha de los subintervalos son

$$\begin{aligned} x_1 &= a + \Delta x, \\ x_2 &= a + 2\,\Delta x, \\ x_3 &= a + 3\,\Delta x, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Obtenga una aproximación de la i-ésima franja, S_i, con un rectángulo con ancho Δx y altura $f(x_i)$, que es el valor de f en el punto extremo de la derecha (véase la figura 11). Después, el área del i-ésimo rectángulo es $f(x_i)\,\Delta x$. Lo que concebió de manera intuitiva como el área de S que se aproxima con la suma de las áreas de estos rectángulos, la cual es:

$$R_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

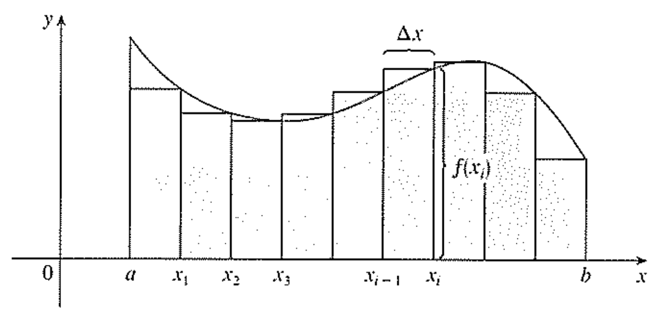
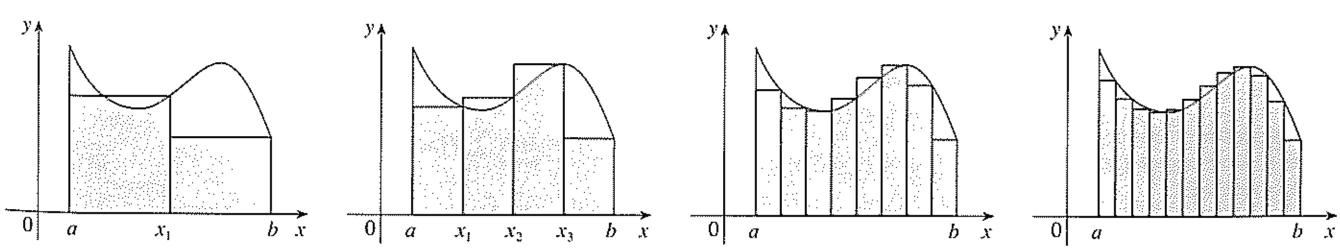


FIGURA 11

En la figura 12 se muestra esta aproximación para $n = 2$, 4, 8 y 12. Advierta que esta aproximación parece mejorarse a medida que se incrementa la cantidad de franjas; es decir, cuando $n \to \infty$. Por consiguiente, se define el área A de la región S de la manera siguiente:



(a) $n = 2$ (b) $n = 4$ (c) $n = 8$ (d) $n = 12$

FIGURA 12

[2] **DEFINICIÓN** El **área** A de la región S que se encuentra debajo de la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x]$$

Se puede probar que el límite de la definición 2 siempre existe, porque se supone que f es continua. También es posible demostrar que se obtiene el mismo valor con los puntos extremos de la izquierda:

$$\boxed{3} \qquad A = \lim_{n \to \infty} L_n = \lim_{n \to \infty} [f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + \cdots + f(x_{n-1})\,\Delta x]$$

De hecho, en lugar de usar los puntos extremos de la izquierda o los de la derecha, podría tomar la altura del i-ésimo rectángulo como el valor de f en *cualquier* número x_i^* en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A estos números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ se les llaman **puntos muestras**. En la figura 13 se presentan los rectángulos de aproximación cuando se eligen puntos muestras diferentes de los puntos extremos. De suerte que una expresión más general para el área de S es

$$\boxed{4} \qquad A = \lim_{n \to \infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

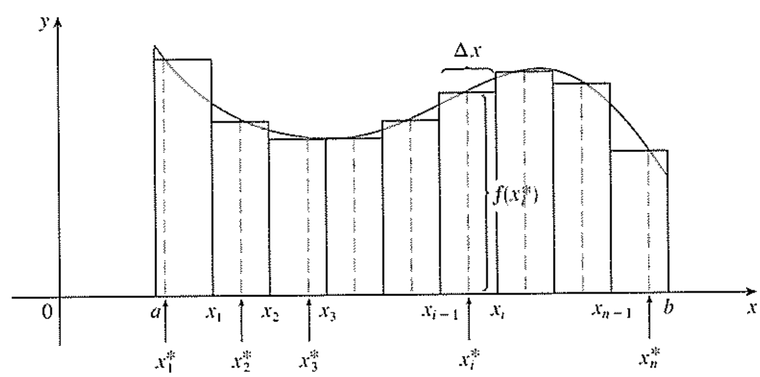


FIGURA 13

Esto indica que termine con $i = n$.

Esto indica que hay que sumar. $\sum_{i=m}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Esto indica que hay que emprezar con $i = m$.

A menudo se usa la **notación sigma** para escribir de manera más compacta las sumas con muchos términos. Por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

Con lo cual las expresiones para el área, que se dan en las ecuaciones 2, 3 y 4, se pueden escribir como:

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x$$

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

■ Si necesita practicar la notación sigma vea los ejemplos e intente resolver algunos de los ejemplos del apéndice E.

También podría volver a escribir la fórmula 1 de esta manera:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EJEMPLO 3 Sea A el área de la región que está debajo de la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 0$ y $x = 2$.

(a) Con los puntos extremos de la derecha, encuentre una expresión para A como un límite. No evalúe ese límite.

(b) Estime el área al tomar los puntos muestras como los puntos medios y con cuatro subintervalos; luego con diez subintervalos.

SOLUCIÓN

(a) Como $a = 0$ y $b = 2$, el ancho de un subintervalo es

$$\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$$

Por lo tanto, $x_1 = 2/n$, $x_2 = 4/n$, $x_3 = 6/n$, $x_i = 2i/n$ y $x_n = 2n/n$. La suma de las áreas de los rectángulos de aproximación es

$$\begin{aligned} R_n &= f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x \\ &= e^{-x_1}\,\Delta x + e^{-x_2}\,\Delta x + \cdots + e^{-x_n}\,\Delta x \\ &= e^{-2/n}\left(\frac{2}{n}\right) + e^{-4/n}\left(\frac{2}{n}\right) + \cdots + e^{-2n/n}\left(\frac{2}{n}\right) \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición 2, el área es

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\left(e^{-2/n} + e^{-4/n} + e^{-6/n} + \cdots + e^{-2n/n}\right)$$

Si se usa la notación sigma, se podría escribir

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{-2i/n}$$

Es difícil evaluar este límite directamente a mano, no así con la ayuda de un sistema algebraico para computadora (véase el ejercicio 24). En la sección 5.3 halla A con más facilidad, aplicando un método diferente.

(b) Con $n = 4$, los subintervalos de ancho igual, $\Delta x = 0.5$, son $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Los puntos medios de estos subintervalos son $x_1^* = 0.25$, $x_2^* = 0.75$, $x_3^* = 1.25$ y $x_4^* = 1.75$, y la suma de las áreas de los cuatro rectángulos de aproximación (véase la figura 14) es

$$\begin{aligned} M_4 &= \sum_{i=1}^{4} f(x_i^*)\,\Delta x \\ &= f(0.25)\,\Delta x + f(0.75)\,\Delta x + f(1.25)\,\Delta x + f(1.75)\,\Delta x \\ &= e^{-0.25}(0.5) + e^{-0.75}(0.5) + e^{-1.25}(0.5) + e^{-1.75}(0.5) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(e^{-0.25} + e^{-0.75} + e^{-1.25} + e^{-1.75}\right) \approx 0.8557 \end{aligned}$$

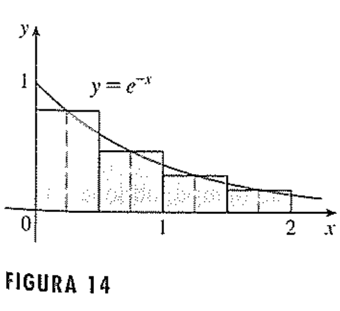


FIGURA 14

De este modo, una estimación para el área es

$$A \approx 0.8557$$

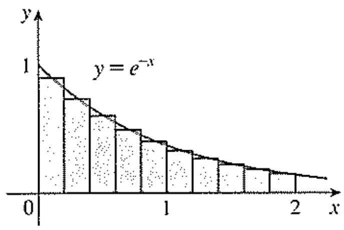


FIGURA 15

Con $n = 10$, los subintervalos son $[0, 0.2]$, $[0.2, 0.4]$, . . . , $[1.8, 2]$ y los puntos medios son $x_1^* = 0.1, x_2^* = 0.3, x_3^* = 0.5, \ldots, x_{10}^* = 1.9$. Por consiguiente,

$$A \approx M_{10} = f(0.1)\,\Delta x + f(0.3)\,\Delta x + f(0.5)\,\Delta x + \cdots + f(1.9)\,\Delta x$$

$$= 0.2(e^{-0.1} + e^{-0.3} + e^{-0.5} + \cdots + e^{-1.9}) \approx 0.8632$$

Con base en la figura 15, parece que esta estimación es mejor que la que se hizo con $n = 4$. □

EL PROBLEMA DE LA DISTANCIA

Considere ahora el *problema de la distancia:* hallar la distancia recorrida por un objeto durante cierto periodo, si se conoce la velocidad del objeto en todos los momentos. (En cierto sentido, éste es el problema inverso del que se analizó en la sección 2.1.) Si la velocidad permanece constante, entonces el problema de la distancia es fácil de resolver por medio de la fórmula:

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

Pero si la velocidad varía, no es fácil hallar la distancia recorrida. Investigue el problema en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Suponga que el odómetro del automóvil está averiado y que desea estimar la distancia que ha recorrido en 30 segundos. Las lecturas del velocímetro cada cinco segundos están registradas en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (mi/h)	17	21	24	29	32	31	28

Para tener el tiempo y la velocidad en unidades coherentes, convierta las lecturas de velocidad a pies por segundo (1 mi/h = 5 280/3 600 pies/s):

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30
Velocidad (pies/s)	25	31	35	43	47	46	41

Durante los primeros cinco segundos, la velocidad no cambia mucho, de modo que puede estimar la distancia recorrida durante ese tiempo al suponer que la velocidad es constante. Si la considera igual a la velocidad inicial (25 pies/s), por lo tanto obtiene la distancia aproximada recorrida durante los primeros cinco segundos:

$$25 \text{ pies/s} \times 5 \text{ s} = 125 \text{ pies}$$

De manera análoga, durante el segundo intervalo, la velocidad es aproximadamente constante y se toma como la velocidad correspondiente a $t = 5$ s. De modo que la estimación para la distancia recorrida desde $t = 5$ s hasta $t = 10$ s es

$$31 \text{ pies/s} \times 5 \text{ s} = 155 \text{ pies}$$

Si suma las estimaciones semejantes para los otros intervalos de tiempo, obtiene una estimación para la distancia total recorrida:

$$(25 \times 5) + (31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) = 1\,135 \text{ pies}$$

Con igual propiedad podría haber usado la velocidad correspondiente al *final* de cada periodo, en lugar de la velocidad al principio de los mismos, como la supuesta velocidad constante. En tal caso las estimaciones quedarían

$$(31 \times 5) + (35 \times 5) + (43 \times 5) + (47 \times 5) + (46 \times 5) + (41 \times 5) = 1\,215 \text{ pies}$$

Si buscara una estimación más exacta, habría tomado las lecturas de la velocidad cada dos segundos o cada segundo. □

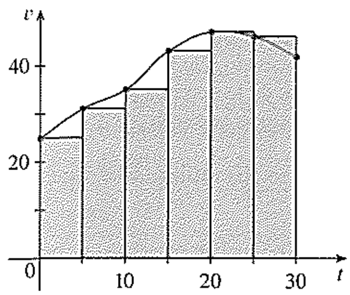


FIGURA 16

Tal vez los cálculos del ejemplo 4 le recuerden las sumas usadas al principio para estimar las áreas. La semejanza se explica cuando dibuja una gráfica de la función de velocidad del automóvil de la figura 16 y dibuja ractángulos cuyas alturas son las velocidaes iniciales de cada intervalo. El área del primer rectángulo es $25 \times 5 = 125$, lo que también es su estimación de la distancia recorrida en los primeros cinco segundos. De hecho, el área de cada rectángulo se puede interpretar como una distancia, porque la altura representa velocidad y el ancho al tiempo. La suma de las áreas de los rectángulos de la figura 16 es $L_6 = 1\,135$, lo cual es la estimación inicial de la distancia total recorrida.

En general, suponga que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$, en donde $a \leqslant t \leqslant b$ y $f(t) \geqslant 0$ (de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Tome las lecturas de la velocidad en los instantes $t_0\ (= a), t_1, t_2, \dots, t_n\ (= b)$, de forma que la velocidad sea aproximadamente constante en cada subintervalo. Si estos instantes están igualmente espaciados, después el tiempo entre lecturas consecutivas es $\Delta t = (b - a)/n$. Durante el primer intervalo, la velocidad es más o menos $f(t_0)$ y, por consiguiente, la distancia recorrida es alrededor de $f(t_0)\,\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo es alrededor de $f(t_1)\,\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es poco más o menos

$$f(t_0)\,\Delta t + f(t_1)\,\Delta t + \cdots + f(t_{n-1})\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t$$

Si usa la velocidad en los puntos extremos de la derecha, en lugar de los puntos extremos de la izquierda, su estimación para la distancia total se convierte en

$$f(t_1)\,\Delta t + f(t_2)\,\Delta t + \cdots + f(t_n)\,\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

Entre mayor sea la frecuencia con que se mide la velocidad, más exactas se vuelven las estimaciones, de modo que parece plausible que la distancia *exacta d* recorrida sea el *límite* de esas expresiones:

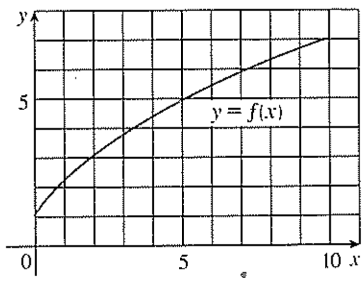
$$\boxed{5} \qquad d = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\,\Delta t = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,\Delta t$$

En la sección 5.4 verá que, en efecto, esto es verdadero.

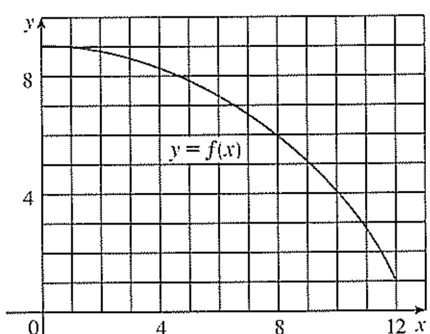
En virtud de que la ecuación 5 tiene la misma forma que las expresiones para el área, dadas en las ecuaciones 2 y 3, se concluye que la distancia recorrida es igual al área debajo de la gráfica de la función de velocidad. En los capítulos 6 y 8 verá que otras cantidades de interés en las ciencias naturales y sociales como el trabajo realizado por una fuerza variable o el gasto cardiaco también pueden interpretarse como el área debajo de la curva. De modo que cuando calcule áreas en este capítulo, tenga presente que pueden interpretarse de diversas maneras prácticas.

5.1 EJERCICIOS

1. (a) Lea los valores a partir de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una superior para el área debajo de esa gráfica dada de f, desde $x = 0$ hasta $x = 10$. En cada caso, dibuje los rectángulos que use.
(b) Encuentre nuevas estimaciones usando diez rectángulos en cada caso.



2. (a) Use seis rectángulos para encontrar estimaciones de cada tipo para el área debajo de la gráfica de f desde $x = 0$ hasta $x = 12$.
(i) L_6 (los puntos muestras son los puntos extremos de la izquierda)
(ii) R_6 (los puntos muestras son los puntos extremos de la derecha)
(iii) M_6 (los puntos muestras son los puntos medios)
(b) ¿L_6 sobreestima o subestima el área verdadera?
(c) ¿R_6 sobreestima o subestima el área verdadera?
(d) ¿Cuál de los números L_6, R_6 o M_6 da la mejor estimación? Explique la respuesta.



3. (a) Estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \cos x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi/2$, usando cuatro rectángulos de aproximación y los puntos extremos de la derecha. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación. ¿Su estimación es una subestimación o una sobrestimación?
(b) Repita el inciso (a), con los puntos extremos de la izquierda.

4. (a) Estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$ usando cuatro rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Trace la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una sobrestimación o una subestimación?
(b) Repita el inciso (a) con los puntos extremos de la izquierda.

5. (a) Estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ hasta $x = 2$ con tres rectángulos de aproximación y puntos extremos de la derecha. Enseguida mejore su estimación usando seis rectángulos. Dibuje la curva y los rectángulos de aproximación.
(b) Repita el inciso (a) usando los puntos extremos de la izquierda.
(c) Repita el inciso (a) usando los puntos medios.
(d) Con base en sus dibujos de los incisos (a) a (c), ¿cuál parece ser la mejor estimación?

6. (a) Trace la gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$, $-2 \leq x \leq 2$.
(b) Estime el área debajo de la gráfica de f con cuatro rectángulos de aproximación y considerando que los puntos muestras son (i) los puntos extremos de la derecha y (ii) los puntos medios. En cada caso, trace la curva y los rectángulos.
(c) Mejore sus estimados del inciso (b) utilizando 8 rectángulos.

7–8 Con una calculadora programable (o una computadora) es posible evaluar las expresiones para las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, incluso para valores grandes de n, con el uso de lazos. (En una TI, use el comando Is> o un rizo *For-EndFor*, en una Casio, use Isz, en una HP o en BASIC, use un lazo FOR-NEXT.) Calcule la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación; use subintervalos iguales y los puntos extremos de la derecha, para $n = 10, 30, 50$ y 100. Luego, infiera el valor del área exacta.

7. La región debajo de $y = \operatorname{sen} x^4$ desde 0 hasta 1.

8. La región debajo de $y = \cos x$ desde 1 hasta $\pi/2$.

CAS **9.** Algunos sistemas algebraicos para computadora tienen comandos que dibujan los rectángulos de aproximación y evalúan las sumas de sus áreas, por lo menos si x_i^* es un punto extremo de la izquierda o de la derecha. (Por ejemplo, en Maple, use `leftbox`, `rightbox`, `leftsum`, y `rightsum`.)
(a) Si $f(x) = 1/(x^2 + 1)$, $0 \leq x \leq 1$, encuentre las sumas izquierda y derecha para $n = 10, 30$ y 50.
(b) Ilustre mediante el trazado de las gráficas de los rectángulos del inciso (a).
(c) Demuestre que el área exacta debajo de f se encuentra entre 0.780 y 0.791

CAS **10.** (a) Si $f(x) = \ln x$, $0.791 \leq x \leq 4$, use los comandos que se analizaron en el ejercicio 9 con el fin de hallar las sumas izquierda y derecha, para $n = 10, 30$ y 50.
(b) Ilustre trazando las gráficas de los rectángulos del inciso (a).
(c) Demuestre que el área exacta debajo de f se encuentra entre 2.50 y 2.59.

11. La rapidez de una competidora aumentó de manera constante durante los tres primeros segundos de una carrera. En la tabla se da su rapidez a intervalos de medio segundo. Encuentre las estimaciones inferior y superior para la distancia que recorrió durante estos tres segundos.

t (s)	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
v (pies/s)	0	6.2	10.8	14.9	18.1	19.4	20.2

12. En la tablá se proporcionan las lecturas del velocímetro de una motocicleta a intervalos de 12 segundos.

(a) Estime la distancia recorrida por la motocicleta durante este periodo usando las velocidades al principio de los intervalos.

(b) Dé otra estimación usando las velocidaddes al final de los periodos.

(c) ¿Sus estimaciones de los incisos (a) y (b) son estimaciones superiores e inferiores? Explique su respuesta.

t (s)	0	12	24	36	48	60
v (pies/s)	30	28	25	22	24	27

13. Se fugó aceite de un tanque en una cantidad de $r(t)$ litros por hora. La proporción disminuyó conforme transcurrió el tiempo y los valores de la cantidad en intervalos de dos horas se muestran en la tabla. Halle estimaciones inferiores y superiores para la cantidad total de aceite que se fugó.

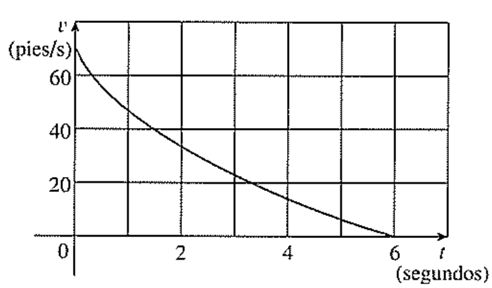
t (h)	0	2	4	6	8	10
$r(t)$ (l/h)	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

14. Cuando estima distancias a partir de datos de la velocidad, a veces es necesario usar instantes $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$, que no están igualmente espaciados. Aún así, puede estimar las distancias usando los periodos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Por ejemplo, el 7 de mayo de 1992, el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad era instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla, proporcionada por la NASA, se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

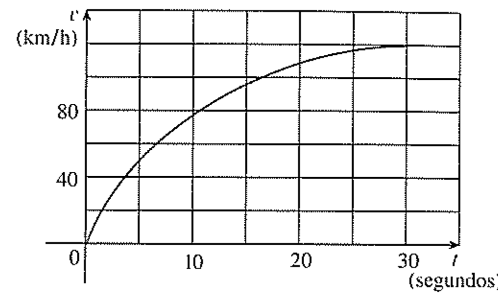
Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro	10	185
Fin de la maniobra de giro	15	319
Válvula de estrangulación al 89%	20	447
Válvula de estrangulación al 67%	32	742
Válvula de estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4151

Utilice estos datos con objeto de estimar la altura por arriba de la superficie de la Tierra a la que se encontró el *Endeavour*, 62 segundos después del lanzamiento.

15. Se muestra la gráfica de la velocidad de un automóvil al frenar. Úsela para estimar la distancia que recorre mientras se aplican los frenos.



16. Se muestra la gráfica de velocidad de un automóvil que acelera del estado de reposo hasta una velocidad de 120 km/h durante un periodo de 30 segundos. Estime la distancia recorrida durante este periodo.



17–19 Recurra a la definción 2 para hallar una expresión para el área debajo de la gráfica de f como límite. No evalúe el límite.

17. $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad 1 \leq x \leq 16$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}, \quad 3 \leq x \leq 10$

19. $f(x) = x \cos x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2$

20–21 Determine una región cuya área sea igual al límite dado. No evalúe el límite.

20. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{n}\left(5 + \frac{2i}{n}\right)^{10}$

21. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi}{4n} \tan \frac{i\pi}{4n}$

22. (a) Aplique la definición 2 para encontrar una expresión para el área debajo de la curva $y = x^3$ desde 0 hasta 1 como límite.

(b) La fórmula siguiente para la suma de los cubos de los primeros n enteros se prueba en el apéndice E. Úsela para evaluar el límite del inciso (a).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

CAS **23.** (a) Exprese el área debajo de la curva $y = x^5$ desde 0 hasta 2 como límite.

(b) Utilice un sistema algebraico para computadora a fin de encontrar la suma de su expresión del inciso (a).

(c) Evalúe el límite del inciso (a).

CAS **24.** Halle el área exacta de la región debajo de la gráfica de $y = e^{-x}$ desde 0 hasta 2 utilizando un sistema algebraico para computadora con objeto de evaluar la suma y enseguida el límite del ejemplo 3(a). Compare su respuesta con la estimación obtenida en el ejemplo 3(b).

CAS **25.** Encuentre el área exacta debajo de la curva $y = \cos x$, desde $x = 0$ hasta $x = b$, en donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$. (Use un sistema algebraico para computadora para evaluar la suma y calcular el límite.) En particular, ¿cuál es el área si $b = \pi/2$?

26. (a) Sea A_n el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo con radio r. Al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $2\pi/n$, demuestre que

$$A_n = \tfrac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right).$$

(b) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi r^2$. [*Sugerencia:* use la ecuación 2 de la sección 3.4.]

5.2 LA INTEGRAL DEFINIDA

En la sección 5.1 vio que surge un límite de la forma

$$\boxed{1} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} [f(x_1^*)\,\Delta x + f(x_2^*)\,\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\,\Delta x]$$

cuando se calcula un área. También vio que aparece cuando intenta hallar la distancia recorrida por un objeto. Resulta que este tipo de límite se presenta en una amplia variedad de situaciones, incluso cuando f no es necesariamente una función positiva. En los capítulos 6 y 8 verá que también surgen límites de la forma (1) al hallar longitudes de curvas, volúmenes de sólidos, centros de masa, la fuerza debida a la presión del agua y el trabajo, así como otras cantidades. De modo que tienen un nombre y una notación especiales.

2 DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA Si f es una función continua definida para $a \leqslant x \leqslant b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b - a)/n$. Haga que $x_0\,(= a), x_1, x_2, \ldots, x_n\,(= b)$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ como los **puntos muestras** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de *f*, desde *a* hasta *b*,** es

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

El significado exacto del límite que define a las integrales como sigue:

Para cualquier número $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x \right| < \varepsilon$$

para cualquier entero $n > N$ y para cualquier selección de x_i^* en $[x_{i-1}, x_i]$.

NOTA 1 Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama **signo de integral**. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas. En la notación $\int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ se llama **integrando**, y a y b se conocen como los **límites de integración**; a es el **límite inferior** y b es el **límite superior**. El símbolo dx no tiene significado en sí; todo $\int_a^b f(x)\,dx$ es un símbolo. La dx indica simplemente que la variable independiente es x. El procedimiento para calcular una integral se llama **integración**.

NOTA 2 La integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, es un número; que no depende de x. De hecho, podría utilizar cualquier letra en lugar de x, sin cambiar el valor de la integral:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(r)\,dr$$

NOTA 3 La suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x$$

que se presenta en la definición 2 se llama **suma de Riemann**, en honor del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866). De tal manera que la definición 2 menciona que la integral definida de una función integrable pueda aproximarse dentro de cualquier grado de exactitud mediante la suma de Riemann.

Sabe que si f es positiva, luego la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos de aproximación (véase la figura 1). Al comparar la definición 2 con la definición de área de la sección 5.1, tiene que la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede interpretar como el área debajo de la curva $y = f(x)$, desde a hasta b (véase la figura 2).

RIEMANN

Bernhard Riemann recibió su doctorado en Filosofía bajo la dirección del legendario Gauss, en la Universidad de Göttingen, y permaneció allí para enseñar. Gauss, quien no tenía el hábito de elogiar a otros matemáticos, habló de "la mente creativa, activa, en verdad matemática y la gloriosamente fértil originalidad" de Riemann. La definición (2) de integral se debe a Riemann. También hizo colaboraciones importantes a la teoría de funciones de una variable compleja, a la fisicomatemática, a la teoría de números y a los fundamentos de la geometría. El amplio concepto de Riemann del espacio y de la geometría resultó ser, 50 años más tarde, el apoyo correcto para la teoría general de la relatividad de Einstein. La salud de Riemann fue mala durante toda su vida y murió de tuberculosis a los 39 años.

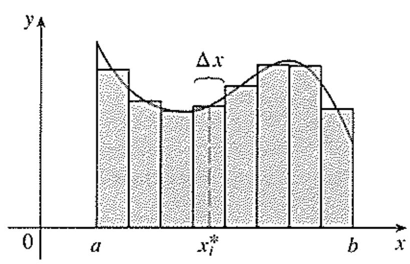


FIGURA 1
Si $f(x) \geqslant 0$, la suma de Riemann $\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ es la suma de las áreas de los rectángulos

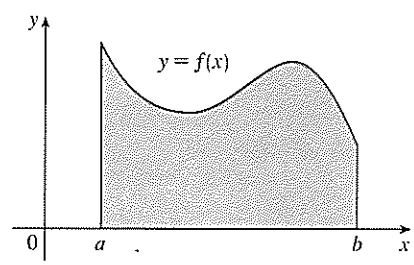


FIGURA 2
Si $f(x) \geqslant 0$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ es el área debajo de la curva $y = f(x)$ desde a hasta b

Si f toma valores tanto positivos como negativos, como en la figura 3, después la suma de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos que se encuentran arriba del eje x y las *negativas* de las áreas de los rectángulos que están debajo del eje x (las áreas de los rectángulos en oro *menos* las áreas de los rectángulos en azul). Cuando toma el límite de esas sumas de Riemann, obtiene la situación que se ilustra en la figura 4. Una integral definida puede interpretarse como un área neta, es decir, una diferencia de áreas:

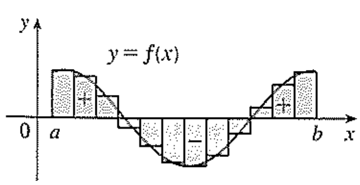


FIGURA 3
$\sum f(x_i^*)\,\Delta x$ es una aproximación al área neta

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2$$

donde A_1 es el área de la región arriba del eje x y debajo de la gráfica de f y A_2 corresponde a la región debajo del eje x y arriba de la gráfica de f.

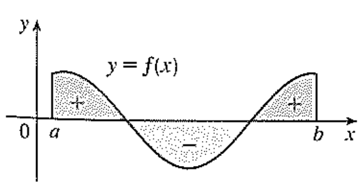


FIGURA 4
$\int_a^b f(x)\,dx$ es el área neta

NOTA 4 Aunque ha definido $\int_a^b f(x)\,dx$ dividiendo $[a, b]$ en subintervalos del mismo ancho, hay situaciones en las que resulta ventajoso trabajar con intervalos de ancho desigual. Por ejemplo, en el ejercicio 14 de la sección 5.1, la NASA proporcionó datos de velocidad en tiempos que no estaban igualmente espaciados, pero aun así fue capaz de estimar la distancia recorrida. Y existen métodos parà la integración numérica que aprovechan los subintervalos desiguales.

Si los anchos del subintervalo son $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, debe asegurarse de que todos estos anchos tiendan a 0 en el proceso de detrerminación de límites. Esto sucede si el ancho más grande, máx Δx_i tiende a 0. De manera que en este caso la definición de una integral definida se convierte en

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\text{máx}\,\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i$$

NOTA 5 Ha definido la integral definida para una función integrable, pero no todas las funciones son ntegrables (véase ejercicios 67-68). El teorema que sigue muestra que la mayor parte de las funciones que usualmente acontecen en realidad son integrables. Esto se comprueba en cursos más avanzados.

3 TEOREMA Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene únicamente un número finito de saltos discontinuos, en tal caso f es integrable en $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Si f es integrable en $[a, b]$, después el límite en la definición 2 existe y proporciona el mismo valor, no importa cómo seleccione el punto muestra x_i^*. Para simplificar los cálculos de la integral con frecuencia tomamos los puntos muestra los extremos de la derecha. Por lo tanto $x_i^* = x_i$ y la definición de una integral se simplifica como sigue.

4 TEOREMA Si f es integrable en $[a, b]$, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

donde $\qquad \Delta x = \dfrac{b-a}{n} \qquad$ y $\qquad x_i = a + i\,\Delta x$

EJEMPLO 1 Exprese

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x$$

como una integral en el intervalo $[0, \pi]$.

SOLUCIÓN Al comparar el límite dado con el límite en el teorema 4, será idéntico si elige $f(x) = x^3 + x \operatorname{sen} x$. Puesto que $a = 0$ y $b = \pi$. Por consiguiente, mediante el teorema 4

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (x_i^3 + x_i \operatorname{sen} x_i)\,\Delta x = \int_0^\pi (x^3 + x \operatorname{sen} x)\,dx$$ □

Más adelante, cuando aplique la integral definida a situaciones físicas, será importante reconocer los límites de sumas como integrales, como en el ejemplo 1. Cuando Leibniz eligió la notación para una integral, escogió los ingredientes para recordar el proceso de tomar el límite. En general, cuando escribe

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

reemplaza lím Σ con $\int$, x_i^* con x y Δx con dx.

EVALUACIÓN DE INTEGRALES

Cuando aplica la definición para evaluar una integral definida, necesita saber cómo trabajar con sumas. Las tres ecuaciones siguientes dan las fórmulas para las sumas de potencias de enteros positivos. Es posible que conozca la ecuación 5 desde un curso de álgebra. Las ecuaciones 6 y 7 se analizaron en la sección 5.1 y se prueban en el apéndice E.

$$\boxed{5} \qquad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\boxed{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{7} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Las fórmulas restantes son reglas sencillas para trabajar con la notación sigma:

$$\boxed{8} \qquad \sum_{i=1}^{n} c = nc$$

$$\boxed{9} \qquad \sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\boxed{10} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\boxed{11} \qquad \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Las fórmulas 8 a 11 se prueban escribiendo cada uno de los miembros en forma desarrollada. El lado izquierdo de la ecuación 9 es

$$ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n$$

El lado derecho es

$$c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Por la propiedad distributiva, éstas son iguales. Las otras fórmulas se analizan en el apéndice E.

EJEMPLO 2

(a) Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = x^3 - 6x$, tomando los puntos muestras de los puntos extremos de la derecha y $a = 0$, $b = 3$ y $n = 6$.

(b) Evalúe $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN

(a) Con $n = 6$ el ancho del intervalo es

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

y los puntos extremos de la derecha son $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1.0$, $x_3 = 1.5$, $x_4 = 2.0$, $x_5 = 2.5$ y $x_6 = 3.0$. De modo que la suma de Riemann es

$$\begin{aligned} R_6 &= \sum_{i=1}^{6} f(x_i)\,\Delta x \\ &= f(0.5)\,\Delta x + f(1.0)\,\Delta x + f(1.5)\,\Delta x + f(2.0)\,\Delta x + f(2.5)\,\Delta x + f(3.0)\,\Delta x \\ &= \tfrac{1}{2}(-2.875 - 5 - 5.625 - 4 + 0.625 + 9) \\ &= -3.9375 \end{aligned}$$

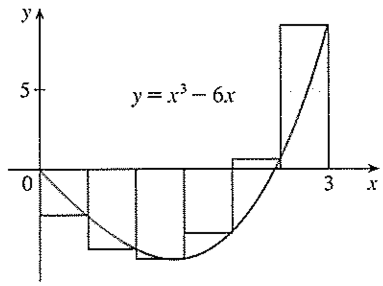


FIGURA 5

Advierta que f no es una función positiva, por lo que la suma de Riemann no representa una suma de áreas de rectángulos. Pero sí representa la suma de las áreas de los rectángulos de color oro (que están arriba del eje x) menos la suma de las áreas de los rectángulos de color azul (que están abajo del eje x) de la figura 5.

(b) Con n subintervalos, tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$

Por consiguiente, $x_0 = 0$, $x_1 = 3/n$, $x_2 = 6/n$, $x_3 = 9/n$, y, en general, $x_i = 3i/n$. Dado que usa los puntos extremos de la derecha, puede utilizar el teorema 4:

■ En la suma, n es una constante (diferente de i), por eso puede mover $3/n$ enfrente del signo Σ.

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{3i}{n}\right)\frac{3}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{3i}{n}\right)^3 - 6\left(\frac{3i}{n}\right)\right] \qquad \text{(La ecuación 9 con } c = 3/n\text{)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right] \qquad \text{(Ecuaciones 11 y 9)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{81}{n^4}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{54}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}\right\} \qquad \text{(Ecuaciones 7 y 5)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{81}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 - 27\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4} = -6.75$$

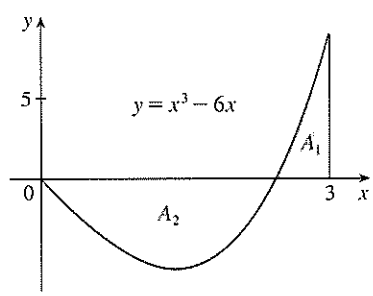


FIGURA 6
$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = A_1 - A_2 = -6.75$

Esta integral no se puede interpretar como un área porque f toma tanto valores positivos como negativos; pero puede interpretarse como la diferencia de áreas $A_1 - A_2$, donde A_1 y A_2 se muestran en la figura 6.

En la figura 7 se ilustra el cálculo al mostrar los términos positivos y negativos en la suma de Riemann R_n de la derecha, para $n = 40$. Los valores que aparecen en la tabla hacen ver que las sumas de Riemann tienden al valor exacto de la integral, -6.75, cuando $n \to \infty$.

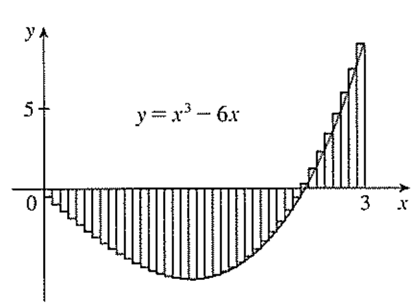


FIGURA 7
$R_{40} \approx -6.3998$

n	R_n
40	-6.3998
100	-6.6130
500	-6.7229
1000	-6.7365
5000	-6.7473

□

Ahora un método mucho más sencillo para evaluar la integral del ejemplo 2.

■ Como $f(x) = e^x$ es positiva, la integral del ejemplo 3 representa el área que se muestra en la figura 8.

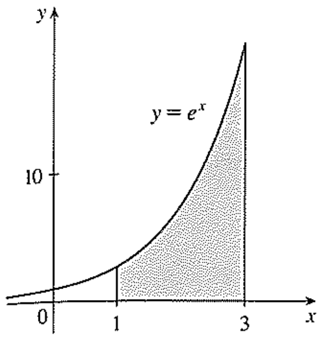


FIGURA 8

EJEMPLO 3

(a) Plantee una expresión para $\int_1^3 e^x\,dx$ como un límite de sumas.

(b) Use un sistema algebraico por computadora para evaluar la expresión.

SOLUCIÓN

(a) En este caso, tiene $f(x) = e^x$, $a = 1$, $b = 3$, y

$$\Delta x = \frac{b - a}{n} = \frac{2}{n}$$

De modo que $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 2/n$, $x_2 = 1 + 4/n$, $x_3 = 1 + 6/n$, y

$$x_i = 1 + \frac{2i}{n}$$

A partir del teorema 4, obtiene

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(1 + \frac{2i}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n}$$

(b) Si le pide a un sistema algebraico para computadora que evalúe la suma y simplifique, obtiene

■ Un sistema algebraico por computadora es capaz de hallar una expresión explícita para esta suma porque es una serie geométrica. El límite podría encontrarse usando la regla de l'Hospital.

$$\sum_{i=1}^{n} e^{1+2i/n} = \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1}$$

Ahora le pide al sistema algebraico por computadora que evalúe el límite:

$$\int_1^3 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \cdot \frac{e^{(3n+2)/n} - e^{(n+2)/n}}{e^{2/n} - 1} = e^3 - e$$

En la siguiente sección se estudia un método más sencillo para la evolución de integrales. □

EJEMPLO 4 Evalúe las integrales siguientes interpretando cada una en términos de áreas.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$ (b) $\int_0^3 (x - 1)\,dx$

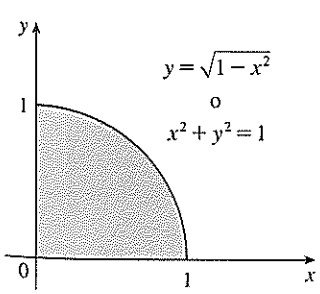


FIGURA 9

SOLUCIÓN

(a) Dado que $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$, puede interpretar esta integral como el área debajo de la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ desde 0 hasta 1. Pero, como $y^2 = 1 - x^2$, obtiene $x^2 + y^2 = 1$, lo cual muestra que la gráfica de f es el cuarto de círculo, con radio de 1, que aparece en la figura 9. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}\pi(1)^2 = \frac{\pi}{4}$$

(En la sección 7.3 usted será capaz de *demostrar* que el área de un círculo con radio r es πr^2.)

(b) La gráfica de $y = x - 1$ es la recta con pendiente 1 que se presenta en la figura 10. Calcule la integral como la diferencia de las áreas de los dos triángulos:

$$\int_0^3 (x-1)\,dx = A_1 - A_2 = \tfrac{1}{2}(2\cdot 2) - \tfrac{1}{2}(1\cdot 1) = 1.5$$

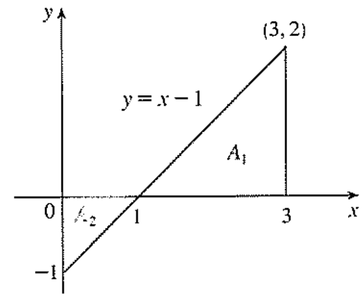


FIGURA 10

□

LA REGLA DEL PUNTO MEDIO

A menudo se elige el punto muestra x_i^* como el extremo de la derecha del i-ésimo intervalo como el punto muestra porque resulta conveniente para calcular el límite. Pero si la finalidad es hallar una *aproximación* para una integral, conviene escoger x_i^* como el punto medio del intervalo, el cual se denota con $\bar{x}_i$. Cualquier suma de Riemann es una aproximación a una integral, pero si usa los puntos medios, obtiene la aproximación siguiente:

TEC En Module 5.2/7.7 se muestra cómo la regla del punto medio mejora cuando n se incrementa.

REGLA DEL PUNTO MEDIO

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x = \Delta x\,[f(\bar{x}_1) + \cdots + f(\bar{x}_n)]$$

donde $\quad \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

y $\quad \bar{x}_i = \tfrac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) =$ punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

EJEMPLO 5 Use la regla del punto medio con $n = 5$ para hallar una aproximación de $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Los puntos extremos de los cinco subintervalos son 1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8 y 2.0. de modo que los puntos medios son 1.1, 1.3, 1.5, 1.7 y 1.9. El ancho de los subintervalos es $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$, de suerte que la regla del punto medio da

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \Delta x\,[f(1.1) + f(1.3) + f(1.5) + f(1.7) + f(1.9)]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.7} + \frac{1}{1.9}\right)$$

$$\approx 0.691908$$

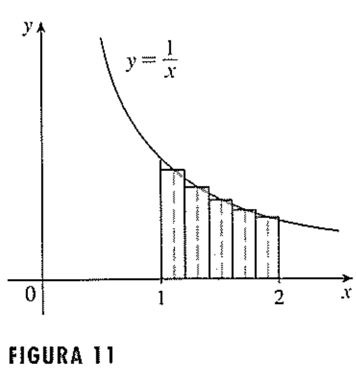


FIGURA 11

Puesto que $f(x) = 1/x > 0$, para $1 \leqslant x \leqslant 2$, la integral representa un área y la aproximación dada por la regla del punto medio es la suma de las áreas de los rectángulos que se muestran en la figura 11. □

Hasta el momento no sabe qué tan exacta es la aproximación del ejemplo 5; pero en la sección 7.7 aprenderá un método para estimar el error relacionado con el uso de la regla del punto medio. En ese momento, se exponen otros métodos para hallar aproximaciones de integrales definidas.

Si aplica la regla del punto medio a la integral del ejemplo 2, obtiene la imagen que aparece en la figura 12. La aproximación $M_{40} \approx -6.7563$ está mucho más cerca del valor verdadero de -6.75 que la aproximación con el punto extremo de la derecha, $R_{40} \approx -6.3998$, que se muestra en la figura 7.

TEC En Visual 5.2 puede comparar las aproximaciones, izquierda, derecha y del punto medio para la integral del ejemplo 2 para diferentes valores de n.

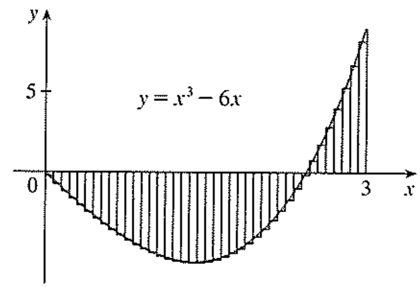


FIGURA 12
$M_{40} \approx -6.7563$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Cuando se definió la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, de manera implícita se hizo la suposición de que $a < b$. Pero la definición como un límite de la suma de Riemann tiene sentido aun cuando $a > b$. Advierta que si invierte a y b, en tal caso Δx cambia de $(b - a)/n$ a $(a - b)/n$. En consecuencia

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

Si $a = b$, luego $\Delta x = 0$ y así

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

Ahora aparecen algunas propiedades básicas de las integrales que le ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad. Suponga que f y g son funciones continuas.

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL

1. $\int_a^b c\,dx = c(b - a)$, donde c es cualquier constante
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
3. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, donde c es cualquier constante
4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

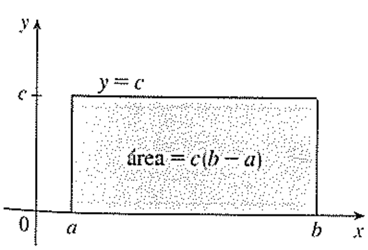


FIGURA 13
$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$

En la propiedad 1 se expresa que la integral de una función constante $f(x) = c$ es la constante multiplicada por la longitud del intervalo. Si $c > 0$ y $a < b$, esto es de esperarse porque $c(b - a)$ es el área del rectángulo de la figura 13.

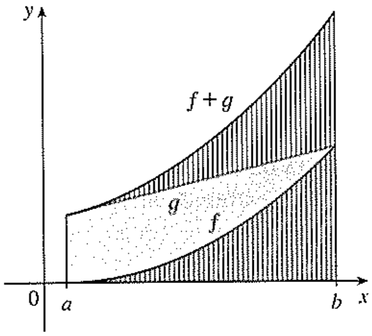


FIGURA 14

$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx =$
$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

En la propiedad 2 se afirma que la integral de una suma es la suma de las integrales. Para funciones positivas, esto quiere decir que el área debajo de $f + g$ es el área debajo de f más el área debajo de g. La figura 14 ayuda a comprender por qué esto es cierto: en vista de la manera en que funciona la adición gráfica, los segmentos rectilíneos verticales correspondientes tienen alturas iguales.

En general, la propiedad 2 se deduce del teorema 4 y del hecho de que el límite de una suma es la suma de los límites:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) + g(x_i)]\,\Delta x \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\,\Delta x \\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

▪ La propiedad 3 parece intuitivamente razonable porque si se multiplica una función por un número positivo c, su gráfica se alarga o contrae en el sentido vertical un factor de c. De modo que alarga o contrae cada rectángulo de aproximación un factor de c y, por consecuencia, tiene el efecto de multiplicar el área por c.

La propiedad 3 se puede probar de manera semejante y en ella se expresa que la integral de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la integral de la función. En otras palabras, una constante (pero *sólo* una constante) se puede llevar hacia afuera de un signo de integral. La propiedad 4 se prueba al escribir $f - g = f + (-g)$ y aplicar las propiedades 2 y 3 con $c = -1$.

EJEMPLO 6 Use las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx$.

SOLUCIÓN Si se aplican las propiedades 2 y 3 de las integrales, se tiene

$$\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx = \int_0^1 4\,dx + \int_0^1 3x^2\,dx = \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx$$

Por la propiedad 1, sabe que

$$\int_0^1 4\,dx = 4(1 - 0) = 4$$

y, en el ejemplo 2 de la sección 5.1 encuentra que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. De igual manera,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (4 + 3x^2)\,dx &= \int_0^1 4\,dx + 3\int_0^1 x^2\,dx \\ &= 4 + 3 \cdot \tfrac{1}{3} = 5\end{aligned}$$

□

En la propiedad que sigue se dice cómo combinar las integrales de la misma función sobre intervalos adyacentes:

5. $$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

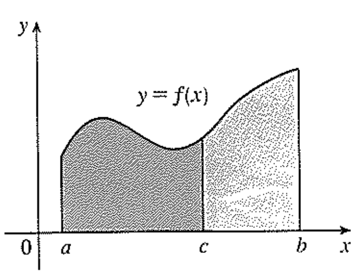


FIGURA 15

Esto no es fácil de probar en general pero, para el caso donde $f(x) \geq 0$ y $a < c < b$, se puede ver la propiedad 5 a partir de la interpretación geométrica de la figura 15: el área debajo de $y = f(x)$, desde a hasta c, más el área desde c hasta b es igual al área total desde a hasta b.

EJEMPLO 7 Si se sabe que $\int_0^{10} f(x)\,dx = 17$ y $\int_0^8 f(x)\,dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)\,dx$

SOLUCIÓN Por la propiedad 5

$$\int_0^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx$$

de modo que $\displaystyle\int_8^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^8 f(x)\,dx = 17 - 12 = 5$ □

Advierta que las propiedades 1 a 5 son verdaderas ya sea que $a < b$, $a = b$ o $a > b$. Las propiedades que se enuncian a continuación, en las que se comparan tamaños de funciones y tamaños de integrales, son verdaderas sólo si $a \leqslant b$.

PROPIEDADES DE COMPARACIÓN DE LA INTEGRAL

6. Si $f(x) \geqslant 0$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

7. Si $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

8. Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ para $a \leqslant x \leqslant b$, entonces

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$

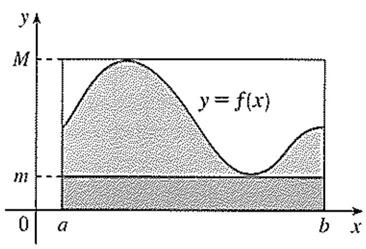


FIGURA 16

Si $f(x) \geqslant 0$, luego $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área debajo de la gráfica de f, de manera que la interpretación geométrica de la propiedad 6 es simplemente que las áreas son positivas. Pero se puede demostrar la propiedad a partir de la definición de una integral (ejercicio 64). La propiedad 7 expresa que una función más grande tiene una integral más grande. Se infiere de las propiedades 6 y 4 porque $f - g \geqslant 0$.

La propiedad 8 se ilustra mediante la figura 16 para el caso en que $f(x) \geqslant 0$. Si f es continua podría considerar m y M como los valores mínimo y máximo absolutos de f sobre el intervalo $[a, b]$. En este caso, la propiedad 8 expresa que el área debajo de la gráfica de f es mayor que el área del rectángulo con altura m y menor que el área del rectángulo con altura M.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPIEDAD 8 Puesto que $m \leqslant f(x) \leqslant M$, la propiedad 7 plantea

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx$$

Si aplica la propiedad 1 para evaluar las integrales en el primero y el segundo miembros obtiene

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a)$$ □

La propiedad 8 es útil si lo que quiere se reduce a una estimación general del tamaño de una integral sin las dificultades que representa el uso de la regla del punto medio.

EJEMPLO 8 Use la propiedad 8 para estimar $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN Debido a que $f(x) = e^{-x^2}$ es una función decreciente sobre $[0, 1]$, su valor máximo absoluto es $M = f(0) = 1$ y su valor mínimo absoluto es $m = f(1) = e^{-1}$.

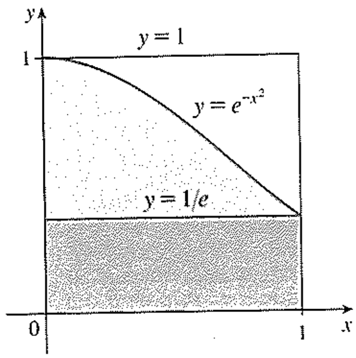


FIGURA 17

De esta manera, por la propiedad 8,

$$e^{-1}(1-0) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1(1-0)$$

o

$$e^{-1} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$

Como $e^{-1} \approx 0.3679$, puede escribir

$$0.367 \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant 1$$ □

El resultado del ejemplo 8 se ilustra en la figura 17. La integral es mayor que el área del rectángulo inferior y menor que el área del cuadrado.

5.2 EJERCICIOS

1. Evalúe la suma de Riemann para $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$, $z \leqslant x \leqslant 4$, con seis subintervalos; tome los puntos extremos de la izquierda como los puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique, qué representa la suma de Riemann.

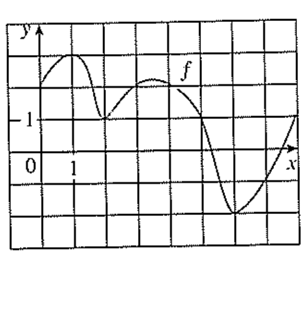
2. Si $f(x) = x^2 - 2x$, $0 \leqslant x \leqslant 3$, valore la suma de Riemann con $n = 6$ tome los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra, dé su respuesta correcta hasta seis cifras decimales. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

3. Si $f(x) = e^x - 2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, encuentre la suma de Riemann con $n = 4$ correcta hasta seis cifras decimales, considerando los puntos medios como los puntos muestra. ¿Qué representa la suma de Riemann? Ilustre con un diagrama.

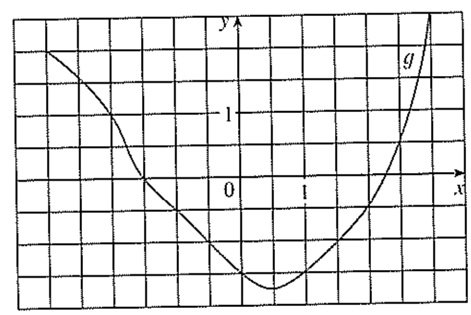
4. (a) Encuentre la suma de Riemann para $f(x) = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant 3\pi/2$, con seis términos, considerando los puntos muestra como los puntos extremos de la derecha (Dé su respuesta correcta hasta seis cifras decimales.) Explique, con ayuda de un diagrama, qué representa la suma de Riemann.

(b) Repita el inciso (a) con los puntos medios como los puntos muestra.

5. Se da la gráfica de una función. Estime $\int_0^8 f(x)\,dx$ usando cuatro subintervalos con (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios.



6. Se muestra la gráfica de g. Estime $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$ con seis subintervalos usando (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios.



7. Se muestra una tabla de valores de una función creciente f. Utilícela para hallar estimaciones inferiores y superiores para $\int_0^{25} f(x)\,dx$.

x	0	5	10	15	20	25
$f(x)$	−42	−37	−25	−6	15	36

8. En la tabla se dan los valores de una función obtenida a partir de un experimento. Con ellos estime $\int_3^9 f(x)\,dx$ usando tres subintervalos iguales con (a) los puntos extremos de la derecha, (b) los puntos extremos de la izquierda y (c) los puntos medios. Si se sabe que la función es decreciente, ¿puede decir si sus estimaciones son menores o mayores que el valor exacto de la integral?

x	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	−3.4	−2.1	−0.6	0.3	0.9	1.4	1.8

9–12 Use la regla del punto medio, con el valor dado de n, para hallar una aproximación de cada integral. Redondee cada respuesta hasta cuatro cifras decimales.

9. $\int_2^{10} \sqrt{x^3+1}\,dx,\quad n=4$ **10.** $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx,\ n=4$

11. $\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx,\quad n=5$ **12.** $\int_1^5 x^2e^{-x}\,dx,\quad n=4$

13. Si tiene un CAS que evalúe las aproximaciones con los puntos medios y trace los rectángulos correspondientes (en Maple, use los comandos de `middlesum` y `middlebox`), compruebe la respuesta para el ejercicio 11 e ilustre con una gráfica. Enseguida, repita con $n=10$ y $n=20$.

14. Con una calculadora programable o una computadora (vea las instrucciones para el ejercicio 7 de la sección 5.1), calcule las sumas de Riemann izquierda y derecha para la función $f(x)=\operatorname{sen}(x^2)$ sobre el intervalo $[0,1]$, con $n=100$. Explique por qué estas estimaciones demuestran que

$$0.306 < \int_0^1 \operatorname{sen}(x^2)\,dx < 0.315$$

Deduzca que la aproximación con el uso de la regla del punto de en medio, con $n=5$, del ejercicio 11 es exacta hasta dos cifras decimales.

15. Use una calculadora o una computadora para hacer una tabla de valores de sumas de la derecha de Riemann R_n para la integral $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx$ con $n=5$, 10, 50 y 100. ¿A qué valor parecen tender estos números?

16. Use una calculadora o una sumadora para hacer una tabla de valores de las sumas de la izquierda y de la derecha de Riemann L_n y R_n, para la integral $\int_0^2 e^{-x^2}\,dx$ con $n=5$, 10, 50 y 100. ¿Entre qué valores tiene que encontrarse el valor de la integral? ¿Puede hacer un enunciado similar para la integral $\int_{-1}^2 e^{-x^2}\,dx$? Explique su respuesta.

17–20 Exprese el límite como una integral definida sobre el intervalo dado.

17. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1+x_i^2)\,\Delta x,\quad [2,6]$

18. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos x_i}{x_i}\,\Delta x,\quad [\pi, 2\pi]$

19. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i^* + (x_i^*)^2}\,\Delta x,\quad [1,8]$

20. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [4-3(x_i^*)^2+6(x_i^*)^5]\,\Delta x,\quad [0,2]$

21–25 Use la forma de la definición de integral que se dio en el teorema 4 para evaluar la integral.

21. $\int_{-1}^5 (1+3x)\,dx$ **22.** $\int_1^4 (x^2+2x-5)\,dx$

23. $\int_0^2 (2-x^2)\,dx$ **24.** $\int_0^5 (1+2x^3)\,dx$

25. $\int_1^2 x^3\,dx$

26. (a) Halle una aproximación a la integral $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx$ usando una suma de la derecha de Riemann con puntos extremos de la derecha y $n=8$.
(b) Dibuje un diagrama como el de la figura 3 para ilustrar la aproximación del inciso (a).
(c) Aplique el teorema 4 para evaluar $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx$.
(d) Interprete la integral del inciso (c) como una diferencia de áreas e ilustre con un diagrama como el de la figura 4.

27. Demuestre que $\int_a^b x\,dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.

28. Demuestre que $\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3-a^3}{3}$.

29–30 Exprese la integral como un límite de sumas de Riemann. No evalúe el límite.

29. $\int_2^6 \frac{x}{1+x^5}\,dx$ **30.** $\int_1^{10} (x-4\ln x)\,dx$

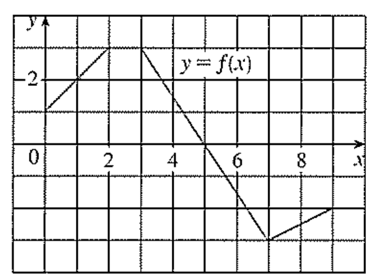
31–32 Exprese la integral como un límite de sumas. Enseguida evalúe utilizando un sistema algebraico para computadora para encontrar tanto la suma como el límite.

31. $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 5x\,dx$ **32.** $\int_2^{10} x^6\,dx$

33. Se muestra la gráfica de f. Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

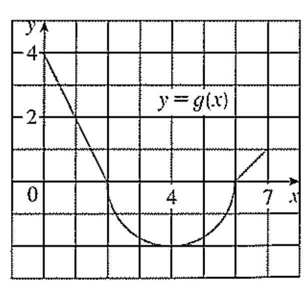
(a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ (b) $\int_0^5 f(x)\,dx$

(c) $\int_5^7 f(x)\,dx$ (d) $\int_0^9 f(x)\,dx$



34. La gráfica de g consta de dos rectas y un semicírculo. Úsela para evaluar cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



35–40 Evalúe cada integral interpretándola en términos de áreas.

35. $\int_0^3 (\frac{1}{2}x - 1)\,dx$

36. $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

37. $\int_{-3}^0 (1 + \sqrt{9 - x^2})\,dx$

38. $\int_{-1}^3 (3 - 2x)\,dx$

39. $\int_{-1}^2 |x|\,dx$

40. $\int_0^{10} |x - 5|\,dx$

41. Valorar $\int_\pi^\pi \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x\,dx$.

42. Dado que $\int_0^1 3x\sqrt{x^2 + 4}\,dx = 5\sqrt{5} - 8$, ¿cuánto es $\int_1^0 3u\sqrt{u^2 + 4}\,du$?

43. En el ejemplo 2 de la sección 5.1, demostró que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Aplique este hecho y las propiedades de las integrales para evaluar $\int_0^1 (5 - 6x^2)\,dx$.

44. Aplique las propiedades de las integrales y el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 (2e^x - 1)\,dx$.

45. Utilice el resultado del ejemplo 3 para evaluar $\int_1^3 e^{x+2}\,dx$.

46. A partir de los resultados del ejercicio 27 y del hecho de que $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$ (según el ejercicio 25 de la sección 5.1), junto con las propiedades de las integrales, evalúe $\int_0^{\pi/2} (2\cos x - 5x)\,dx$.

47. Escriba como una sola integral en la forma $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_{-2}^2 f(x)\,dx + \int_2^5 f(x)\,dx - \int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$$

48. Si $\int_1^5 f(x)\,dx = 12$ y $\int_4^5 f(x)\,dx = 3.6$, encuentre $\int_1^4 f(x)\,dx$.

49. Si $\int_0^9 f(x)\,dx = 37$ y $\int_0^9 g(x)\,dx = 16$, encuentre $\int_0^9 [2f(x) + 3g(x)]\,dx$.

50. Halle $\int_0^5 f(x)\,dx$ si

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{para } x < 3 \\ x & \text{para } x \geq 3 \end{cases}$$

51. Considere que f tiene el valor mínimo absoluto m y el valor máximo absoluto M. ¿Entre que valores se encuentra $\int_0^2 f(x)\,dx$? ¿Qué propiedad de las integrales le permite elaborar su conclusión?

52–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

52. $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x}\,dx$

53. $2 \leq \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx \leq 2\sqrt{2}$

54. $\dfrac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\,dx \leq \dfrac{\sqrt{3}\pi}{24}$

55–60 Aplique la propiedad 8 para estimar el valor de la integral.

55. $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

56. $\int_0^2 \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$

57. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan x\,dx$

58. $\int_0^2 (x^3 - 3x + 3)\,dx$

59. $\int_0^2 xe^{-x}\,dx$

60. $\int_\pi^{2\pi} (x - 2\operatorname{sen} x)\,dx$

61–62 Mediante las propiedades de las integrales, junto con los ejercicios 27 y 28, demuestre la desigualdad.

61. $\int_1^3 \sqrt{x^4 + 1}\,dx \geq \dfrac{26}{3}$

62. $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x\,dx \leq \dfrac{\pi^2}{8}$

63. Demuestre la propiedad 3 de las integrales.

64. Demuestre la propiedad 6 de las integrales.

65. Si f es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

[*Sugerencia:* $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.]

66. Utilice el resultado del ejercicio 65 para demostrar que

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} 2x\,dx\right| \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx$$

67. Sea $f(x) = 0$ si x es cualquier número racional y $f(x) = 1$ si x es cualquier número irracional. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$.

68. Sea $f(0) = 0$ y $f(x) = 1$ si $0 < x \leq 1$. Demuestre que f no es integrable en $[0, 1]$. [*Sugerencia*: demuestre que el primer término en la suma de Riemann, $f(x_i^*)\Delta x$ puede hacerse de manera arbitraria muy grande.]

69–70 Exprese el límite como una integral definida.

69. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{i^4}{n^5}$ [*Sugerencia:* considere $f(x) = x^4$.]

70. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{1 + (i/n)^2}$

71. Determine $\int_1^2 x^{-2}\,dx$. *Sugerencia:* elija x_i^* como la media geométrica de x_{i-1} y x_i (es decir, $x_i^* = \sqrt{x_{i-1}x_i}$) y use la identidad

$$\frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

FUNCIONES DE ÁREA

1. (a) Trace la recta $y = 2t + 1$ y aplique la geometría para hallar el área debajo de esta recta, arriba del eje t y entre las rectas verticales $t = 1$ y $t = 3$.

(b) Si $x > 1$, sea $A(x)$ el área de la región que se encuentra debajo de la recta $y = 2t + 1$, entre $t = 1$ y $t = x$. Dibuje un esquema de esta región y use la geometría con el fin de hallar una expresión para $A(x)$.

(c) Derive la función de área $A(x)$. ¿Qué advierte?

2. (a) Si $x \geqslant -1$, sea

$$A(x) = \int_{-1}^{x} (1 + t^2)\, dt$$

$A(x)$ representa el área de una región. Grafique la región.

(b) A partir de los resultados del ejercicio 28 de la sección 5.2 encuentre una expresión para $A(x)$.

(c) Determine $A'(x)$. ¿Qué se puede observar?

(d) Si $x \geqslant -1$ y h es un número positivo pequeño, por lo tanto $A(x + h) - A(x)$ representa el área de una región. Describa y grafique la región.

(e) Dibuje un rectángulo que sea una aproximación de la región del inciso (d). Mediante la comparación de áreas de estas dos regiones demuestre que

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx 1 + x^2$$

(f) Mediante el inciso (e) ofrezca una explicación intuitiva del resultado del inciso (c).

3. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = \cos(x^2)$ el rentángulo de visualización $[0, 2]$ por $[-1.25, 1.25]$.

(b) Si define una nueva función g por medio de

$$g(x) = \int_{0}^{x} \cos(t^2)\, dt$$

en tal caso $g(x)$ es el área debajo de la gráfica de f, desde 0 hasta x [hasta que $f(x)$ se vuelve negativa, en cuyo punto $g(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. Use el resultado del inciso (a) para determinar el valor de x en el cual $g(x)$ empieza a decrecer. [A diferencia de la integral del problema 2, es imposible evaluar la integral que define g para obtener una expresión explícita para $g(x)$.]

(c) Utilice el comando de integración de su calculadora o computadora para estimar $g(0.2)$, $g(0.4)$, $g(0.6)$, $\ldots$, $g(1.8)$, $g(2)$. En seguida, con estos valores dibuje una gráfica de g.

(d) Use la gráfica de g del inciso (c) para dibujar la gráfica de g'; use la interpretación de $g'(x)$ como la pendiente de una recta tangente. ¿Qué relación existe entre la gráfica de g' y la de f?

4. Suponga que f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y se define una nueva función g por la ecuación

$$g(x) = \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

Tomando como base sus resultados en los problemas 1–3 deduzca una expresión para $g'(x)$.

5.3 EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

El teorema fundamental del cálculo recibe de manera apropiada este nombre porque establece una conexión entre las dos ramas del cálculo: el cálculo diferencial y el cálculo integral. El primero surgió del problema de la tangente, el cálculo integral lo hizo de un problema en apariencia no relacionado, el problema del área. El profesor de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677), descubrió que estos dos problemas en realidad estaban íntimamente relacionados. De hecho, se dio cuenta que la derivación y la integración son procesos inversos. El teorema fundamental del cálculo da la correspondencia inversa inequívoca entre la derivada y la integral. Newton y Leibniz explotaron esta correspondencia y la aplicaron para desarrollar el cálculo en un método matemático sistemático. En particular, ellos advirtieron que el teorema fundamental les permitía calcular con gran facilidad áreas e integrales, sin tener que calcularlas como límites de sumas como en las secciones 5.1 y 5.2.

La primera parte del teorema fundamental trata funciones definidas por una ecuación de la forma

$$\boxed{1} \qquad g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

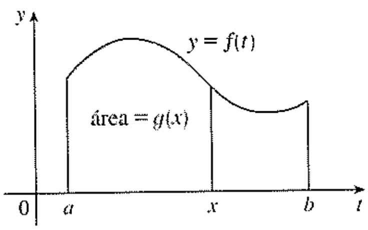


FIGURA 1

donde f es una función continua sobre $[a, b]$ y x varía entre a y b. Observe que g depende sólo de x, que aparece como el límite superior variable en la integral. Si x es un número fijo, por lo tanto la integral $\int_a^x f(t)\,dt$ es un número definido. Si después hace variar x, el número $\int_a^x f(t)\,dt$ también varía y define una función de x que se denota mediante $g(x)$.

Si f es una función positiva, después $g(x)$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, donde x puede cambiar de a a b. (Considere a g como la función "área tan lejana"; véase la figura 1.)

EJEMPLO 1 Si f es la función cuya gráfica se ilustra en la figura 2 y $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, encuentre los valores de $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(4)$ y $g(5)$. Luego trace una gráfica aproximada de g.

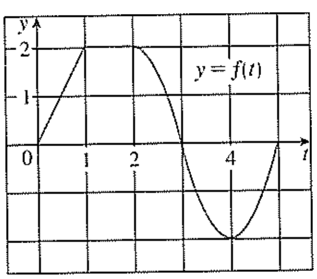


FIGURA 2

SOLUCIÓN En primer lugar observe que $g(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$. A partir de la figura 3 se ve que $g(1)$ es el área de un triángulo:

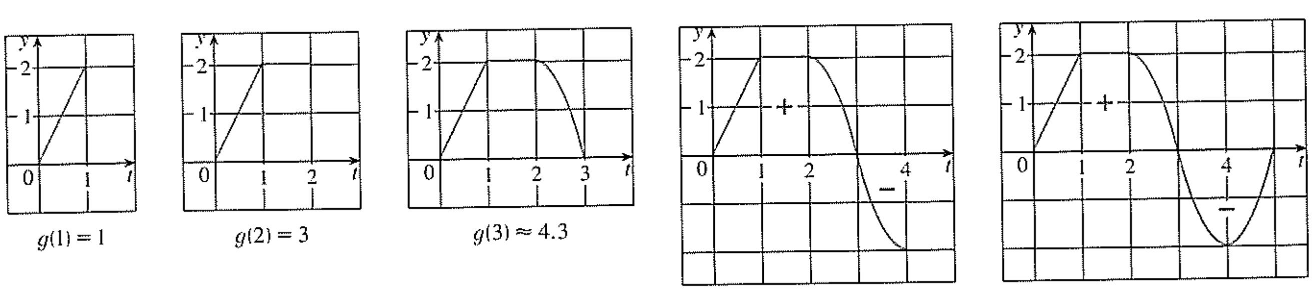
$$g(1) = \int_0^1 f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}(1 \cdot 2) = 1$$

Para hallar $g(2)$ le agrega a $g(1)$ el área de un rectángulo:

$$g(2) = \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^2 f(t)\,dt = 1 + (1 \cdot 2) = 3$$

Estime que el área debajo de f de 2 a 3 es alrededor de 1.3, de manera que

$$g(3) = g(2) + \int_2^3 f(t)\,dt \approx 3 + 1.3 = 4.3$$



$g(1) = 1$ $\quad$ $g(2) = 3$ $\quad$ $g(3) \approx 4.3$ $\quad$ $g(4) \approx 3$ $\quad$ $g(5) \approx 1.7$

FIGURA 3

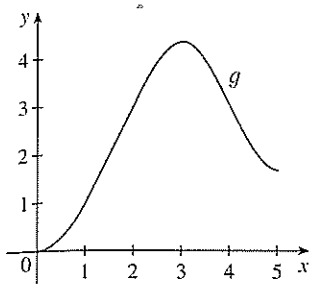


FIGURA 4
$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$

Para $t > 3$, $f(t)$ es negativa y por tanto empiece a restar áreas:

$$g(4) = g(3) + \int_3^4 f(t)\,dt \approx 4.3 + (-1.3) = 3.0$$

$$g(5) = g(4) + \int_4^5 f(t)\,dt \approx 3 + (-1.3) = 1.7$$

Use estos valores para trazar la gráfica de g en la figura 4. Advierta que, debido a que $f(t)$ es positiva para $t < 3$, se sigue sumando área para $t < 3$ y por lo tanto g es creciente hasta $x = 3$, donde alcanza un valor máximo. Para $x > 3$, g decrece porque $f(t)$ es negativa. □

Si hace $f(t) = t$ y $a = 0$, después, aprovechando el ejercicio 27 de la sección 5.2, tiene

$$g(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

Observe que $g'(x) = x$, es decir, $g' = f$. En otras palabras, si g se define como la integral de f mediante la ecuación 1, por lo tanto g resulta ser, cuando menos en este caso, una antiderivada de f. Y si traza la gráfica de la derivada de la función g que se ilustra en la figura 4 al estimar las pendientes de las tangentes, obtiene una gráfica como la de f en la figura 2. Por eso, sospeche que en el ejemplo 1 también $g' = f$.

Con objeto de observar por qué esto puede ser verdadero en general considere cualquier función continua f con $f(x) \geqslant 0$. Pues $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ puede interpretarse como el área debajo de la gráfica de f de a a x, como en la figura 1.

Con el fin de calcular $g'(x)$ a partir de la definición de derivada, en primer lugar observe que, para $h > 0$, $g(x + h) - g(x)$ se obtiene restando áreas, por lo tanto es el área debajo de la gráfica de f de x a $x + h$ (el área sombreada de la figura 5). Para h pequeñas, a partir de la figura puede ver que esta área es aproximadamente igual al área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h:

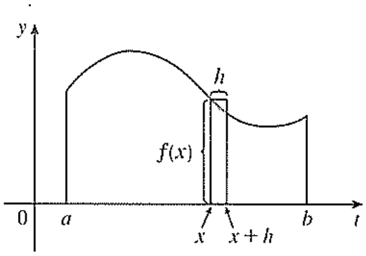


FIGURA 5

$$g(x + h) - g(x) \approx hf(x)$$

por eso

$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \approx f(x)$$

En consecuencia, por intuición, espere que

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = f(x)$$

El hecho de que esto sea verdadero, aun cuando f no sea necesariamente positiva, es la primera parte del teorema fundamental del cálculo.

▧ El nombre de este teorema se abrevia como TFC1: expresa que la derivada de una integral definida con respecto a su límite superior es el integrando evaluado sobre el límite superior.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 1. Si f es continua en $[a, b]$, luego la función g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si x y $x + h$ están en (a, b), por lo tanto

$$g(x + h) - g(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt$$

$$= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{(por la propiedad 5)}$$

$$= \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

y de este modo, para $h \neq 0$,

$$\boxed{2} \qquad \frac{g(x + h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

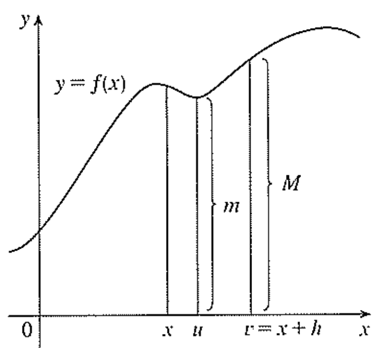


FIGURA 6

Por ahora suponga que $h > 0$. Puesto que f es continua en $[x, x + h]$, el teorema del valor extremo establece que hay números u y v en $[x, x + h]$ tal que $f(u) = m$ y $f(v) = M$, donde m y M son los valores máximo y mínimo absolutos de f en $[x, x + h]$. Véase figura 6.

De acuerdo con la propiedad 8 de las integrales, tiene

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant Mh$$

es decir,

$$f(u)h \leqslant \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)h$$

Como $h > 0$, puede dividir esta desigualdad entre h:

$$f(u) \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \leqslant f(v)$$

Enseguida use la ecuación 2 para reemplazar la parte media de esta desigualdad:

$$\boxed{3} \qquad f(u) \leqslant \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \leqslant f(v)$$

Se puede demostrar la desigualdad 3 de una manera similar a la del caso cuando $h < 0$. Véase ejercicio 67.

TEC En Module 5.3 se proporciona evidencia visual para TFC1.

Ahora deje que $h \to 0$. Después $u \to x$ y $v \to x$, ya que u y v quedan entre x y $x + h$. Por lo tanto,

$$\lim_{h \to 0} f(u) = \lim_{u \to x} f(u) = f(x)$$

y

$$\lim_{h \to 0} f(v) = \lim_{v \to x} f(v) = f(x)$$

porque f es continua en x. De acuerdo con (3) y el teorema de la compresión que

$$\boxed{4} \qquad g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$$

Si $x = a$ o b, después la ecuación 4 se puede interpretar como un límite unilateral. Entonces el teorema 2.8.4 (modificado para límites unilaterales), muestra que g es continua en $[a, b]$. □

De acuerdo con la notación de Leibniz para las derivadas, puede expresar al TFC1 como

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt = f(x)$$

cuando f es continua. En términos generales, la ecuación 5 establece que si primero integra f y luego obtiene la derivada del resultado, regresa a la función original f.

EJEMPLO 2 Encuentre la derivada de la función $g(x) = \int_0^x \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(t) = \sqrt{1 + t^2}$ es continua, la parte 1 del teorema fundamental del cálculo da

$$g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$$ □

EJEMPLO 3 Si bien una fórmula de la forma $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ puede parecer una forma extraña de definir una función, los libros de física, química y estadística están llenos de funciones semejantes. Por ejemplo, la **función de Fresnel**

$$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$$

recibe ese nombre en honor del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827), quien es famoso por su trabajo en la óptica. Esta función apareció por primera vez en la teoría de Fresnel de la difracción de la luz, pero a últimas fechas se ha aplicado al diseño de autopistas.

La parte 1 del teorema fundamental indica cómo derivar la función de Fresnel:

$$S'(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$$

Esto significa que puede aplicar todos los métodos del cálculo diferencial para analizar S (véase el ejercicio 61).

En la figura 7 se muestran las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$ y de la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Se usó una computadora para dibujar S por medio de calcular el valor de esta integral para muchos valores de x. Evidentemente parece que $S(x)$ es el área debajo de la gráfica de f de 0 hasta x [hasta que $x \approx 1.4$ cuando $S(x)$ se convierte en una diferencia de áreas]. La figura 8 muestra una gran parte más grande de la gráfica de S.

Si ahora empieza por la gráfica de S de la figura 7 y piensa en qué aspecto debe tener su derivada, parece razonable que $S'(x) = f(x)$. [Por ejemplo, S es creciente cuando $f(x) > 0$ y decreciente cuando $f(x) < 0$.] De modo que esto da una confirmación visual de la parte 1 del teorema fundamental del cálculo. □

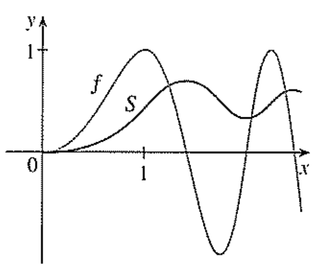


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen}(\pi x^2/2)$
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

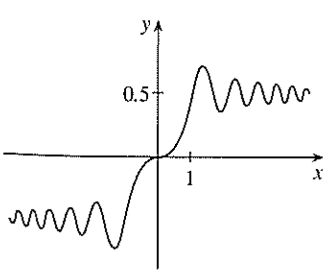


FIGURA 8
La función de Fresnel
$S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\, dt$

EJEMPLO 4 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^4} \sec t\, dt$.

SOLUCIÓN En este caso debe que ser cuidadoso al usar la regla de la cadena junto con FTC1. Sea $u = x^4$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_1^{x^4} \sec t\, dt &= \frac{d}{dx}\int_1^{u} \sec t\, dt \\ &= \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} \sec t\, dt\right]\frac{du}{dx} && \text{(por la regla de la cadena)} \\ &= \sec u \frac{du}{dx} && \text{(por TFC1)} \\ &= \sec(x^4)\cdot 4x^3 \end{aligned}$$

□

En la sección 5.2 calculó integrales a partir de la definición como un límite de las sumas de Riemann, y vio que ese procedimiento es a veces largo y difícil. La segunda parte del teorema fundamental del cálculo, la cual se infiere con facilidad de la primera parte, representa un método mucho más simple para evaluar integrales.

Se representa a este teorema mediante las siglas TFC2.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO, PARTE 2 Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

DEMOSTRACIÓN Sea $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. De acuerdo con la parte 1, sabe que $g'(x) = f(x)$; es decir, g es una antiderivada de f. Si F es cualquier otra antiderivada de f en $[a, b]$, entonces, por el corolario 4.2.7, la diferencia entre F y g es una constante:

$$\boxed{6} \qquad F(x) = g(x) + C$$

para $a < x < b$. Pero tanto F como g son continuas en $[a, b]$ y de este modo, al obtener los límites de ambos miembros de la ecuación 6, cuando $x \to a^+$ y $x \to b^-$, esto también se cumple cuando $x = a$ y $x = b$.

Si hace $x = a$ en la fórmula para $g(x)$, obtiene

$$g(a) = \int_a^a f(t)\, dt = 0$$

Entonces, al aplicar la ecuación 6 con $x = b$ y $x = a$, llega a

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= [g(b) + C] - [g(a) + C] \\ &= g(b) - g(a) = g(b) \\ &= \int_a^b f(t)\, dt \end{aligned}$$

□

La parte 2 del teorema fundamental establece que si conoce una antiderivada F de f, en tal caso puede evaluar $\int_a^b f(x)\,dx$ simplemente calculando la diferencia de los valores de F en los extremos del intervalo $[a, b]$. Sorprende mucho que $\int_a^b f(x)\,dx$, que fue definida mediante un procedimiento complicado que requiere todos los valores de $f(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$, se pueda determinar conociendo los valores de $F(x)$ en sólo dos puntos, a y b.

El teorema sorprende a primera vista, esto es posible cuando se le interpreta en términos físicos. Si $v(t)$ es la velocidad de un objeto y $s(t)$ es su posición en el tiempo t, por lo tanto $v(t) = s'(t)$, y s es una antiderivada de v. En la sección 5.1 se estudia un objeto que siempre se mueve en la dirección positiva y plantea una conjetura de que el área bajo la curva de la velocidad es igual a la distancia recorrida. Si lo expresa mediante símbolos, es lo siguiente:

$$\int_a^b v(t)\,dt = s(b) - s(a)$$

Eso es exactamente lo que el TFC2 establece en este contexto.

EJEMPLO 5 Evalúe la integral $\int_1^3 e^x\,dx$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = e^x$ es continua en todas sus partes y sabe que una antiderivada es $F(x) = e^x$, de modo que la parte 2 del teorema fundamental da

Compare el cálculo en el ejemplo 5 con el mucho más difícil del ejemplo 3 de la sección 5.2.

$$\int_1^3 e^x\,dx = F(3) - F(1) = e^3 - e$$

Observe que el TFC2 establece que puede utilizar *cualquier* antiderivada F de f. De este modo podría usar la más sencilla, a saber $F(x) = e^x$, en lugar de $e^x + 7$ o de $e^x + C$. □

A menudo se recurre a la notación

$$F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

También la ecuación del TFC2 se puede expresar como

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b \qquad \text{donde} \qquad F' = f$$

Otras notaciones comunes son $F(x)\,\big|_a^b$ y $[F(x)]_a^b$.

EJEMPLO 6 Determinar el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1.

SOLUCIÓN Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. El área requerida A se calcula aplicando la parte 2 del teorema fundamental:

Al aplicar el teorema fundamental se usa una antiderivada particular F de f. No es necesario usar la antiderivada más general.

$$A = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$ □

Si compara el cálculo del ejemplo 6 con el del ejemplo 2 de la sección 5.1, verá que el teorema fundamental proporciona un método *mucho* más corto.

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_3^6 \frac{dx}{x}$.

SOLUCIÓN La integral dada es una forma abreviada de

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$$

Una antiderivada de $f(x) = 1/x$ es $F(x) = \ln |x|$ y, como $3 \leqslant x \leqslant 6$, puede escribir $F(x) = \ln x$. De tal manera,

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big]_3^6 = \ln 6 - \ln 3$$

$$= \ln \frac{6}{3} = \ln 2$$

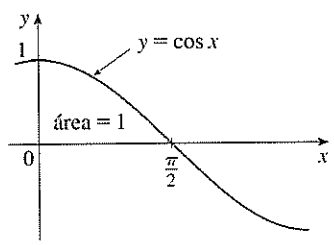


FIGURA 9

EJEMPLO 8 Calcule el área bajo la curva coseno desde 0 hasta b, donde $0 \leqslant b \leqslant \pi/2$.

SOLUCIÓN Puesto que una antiderivada de $f(x) = \cos x$ es $F(x) = \operatorname{sen} x$

$$A = \int_0^b \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big]_0^b = \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} b$$

En particular, al hacer $b = \pi/2$, ha comprobado que el área bajo la curva coseno desde 0 hasta $\pi/2$ es $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$. Véase figura 9.

Cuando el matemático francés Gilles de Roberval calculó por vez primera el área bajo las curvas seno y coseno en 1635, era una empresa que requería aplicar todo el ingenio del que fuera uno capaz. Si no tuviera la ventaja del teorema fundamental tendría que calcular un difícil límite de sumas mediante identidades trigonométricas abstrusas, o bien, un sistema algebraico computacional como en el ejercicio 25 de la sección 5.1. Fue mucho más difícil para Roberval puesto que el artificio de los límites no se había inventado aún en 1635. Pero ya después de los años de 1660 y 1670, cuando Barrow descubrió el teorema fundamental y Newton y Leibniz lo explotaron, este problema se volvió muy fácil, como lo puede ver por el ejemplo 8.

EJEMPLO 9 ¿Qué es lo erróneo en el cálculo siguiente?

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big]_{-1}^3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN Para empezar, observe que este cálculo es erróneo porque la respuesta es negativa, pero $f(x) = 1/x^2 \geqslant 0$ y la propiedad 6 de las integrales establecen que $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$ cuando $f \geqslant 0$. El teorema fundamental del cálculo se aplica en las funciones continuas. En este caso no se puede aplicar porque $f(x) = 1/x^2$ no es continua en $[-1, 3]$. En efecto, f tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$, de modo que

$$\int_{-1}^3 \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \text{no existe.}$$

LA DERIVACIÓN Y LA INTEGRACIÓN COMO PROCESOS INVERSOS

Esta sección finaliza conjuntando las dos partes del teorema fundamental.

> **TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO** Suponga que f es continua sobre $[a, b]$.
>
> **1.** Si $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, por lo tanto $g'(x) = f(x)$.
>
> **2.** $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

La parte 1 se puede volver a escribir como

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

en la cual se afirma que si integra f y, a continuación, deriva el resultado, regresa a la función original f. Como $F'(x) = f(x)$, la parte 2 puede reescribirse así

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

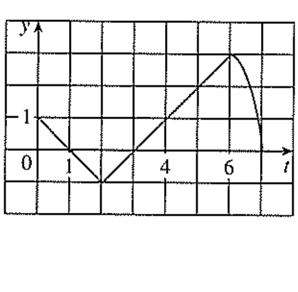
En esta versión se afirma que si toma una función F, la deriva y luego integra el resultado, vuelve a la función original F, pero en la forma $F(b) - F(a)$. Tomadas juntas, las dos partes del teorema fundamental del cálculo expresan que la derivación y la integración son procesos inversos. Cada una deshace lo que hace la otra.

Sin duda, el teorema fundamental del cálculo es el teorema más importante en este campo y, de hecho, alcanza el nivel de uno de los más grandes logros de la mente humana. Antes de ser descubierto, desde los tiempos de Eudoxo y Arquímedes, hasta la época de Galileo y Fermat, los problemas de hallar áreas, volúmenes y longitudes de curvas eran tan difíciles que sólo un genio podía afrontar el reto. Pero ahora, armados con el método sistemático que Newton y Leibniz desarrollaron como el teorema fundamental, en los próximos capítulos verá que estos estimulantes problemas son accesibles para todos.

5.3 EJERCICIOS

1. Explique con exactitud qué se quiere decir con la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

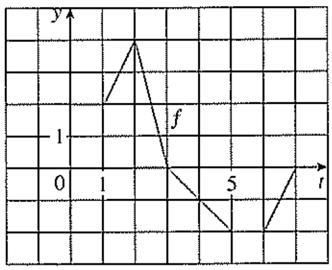
2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.



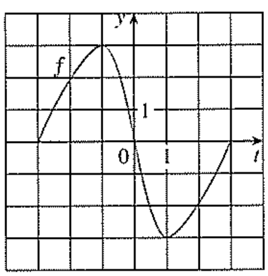
(a) Evalúe $g(x)$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6.
(b) Estime $g(7)$.
(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g? ¿Dónde tiene un valor mínimo?
(d) Trace una gráfica aproximada de g.

3. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ y $g(6)$.
(b) ¿En qué intervalo es creciente g?

(c) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
(d) Trace una gráfica aproximada de g?



4. Sea $g(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.
(a) Evalúe $g(-3)$ y $g(3)$.
(b) Estime $g(-2)$, $g(-1)$ y $g(0)$.
(c) ¿En qué intervalo es creciente g?
(d) ¿Dónde tiene un valor máximo g?
(e) Trace una gráfica aproximada de g.
(f) Utilice la gráfica del inciso (e) para trazar la gráfica de $g'(x)$. Compárela con la gráfica de f.



5–6 Trace el área representada por $g(x)$. A continuación halle $g'(x)$ de dos maneras: (a) aplicando la parte 1 del teorema fundamental y (b) evaluando la integral utilizando la parte 2 y después derivar.

5. $g(x) = \int_{1}^{x} t^2\,dt$ **6.** $g(x) = \int_{0}^{x} (1 + \sqrt{t})\,dt$

7–18 Use la parte 1 del teorema fundamental del cálculo para encontrar la derivada de la función.

7. $g(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^3 + 1}\,dt$ **8.** $g(x) = \int_{3}^{x} e^{t^2 - t}\,dt$

9. $g(y) = \int_{2}^{y} t^2 \operatorname{sen} t\,dt$ **10.** $g(r) = \int_{0}^{r} \sqrt{x^2 + 4}\,dx$

11. $F(x) = \int_{x}^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\,dt$

$\left[\textit{Sugerencia:}\ \int_{x}^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\,dt = -\int_{\pi}^{x} \sqrt{1 + \sec t}\,dt\right]$

12. $G(x) = \int_{x}^{1} \cos \sqrt{t}\,dt$

13. $h(x) = \int_{2}^{1/x} \arctan t\,dt$ **14.** $h(x) = \int_{0}^{x^2} \sqrt{1 + r^3}\,dr$

15. $y = \int_{0}^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\,dt$ **16.** $y = \int_{1}^{\cos x} (1 + v^2)^{10}\,dv$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\,du$ **18.** $y = \int_{e^x}^{0} \operatorname{sen}^3 t\,dt$

19–42 Evalúe la integral.

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\,dx$ **20.** $\int_{-2}^{5} 6\,dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\,dt$ **22.** $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right)du$

23. $\int_{0}^{1} x^{4/5}\,dx$ **24.** $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$

25. $\int_{1}^{2} \frac{3}{t^4}\,dt$ **26.** $\int_{\pi}^{2\pi} \cos\theta\,d\theta$

27. $\int_{0}^{2} x(2 + x^5)\,dx$ **28.** $\int_{0}^{1} (3 + x\sqrt{x})\,dx$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\,dx$ **30.** $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\,dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\,dt$ **32.** $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\,d\theta$

33. $\int_{1}^{2} (1 + 2y)^2\,dy$ **34.** $\int_{0}^{1} \cosh t\,dt$

35. $\int_{1}^{9} \frac{1}{2x}\,dx$ **36.** $\int_{0}^{1} 10^x\,dx$

37. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{6}{\sqrt{1 - t^2}}\,dt$ **38.** $\int_{0}^{1} \frac{4}{t^2 + 1}\,dt$

39. $\int_{-1}^{1} e^{u+1}\,du$ **40.** $\int_{1}^{2} \frac{4 + u^2}{u^3}\,du$

41. $\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x < \pi/2 \\ \cos x & \text{si } \pi/2 \leq x \leq \pi \end{cases}$

42. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 4 - x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

43–46 ¿Con la ecuación, qué es incorrecto?

43. $\int_{-2}^{1} x^{-4}\,dx = \left.\frac{x^{-3}}{3}\right]_{-2}^{1} = -\frac{3}{8}$

44. $\int_{-1}^{2} \frac{4}{x^3}\,dx = -\left.\frac{2}{x^2}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{2}$

45. $\int_{\pi/3}^{\pi} \sec\theta \tan\theta\,d\theta = \sec\theta\Big]_{\pi/3}^{\pi} = -3$

46. $\int_{0}^{\pi} \sec^2 x\,dx = \tan x\Big]_{0}^{\pi} = 0$

47–50 Mediante una gráfica dé una estimación del área de la región que se localiza abajo de la curva dada. Después calcule el área exacta

47. $y = \sqrt[3]{x}$, $0 \leqslant x \leqslant 27$ **48.** $y = x^{-4}$, $1 \leqslant x \leqslant 6$

49. $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ **50.** $y = \sec^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi/3$

51–52 Evalúe la integral e interprétela como una diferencia de áreas. Ilustre mediante un croquis.

51. $\int_{-1}^{2} x^3\,dx$ **52.** $\int_{\pi/4}^{5\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx$

53–56 Determine la derivada de la función.

53. $g(x) = \int_{2x}^{3x} \frac{u^2-1}{u^2+1}\,du$

$$\left[\textit{Sugerencia:}\ \int_{2x}^{3x} f(u)\,du = \int_{2x}^{0} f(u)\,du + \int_{0}^{3x} f(u)\,du\right]$$

54. $g(x) = \int_{\tan x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}\,dt$

55. $y = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} \sqrt{t}\,\operatorname{sen} t\,dt$

56. $y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\,du$

---

57. Si $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, donde $f(t) = \int_1^{t^2} \frac{\sqrt{1+u^4}}{u}\,du$, halle $F''(2)$.

58. Encuentre el intervalo sobre el cual la curva

$$y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$$

es cóncava hacia arriba.

59. Si $f(1) = 12$, f' es continua y $\int_1^4 f'(x)\,dx = 17$, ¿cuál es el valor de $f(4)$?

60. La **función error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

se usa en probabilidad, estadística e ingeniería.

(a) Demuestre que $\int_a^b e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,[\operatorname{erf}(b) - \operatorname{erf}(a)]$.

(b) Demuestre que la función $y = e^{x^2}\operatorname{erf}(x)$ satisface la ecuación diferencial $y' = 2xy + 2/\sqrt{\pi}$.

61. La función de Fresnel S se definió en el ejemplo 3 y en las figuras 7 y 8 se trazaron sus gráficas.

(a) ¿Sobre qué valores de x tiene valores máximos locales esta función?

(b) ¿Sobre qué valores esta función es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Utilice una gráfica para resolver la ecuación siguiente correcta hasta dos cifras decimales.

$$\int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt = 0.2$$

CAS **62.** La **función integral sinusoidal**

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

es importante en la ingeniería eléctrica. [El integrando $f(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ no está definido cuando $t = 0$, pero sabe que su límite es 1 cuando $t \to 0$. De modo que defina $f(0) = 1$ y esto convierte a f en una función continua en todas partes.]

(a) Dibuje la gráfica de Si.

(b) ¿En qué valores de x tiene esta función valores máximos locales?

(c) Encuentre las coordenadas del primer punto de inflexión a la derecha del origen.

(d) ¿Esta función tiene asíntotas horizontales?

(e) Resuelva la ecuación siguiente correcta hasta una cifra decimal.

$$\int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt = 1$$

63–64 Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, donde f es la función cuya gráfica se muestra.

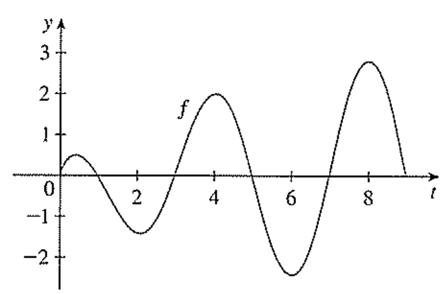
(a) ¿En qué valores de x se presentan los valores máximos y mínimos locales de g?

(b) ¿Dónde alcanza g su valor máximo absoluto?

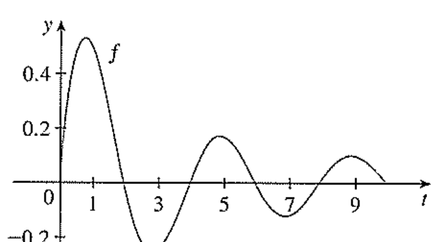
(c) ¿En qué intervalos g es cóncava hacia abajo?

(d) Trace la gráfica de g.

63.



64.



65–66 Evalúe el límite reconociendo primero la suma como una suma de Riemann para una función definida en [0, 1].

61. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4}$

62. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{\frac{3}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

67. Justifique (3) para el caso $h < 0$.

68. Si f es continua y g y h son funciones derivables, determine una fórmula para

$$\frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)\, dt$$

69. (a) Demuestre que $1 \leqslant \sqrt{1 + x^3} \leqslant 1 + x^3$ para $x \geqslant 0$.

(b) Demuestre que $1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x^3}\, dx \leqslant 1.25$.

70. (a) Demuestre que $\cos(x^2) \geqslant \cos x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

(b) Deduce que $\int_0^{\pi/6} \cos(x^2)\, dx \geqslant \frac{1}{2}$.

71. Demostrar

$$0 \leqslant \int_5^{10} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}\, dx \leqslant 0.1$$

comparando el integrando a una función de lo más simple.

72. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y $$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

(a) Encuentre una expresión para $g(x)$ similar a la correspondiente a $f(x)$.

(b) Trace las gráficas de f y g.

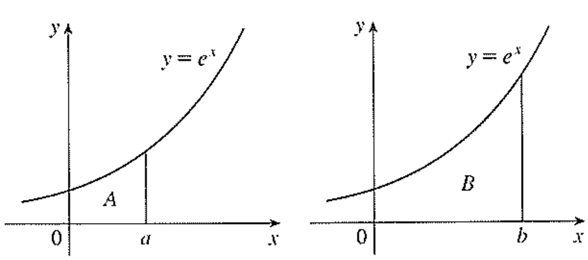
(c) ¿En dónde es derivable f? ¿Dónde es derivable g?

73. Halle una función f y un número a tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt = 2\sqrt{x}$$

para toda $x > 0$.

74. El área B es tres veces el área A. Exprese b en términos de a.



75. Una empresa de fabricación tiene una pieza importante de un equipo que se deprecia a la tasa (continua) $f = f(t)$, donde t es el tiempo medido en meses desde que se le sometió a su más reciente reparación. Como cada vez que la máquina se somete a una reparación mayor se incurre en un costo fijo, la compañía desea determinar el tiempo óptimo T (en meses) entre las reparaciones mayores.

(a) Explique por qué $\int_0^t f(s)\, ds$ representa la pérdida en valor de la máquina a lo largo del tiempo t a partir de la última reparación mayor.

(b) Haga que $C = C(t)$ esté dada por

$$C(t) = \frac{1}{t}\left[A + \int_0^t f(s)\, ds\right]$$

¿Qué representa C y por qué desearía la empresa minimizar C?

(c) Demuestre que C tiene un valor mínimo sobre los números $t = T$ donde $C(T) = f(T)$.

76. Una compañía de alta tecnología compra un sistema de cómputo nuevo cuyo valor inicial es V. El sistema se depreciará con una rapidez $f = f(t)$ y acumulará costos de mantenimiento en una proporción $g = g(t)$, donde t es el tiempo medido en meses. La compañía desea determinar el tiempo óptimo para reemplazar el sistema.

(a) Sea

$$C(t) = \frac{1}{t}\int_0^t [f(s) + g(s)]\, ds$$

Demuestre que los números críticos de C se presentan en los números t donde $C(t) = f(t) + g(t)$.

(b) Suponga que

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{V}{15} - \dfrac{V}{450}t & \text{si } 0 < t \leqslant 30 \\ 0 & \text{si } t > 30 \end{cases}$$

y $$g(t) = \frac{Vt^2}{12\,900} \qquad t > 0$$

Determine la duración del tiempo T para que la depreciación total $D(t) = \int_0^t f(s)\, ds$ equivalga al valor inicial V.

(c) Determine el valor mínimo absoluto de C sobre $(0, T]$.

(d) Trace las gráficas de C y $f + g$ en el mismo sistema de coordenadas y compruebe el resultado del inciso (a) en este caso.

5.4 INTEGRALES INDEFINIDAS Y EL TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL

Ya vio en la sección 5.3 que mediante la segunda parte del teorema fundamental del cálculo se obtiene un método muy eficaz para evaluar la integral definida de una función, si supone que puede encontrar una antiderivada de la función. En esta sección se presenta una notación para la antiderivada, se repasan las fórmulas de las antiderivadas y se usan para evaluar integrales definidas. Asimismo, replantea el FTC2, de una manera que facilita más aplicarlo a problemas relacionados con las ciencias y la ingeniería.

INTEGRALES INDEFINIDAS

Ambas partes del teorema fundamental establecen relaciones entre antiderivadas e integrales definidas. La parte 1 establece que si f es continua, por lo tanto $\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f. La parte 2 plantea que $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede determinar evaluando $F(b) - F(a)$, donde F es una antiderivada de f.

Necesita una notación conveniente para las antiderivadas que facilite trabajar con ellas. Debido a la relación dada por el teorema fundamental entre las antiderivadas y las integrales, por tradición se usa la notación $\int f(x)\,dx$ para una antiderivada de f y se llama **integral indefinida**. Por esto,

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \qquad \text{significa} \qquad F'(x) = f(x)}$$

Por ejemplo, puede escribir

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

De este modo, considere una integral indefinida como la representante de una *familia* entera de funciones, (es decir, una antiderivada para cada valor de la constante C).

Distinga con cuidado entre las integrales definidas y las indefinidas. Una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es un *número*, en tanto que una integral indefinida $\int f(x)\,dx$ es una *función* (o una familia de funciones). La relación entre ellas la proporciona la parte 2 del teorema fundamental. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx \Big]_a^b$$

La eficacia del teorema fundamental depende de que se cuente con un suministro de antiderivadas de funciones. Por lo tanto, se presenta de nuevo la tabla de fórmulas de antiderivación de la sección 4.9, más otras cuantas, en la notación de las integrales indefinidas. Cualquiera de las fórmulas se puede comprobar al derivar la función del lado derecho y obtener el integrando. Por ejemplo,

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C \qquad \text{porque} \qquad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$$

1 TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS

$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$	$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\int \dfrac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$

De acuerdo con el teorema 4.9.1, la antiderivada más general *en un intervalo dado* se obtiene por la adición de una constante a una antiderivada particular. **Adopte la convención de que cuando se proporciona una fórmula para una integral indefinida general es válida sólo en un intervalo.** Así, escriba

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$$

con el entendimiento de que es válida en el intervalo $(0, \infty)$ o en el intervalo $(-\infty, 0)$. Esto se cumple a pesar del hecho de que la antiderivada general de la función $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, es

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} + C_1 & \text{si } x < 0 \\ -\dfrac{1}{x} + C_2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

■ En la figura 1 se tiene la gráfica de la integral indefinida del ejemplo 1 para varios valores de C. El valor de C es la intersección con el eje y.

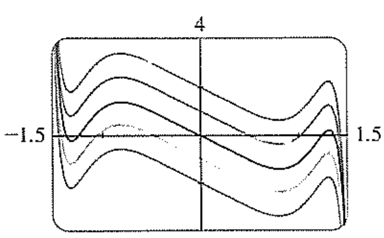


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Encuentre la integral indefinida general

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx$$

SOLUCIÓN Si usa la convención y la tabla 1, tiene

$$\int (10x^4 - 2\sec^2 x)\,dx = 10\int x^4\,dx - 2\int \sec^2 x\,dx$$

$$= 10\frac{x^5}{5} - 2\tan x + C = 2x^5 - 2\tan x + C$$

Debe comprobar esta respuesta derivándola. □

EJEMPLO 2 Evalúe $\displaystyle\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta$.

SOLUCIÓN Esta integral indefinida no es evidente de inmediato en la tabla 1, por lo que se aplican las identidades trigonométricas para reescribir la función antes de integrar:

$$\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\right)\left(\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\right)d\theta$$
$$= \int \csc\theta\cot\theta\,d\theta = -\csc\theta + C$$

□

EJEMPLO 3 Calcule $\displaystyle\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx$.

SOLUCIÓN Al aplicar el TFC2 y la tabla 1, tiene

$$\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\Big]_0^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}\cdot 3^4 - 3\cdot 3^2\right) - \left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^2\right)$$
$$= \tfrac{81}{4} - 27 - 0 + 0 = -6.75$$

Compare este cálculo con el del ejemplo 2(b) de la sección 5.2. □

La figura 2 es la gráfica del integrando del ejemplo 4. Sabe por la sección 5.2 que el valor de la integral se puede interpretar como la suma de las áreas marcadas con un signo más menos el área marcada con un signo menos.

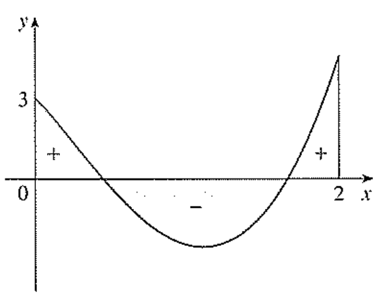


FIGURA 2

EJEMPLO 4 Determine $\displaystyle\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx$ e interprete el resultado en función de áreas.

SOLUCIÓN El teorema fundamental da

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx = 2\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2} + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3\tan^{-1}x\Big]_0^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(2^4) - 3(2^2) + 3\tan^{-1}2 - 0$$
$$= -4 + 3\tan^{-1}2$$

Éste es el valor exacto de la integral. Si desea una aproximación decimal, utilice una calculadora para obtener un valor aproximado de $\tan^{-1}2$. Al hacerlo tiene

$$\int_0^2 \left(2x^3 - 6x + \frac{3}{x^2+1}\right)dx \approx -0.67855$$

□

EJEMPLO 5 Evalúe $\displaystyle\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt$.

SOLUCIÓN En primer lugar, necesita escribir el integrando en una forma más sencilla, al llevar a cabo la división:

$$\int_1^9 \frac{2t^2 + t^2\sqrt{t} - 1}{t^2}\,dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2})\,dt$$
$$= 2t + \frac{t^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{t^{-1}}{-1}\Big]_1^9 = 2t + \tfrac{2}{3}t^{3/2} + \frac{1}{t}\Big]_1^9$$
$$= \left[2\cdot 9 + \tfrac{2}{3}(9)^{3/2} + \tfrac{1}{9}\right] - \left(2\cdot 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 1^{3/2} + \tfrac{1}{1}\right)$$
$$= 18 + 18 + \tfrac{1}{9} - 2 - \tfrac{2}{3} - 1 = 32\tfrac{4}{9}$$

APLICACIONES

La parte 2 del teorema fundamental establece que si f es continua en $[a, b]$, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde F es cualquier antiderivada de f. Esto significa que $F' = f$, de forma que se puede volver a escribir la ecuación como

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Sabe que $F'(x)$ representa la relación de cambio de $y = F(x)$ con respecto a x y $F(b) - F(a)$ es el cambio en y cuando x cambia de a hacia b. [Advierta que y podría, por ejemplo, incrementarse y luego decrecer de nuevo. Si bien y podría cambiar en ambas direcciones, $F(b) - F(a)$ representa el cambio *total* en y.] De manera que puede volver a plantear verbalmente FTC2 en los términos siguientes:

TEOREMA DEL CAMBIO TOTAL La integral de una relación de cambio es el cambio total:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Este principio se puede aplicar a todas las relaciones de cambio en las ciencias naturales y sociales que se analizaron en la sección 3.7. Enseguida se dan unos cuantos ejemplos de esta idea:

- Si $V(t)$ es el volumen de agua en un depósito, en el instante t, entonces su derivada $V'(t)$ es la proporción a la cual fluye el agua hacia el depósito en el instante t. Por eso,

$$\int_{t_1}^{t_2} V'(t)\,dt = V(t_2) - V(t_1)$$

  es el cambio en la cantidad de agua en el depósito entre los instantes t_1 y t_2.

- Si $[C](t)$ es la concentración del producto de una reacción química en el instante t, entonces la velocidad de reacción es la derivada $d[C]/dt$. De tal manera,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d[C]}{dt}\,dt = [C](t_2) - [C](t_1)$$

  es el cambio en la concentración de C, desde el instante t_1 hasta el t_2.

- Si la masa de una varilla, medida desde el extremo izquierdo hasta un punto x, es $m(x)$, entonces la densidad lineal es $\rho(x) = m'(x)$. Por consiguiente,

$$\int_a^b \rho(x)\,dx = m(b) - m(a)$$

  es la masa del segmento de la varilla entre $x = a$ y $x = b$.

- Si la rapidez de crecimiento de una población es dn/dt, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dn}{dt}\,dt = n(t_2) - n(t_1)$$

  es el cambio total en la población durante el periodo desde t_1 hasta t_2. (La población aumenta cuando ocurren nacimientos y disminuye cuando se suscitan muertes. El cambio total toma en cuenta tanto nacimientos como decesos.)

- Si $C(x)$ es el costo de producir x unidades de un artículo, entonces el costo marginal es la derivada $C'(x)$. De esa manera

$$\int_{x_1}^{x_2} C'(x)\,dx = C(x_2) - C(x_1)$$

es el incremento en el costo cuando la producción aumenta de x_1 unidades hasta x_2 unidades.

- Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con función de posición $s(t)$, entonces su velocidad es $v(t) = s'(t)$, de modo que

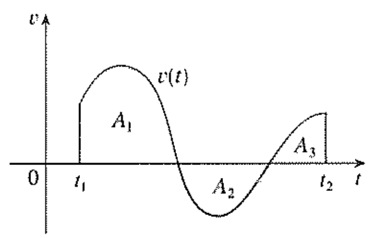
2 $$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = s(t_2) - s(t_1)$$

es el cambio de la posición, o *desplazamiento*, de la partícula durante el periodo desde t_1 hasta t_2. En la sección 5.1 se infirió que esto era verdadero para el caso en que el objeto se mueve en la dirección positiva, pero ahora ha probado que siempre es verdadero.

- Si quiere calcular la distancia recorrida durante el intervalo, tiene que considerar los intervalos cuando $v(t) \geqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la derecha) y también los intervalos cuando $v(t) \leqslant 0$ (la partícula se mueve hacia la izquierda). En ambos casos la distancia se calcula al integrar $|v(t)|$, la magnitud de la rapidez. Por consiguiente

3 $$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = \text{distancia total recorrida}$$

En la figura 3 se muestra cómo interpretar el desplazamiento y la distancia recorrida en términos de las áreas debajo de una curva de velocidad.



$$\text{desplazamiento} = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\text{distancia} = \int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\,dt = A_1 + A_2 + A_3$$

FIGURA 3

- La aceleración del objeto es $a(t) = v'(t)$, por eso

$$\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt = v(t_2) - v(t_1)$$

es el cambio en la velocidad, desde el instante t_1 hasta el t_2.

EJEMPLO 6 Una partícula se mueve a lo largo de una recta de modo que su velocidad en el instante t es $v(t) = t^2 - t - 6$ (medida en metros por segundo).
(a) Encuentre el desplazamiento de la partícula durante el periodo $1 \leqslant t \leqslant 4$.
(b) Halle la distancia recorrida durante este periodo.

SOLUCIÓN
(a) Por la ecuación 2, el desplazamiento es

$$s(4) - s(1) = \int_1^4 v(t)\,dt = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\,dt$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_1^4 = -\frac{9}{2}$$

Esto significa que la partícula se desplaza 4.5 m hacia la izquierda.

(b) Advierta que $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$ y, por eso, $v(t) \leqslant 0$ en el intervalo $[1, 3]$ y $v(t) \geqslant 0$ en $[3, 4]$. Por esto, a partir de la ecuación 3 la distancia recorrida es

▫ Para integrar el valor absoluto de $v(t)$, use la propiedad 5 de las integrales de la sección 5.2 para dividir la integral en dos partes, una donde $v(t) \leqslant 0$ y otra donde $v(t) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 |v(t)|\, dt &= \int_1^3 [-v(t)]\, dt + \int_3^4 v(t)\, dt \\
&= \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\, dt + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\, dt \\
&= \left[-\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 6t\right]_1^3 + \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right]_3^4 \\
&= \frac{61}{6} \approx 10.17 \text{ m}
\end{aligned}$$

□

EJEMPLO 7 En la figura 4 se muestra el consumo de energía eléctrica (potencia) en la ciudad de San Francisco un día del mes de septiembre (P se mide en megawatts y t en horas, a partir de la medianoche). Estime la energía que se utilizó ese día.

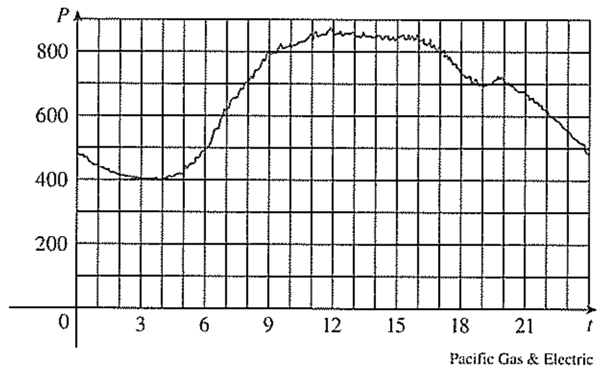


FIGURA 4

SOLUCIÓN La potencia es la relación de cambio de la energía: $P(t) = E'(t)$. De modo que, por el teorema del cambio neto,

$$\int_0^{24} P(t)\, dt = \int_0^{24} E'(t)\, dt = E(24) - E(0)$$

es la cantidad total de energía que se usó ese día. Haga una aproximación de la integral con la regla del punto de en Medio con 12 subintervalos y $\Delta t = 2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{24} P(t)\, dt &\approx [P(1) + P(3) + P(5) + \cdots + P(21) + P(23)]\, \Delta t \\
&\approx (440 + 400 + 420 + 620 + 790 + 840 + 850 \\
&\qquad + 840 + 810 + 690 + 670 + 550)(2) \\
&= 15\,840
\end{aligned}$$

La energía usada fue de unos 15 840 megawatt-horas.

□

▫ Una nota acerca de unidades

¿Cómo sabe qué unidades usar para la energía en el ejemplo 7? La integral $\int_0^{24} P(t)\, dt$ se define como el límite de las sumas de términos de la forma $P(t_i^*)\, \Delta t$. Ahora bien, $P(t_i^*)$ se mide en megawatts y Δt en horas, de modo que su producto se mide en megawatt-horas. Lo mismo es verdadero para el límite. En general, la unidad de medida para $\int_a^b f(x)\, dx$ es el producto de la unidad para $f(x)$ y la unidad para x.

5.4 EJERCICIOS

1–4 Compruebe mediante derivación que la fórmula es correcta.

1. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \sqrt{x^2+1} + C$

2. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + C$

3. $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx = \mathrm{sen}\,x - \tfrac{1}{3}\mathrm{sen}^3 x + C$

4. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$

5–18 Determine una integral indefinida general.

5. $\displaystyle\int (x^2 + x^{-2})dx$

6. $\displaystyle\int (\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2})\,dx$

7. $\displaystyle\int (x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{4}x - 2)\,dx$

8. $\displaystyle\int (y^3 + 1.8y^2 - 2.4y)\,dy$

9. $\displaystyle\int (1-t)(2+t^2)\,dt$

10. $\displaystyle\int v(v^2+2)^2 dv$

11. $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx$

12. $\displaystyle\int \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1}\right)dx$

13. $\displaystyle\int (\mathrm{sen}\,x + \mathrm{senh}\,x)\,dx$

14. $\displaystyle\int (\csc^2 t - 2e^t)\,dt$

15. $\displaystyle\int (\theta - \csc\theta\cot\theta)\,d\theta$

16. $\displaystyle\int \sec t(\sec t + \tan t)\,dt$

17. $\displaystyle\int (1 + \tan^2\alpha)\,d\alpha$

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen}\,2x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx$

19–20 Determine la integral indefinida general. Ilustre mediante una gráfica varios miembros de la familia en la misma pantalla.

19. $\displaystyle\int (\cos x + \tfrac{1}{2}x)\,dx$

20. $\displaystyle\int (e^x - 2x^2)\,dx$

21–44 Evalúe la integral.

21. $\displaystyle\int_0^2 (6x^2 - 4x + 5)\,dx$

22. $\displaystyle\int_1^3 (1 + 2x - 4x^3)\,dx$

23. $\displaystyle\int_{-1}^0 (2x - e^x)\,dx$

24. $\displaystyle\int_{-2}^0 (u^5 - u^3 + u^2)\,du$

25. $\displaystyle\int_{-2}^2 (3u+1)^2\,du$

26. $\displaystyle\int_0^4 (2v+5)(3v-1)\,dv$

27. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{t}(1+t)\,dt$

28. $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{2t}\,dt$

29. $\displaystyle\int_{-2}^{-1}\left(4y^3 + \frac{2}{y^3}\right)dy$

30. $\displaystyle\int_1^2 \frac{y+5y^7}{y^3}\,dy$

31. $\displaystyle\int_0^1 x(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\,dx$

32. $\displaystyle\int_0^5 (2e^x + 4\cos x)\,dx$

33. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{\frac{5}{x}}\,dx$

34. $\displaystyle\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\,dx$

35. $\displaystyle\int_0^\pi (4\,\mathrm{sen}\,\theta - 3\cos\theta)\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sec\theta\tan\theta\,d\theta$

37. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta$

38. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\theta\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta$

39. $\displaystyle\int_1^{64} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int_{-10}^{10} \frac{2e^x}{\mathrm{senh}\,x + \cosh x}\,dx$

41. $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{t^2-1}{t^4-1}\,dt$

42. $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{x^2}\,dx$

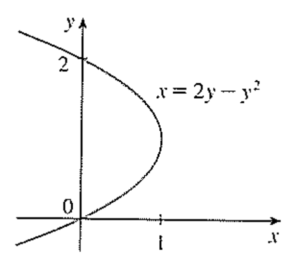
43. $\displaystyle\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^{3\pi/2} |\mathrm{sen}\,x|\,dx$

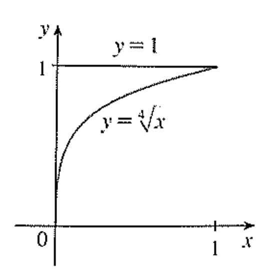
45. Use una gráfica para estimar las intersecciones con el eje x de la curva $y = x + x^2 - x^4$. Luego utilice esta información para estimar el área de la región que se encuentra debajo de la curva y arriba del eje x.

46. Repita el ejercicio 45 para la curva $y = 2x + 3x^4 - 2x^6$.

47. El área de la región que se encuentra a la derecha del eje y y a la izquierda de la parábola $x = 2y - y^2$ (el área sombreada de la figura) se expresa con la integral $\int_0^2 (2y - y^2)\,dy$. (Gire su cabeza en sentido de las manecillas del reloj y considere que la región se encuentra debajo de la curva $x = 2y - y^2$ desde $y = 0$ hasta $y = 2$.) Encuentre el área de la región.



48. Las fronteras de la región sombreada son el eje y, la recta $y = 1$ y la curva $y = \sqrt[4]{x}$. Encuentre el área de esta región al escribir x como función de y e integrar con respecto a esta última (como en el ejercicio 47).



49. Si $w'(t)$ es la rapidez de crecimiento de un niño en libras por año, ¿qué representa $\int_5^{10} w'(t)\,dt$?

50. La corriente en un alambre se define como la derivada de la carga: $I(t) = Q'(t)$. (Véase el ejemplo 3 de la sección 3.7.) ¿Qué representa $\int_a^b I(t)\,dt$?

51. Si se fuga aceite de un tanque con una rapidez de $r(t)$ galones por minuto en el instante t, ¿qué representa $\int_0^{120} r(t)\,dt$?

52. Una población de abejas se inicia con 100 ejemplares y se incrementa en una proporción de $n'(t)$ especímenes por semana. ¿Qué representa $100 + \int_0^{15} n'(t)\,dt$?

53. En la sección 4.7 se definió la función de ingreso marginal $R'(x)$ como la derivada de la función de ingreso $R(x)$, donde x es el número de unidades vendidas. ¿Qué representa $\int_{1000}^{5000} R'(x)\,dx$?

54. Si $f(x)$ es la pendiente de un sendero a una distancia de x millas del principio del mismo, ¿qué representa $\int_3^5 f(x)\,dx$?

55. ¿Si x se mide en metros y $f(x)$ en newtons, ¿cuáles son las unidades para $\int_0^{100} f(x)\,dx$?

56. Si las unidades para x son pies y las unidades para $a(x)$ son libras por pie, ¿cuáles son las unidades para da/dx? ¿Qué unidades tiene $\int_2^8 a(x)\,dx$?

57–58 Se da la función de velocidad (en metros por segundo) para una partícula que se mueve a lo largo de una recta. Encuentre (a) el desplazamiento, y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo dado.

57. $v(t) = 3t - 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

58. $v(t) = t^2 - 2t - 8, \quad 1 \leqslant t \leqslant 6$

59–60 Se dan la función de aceleración (en m/s^2) y la velocidad inicial para una partícula que se desplaza a lo largo de una recta. Encuentre (a) la velocidad en el instante t y (b) la distancia recorrida durante el intervalo dado.

59. $a(t) = t + 4, \quad v(0) = 5, \quad 0 \leqslant t \leqslant 10$

60. $a(t) = 2t + 3, \quad v(0) = -4, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3$

---

61. Se da la densidad lineal de una varilla de longitud 4 m mediante $\rho(x) = 9 + 2\sqrt{x}$ medida en kilogramos por metro, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Encuentre la masa total de esta última.

62. Del fondo de un tanque de almacenamiento fluye agua en una cantidad de $r(t) = 200 - 4t$ litros por minuto, donde $0 \leqslant t \leqslant 50$. Encuentre la cantidad de agua que fluye del tanque durante los primeros 10 minutos.

63. La velocidad de un automóvil se leyó en su velocímetro a intervalos de diez segundos y se registró en una tabla. Use la regla del punto medio para estimar la distancia recorrida por el vehículo.

t (s)	v (mi/h)	t (s)	v (mi/h)
0	0	60	56
10	38	70	53
20	52	80	50
30	58	90	47
40	55	100	45
50	51		

64. Suponga que un volcán hace erupción y en la tabla se proporcionan las lecturas de la cantidad a la que se expelen materiales sólidos hacia la atmósfera. El tiempo t se mide en segundos y las unidades para $r(t)$ son toneladas métricas por segundo.

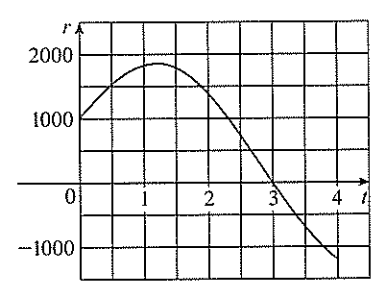
t	0	1	2	3	4	5	6
$r(t)$	2	10	24	36	46	54	60

(a) Dé estimaciones superiores e inferiores para la cantidad $Q(6)$ de materiales expelidos una vez que transcurren 6 segundos.

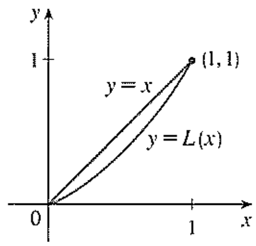
(b) Use la regla del punto medio para estimar $Q(6)$.

65. El costo marginal de fabricar x yardas de cierta tela es $C'(x) = 3 - 0.01x + 0.000006x^2$ (en dólares por yarda). Encuentre el incremento en el costo si el nivel de producción aumenta de 2 000 a 4 000 yardas.

66. Fluye agua hacia adentro y afuera de un tanque de almacenamiento. Se muestra una gráfica de la relación de cambio $r(t)$ del volumen de agua que hay en el tanque, en litros por día. Si la cantidad de agua que contiene el tanque en el instante $t = 0$ es 25 000 L, use la regla del punto medio para estimar la cantidad de agua cuatro días después.



67. Los economistas usan una distribución acumulada, llamada *curva de Lorenz*, para describir la distribución del ingreso entre las familias en un país dado. Típicamente, una curva de Lorenz se define en $[0, 1]$, con puntos extremos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ y es continua, creciente y cóncava hacia arriba. Los puntos de esta curva se determinan ordenando todas las familias según sus ingresos y calculando el porcentaje de ellas cuyos ingresos son menores que, o iguales a, un porcentaje dado del ingreso total del país. Por ejemplo, el punto $(a/100, b/100)$ está sobre la curva de Lorenz, si el $a\%$ inferior de las familias recibe menos del $b\%$ del ingreso total o un porcentaje igual a éste. Se tendría la *igualdad absoluta* de la distribución del ingreso si el $a\%$ inferior de las familias recibe el $a\%$ del ingreso, en cuyo caso la curva de Lorenz sería la recta $y = x$. El área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ mide en cuánto difiere la distribución del ingreso de la igualdad absoluta. El *coeficiente de desigualdad* es la relación del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$ al área debajo de $y = x$.



(a) Demuestre que el coeficiente de desigualdad es el doble del área entre la curva de Lorenz y la recta $y = x$; es decir, demuestre que

$$\text{coeficiente de desigualdad} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(b) La distribución del ingreso para cierto país se representa mediante la curva de Lorenz definida por la ecuación

$$L(x) = \tfrac{5}{12}x^2 + \tfrac{7}{12}x$$

¿Cuál es el porcentaje del ingreso total recibido por el 50% inferior de las familias? Encuentre el coeficiente de desigualdad.

68. El 7 de mayo de 1992, el trasbordador espacial *Endeavour* fue lanzado en la misión STS-49, cuya finalidad fue instalar un nuevo motor de impulso en el perigeo en un satélite Intelsat de comunicaciones. En la tabla se dan los datos de la velocidad del trasbordador entre el despegue y el desprendimiento de los cohetes auxiliares de combustible sólido.

Hecho	Tiempo (s)	Velocidad (pies/s)
Lanzamiento	0	0
Inicio de la maniobra de giro alrededor del eje	10	185
Fin de la maniobra de giro alrededor del eje	15	319
Estrangulación al 89%	20	447
Estrangulación al 67%	32	742
Estrangulación al 104%	59	1325
Presión dinámica máxima	62	1445
Separación del cohete auxiliar de combustible sólido	125	4151

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de tercer grado.

(b) Use el modelo del inciso (a) para estimar la altura alcanzada por el *Endeavour*, 125 segundos después del despegue.

REDACCIÓN DE PROYECTO

NEWTON, LEIBNIZ Y LA INVENCIÓN DEL CÁLCULO

Los inventores del cálculo fueron sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Pero las ideas básicas detrás de la integración fueron investigadas hace 2500 años por los antiguos griegos, como Eudoxo y Arquímedes, y que Pierre Fermat (1601-1665), Isaac Barrow (1630-1677) y otros fueron los pioneros en hallar tangentes. Barrow, el profesor de Newton en Cambridge, fue el primero en comprender la relación inversa entre la derivación y la integración. Lo que Newton y Leibniz hicieron fue usar esta relación, en la forma del teorema fundamental del cálculo, para convertir este último en una disciplina matemática sistemática. En este sentido es que se da a Newton y Leibniz el crédito por la invención del cálculo.

Lea acerca de las colaboraciones de estos hombres en una o más de las referencias que se proporcionan en la bibliografía y escriba un informe sobre uno de los tres temas siguientes. Puede incluir detalles biográficos, pero el reporte debe concentrarse en una descripción, con cierto detalle, de los métodos y notaciones. En particular, consulte uno de los libros fuente, en los cuales se dan extractos de las publicaciones originales de Newton y Leibniz, traducidas del latín al inglés.

- El papel de Newton en el desarrollo del cálculo.
- El papel de Leibniz en el desarrollo del cálculo.
- La controversia entre los seguidores de Newton y los de Leibniz sobre la prioridad en la invención del cálculo.

Bibliografía

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics*, Nueva York: John Wiley, 1987, capítulo 19.

2. Carl Boyer, *The History of the Calculus and Its Conceptual Development*, Nueva York: Dover, 1959, capítulo V.
3. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979, capítulos 8 y 9.
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990, Capítulo 11.
5. C. C. Gillispie, ed., *Dictionary of Scientific Biography*, Nueva York: Scribner's, 1974. Véase el artículo sobre Leibniz escrito por Joseph Hofmann, en el volumen VIII, y el artículo sobre Newton escrito por I. B. Cohen, en el volumen X.
6. Victor Katz, *A History of Mathematics: An Introduction*, Nueva York: Harper-Collins, 1993, capítulo 12.
7. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972, capítulo 17.

Libros fuente

1. John Fauvel y Jeremy Gray, eds., *The History of Mathematics: A Reader*, Londres: MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
2. D. E. Smith, ed., *A Sourcebook in Mathematics*, Londres, MacMillan Press, 1987, capítulos 12 y 13.
3. D. J. Struik, ed., *A Sourcebook in Mathematics, 1200-1800*, Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1969, capítulo V.

5.5 LA REGLA DE LA SUSTITUCIÓN

En virtud del teorema fundamental, es importante poder hallar antiderivadas. Pero nuestras fórmulas de antiderivación no indican cómo evaluar integrales como

$$\boxed{1} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

Para hallar esta integral, aplique la estrategia para la solución de problemas de *introducir algo adicional*. En este caso, el "algo adicional" es una nueva variable; cambie de una variable x a una variable u. Suponga que hace que u sea la cantidad debajo del signo integral de (1), $u = 1 + x^2$. En tal caso la diferencial de u es $du = 2x\,dx$. Advierta que si la dx en la notación para una integral se interpretara como una diferencial, después en (1) se tendría la diferencial $2x\,dx$ y, por consiguiente, desde un punto de vista formal y sin justificar este cálculo, podría escribir

En la sección 3.10 se definieron las diferenciales. Si $u = f(x)$, por lo tanto

$$du = f'(x)\,dx$$

$$\boxed{2} \qquad \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{1+x^2}\,2x\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$
$$= \tfrac{2}{3}u^{3/2} + C = \tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

Pero ahora podría comprobar que tiene la respuesta correcta aplicando la regla de la cadena para derivar la función final de la ecuación (2):

$$\frac{d}{dx}\left[\tfrac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C\right] = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x = 2x\sqrt{x^2+1}$$

En general, este método funciona siempre que tiene una integral que pueda escribir en la forma $\int f(g(x))g'(x)\,dx$. Observe que si $F' = f$, en consecuencia

$$\boxed{3} \qquad \int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$$

porque, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x)$$

Si hace el "cambio de variable" o la "sustitución" $u = g(x)$, en seguida, a partir de la ecuación (3) tiene

$$\int F'(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int F'(u)\,du$$

o bien, si se escribe $F' = f$ se obtiene

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Por lo tanto, ha probado la regla siguiente:

$\boxed{4}$ **REGLA DE SUSTITUCIÓN** Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I, y f es continua sobre I, en tal caso

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Advierta que se probó la regla de sustitución para la integración aplicando la regla de la cadena para la derivación. Asimismo, observe que, si $u = g(x)$, por lo tanto $du = g'(x)\,dx$, de modo que una manera de recordar la regla de sustitución es pensar en dx y du de (4) como diferenciales.

Así pues, la regla de sustitución expresa: **es permitido operar con dx y du después de los signos de integral como si fueran diferenciales.**

EJEMPLO 1 Encuentre $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$.

SOLUCIÓN Haga la sustitución $u = x^4 + 2$ porque su diferencial es $du = 4x^3\,dx$, la cual, aparte del factor constante 4, aparece en la integral. De este modo, con $x^3\,dx = \frac{1}{4}\,du$ y la regla de sustitución, tiene

$$\begin{aligned}\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx &= \int \cos u \cdot \tfrac{1}{4}\,du = \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} u + C \\ &= \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x^4 + 2) + C\end{aligned}$$

Comprueba la respuesta al derivarla.

Advierta que en la etapa final tuvo que regresar a la variable original x. □

La idea detrás de la regla de sustitución es reemplazar una integral relativamente complicada por una más sencilla. Esto se lleva a cabo pasando de la variable original x a una nueva variable u que sea función de x. Así, en el ejemplo 1 reemplace la integral $\int x^3\cos(x^4 + 2)\,dx$ con la integral más sencilla $\frac{1}{4}\int \cos u\,du$.

El reto principal en la aplicación de la regla de sustitución es pensar en una sustitución apropiada. Intente elegir u como alguna función en el integrando cuya diferencial también se presente (excepto para un factor constante). Este fue el caso en el ejemplo 1. Si no es posible, escoja u como alguna parte complicada del integrando (tal vez la función interna de una función compuesta). Encontrar la sustitución correcta conlleva algo de arte. No es raro que la conjetura sea errónea; si su primera suposición no funciona, intente con otra.

EJEMPLO 2 Evalúe $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUCIÓN 1 Sea $u = 2x + 1$. Por lo tanto $du = 2\,dx$, de modo que $dx = du/2$. De esta forma, la regla de sustitución da

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C$$
$$= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

SOLUCIÓN 2 Otra sustitución posible es $u = \sqrt{2x+1}$. En tal caso

$$du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} \qquad \text{de suerte que} \qquad dx = \sqrt{2x+1}\,du = u\,du$$

(O bien, observe que $u^2 = 2x + 1$, de suerte que $2u\,du = 2\,dx$.) En consecuencia,

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int u\cdot u\,du = \int u^2\,du$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C$$

□

EJEMPLO 3 Encuentre $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$.

SOLUCIÓN Sea $u = 1 - 4x^2$. Después $du = -8x\,dx$, de manera que $x\,dx = -\frac{1}{8}\,du$ y

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = -\tfrac{1}{8}\int u^{-1/2}\,du$$
$$= -\tfrac{1}{8}(2\sqrt{u}) + C = -\tfrac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + C$$

□

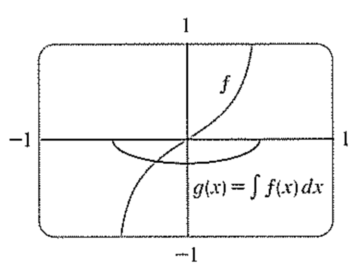


FIGURA 1

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$g(x) = \int f(x)\,dx = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$

La respuesta para el problema 3 puede comprobarse por derivación pero, en lugar de ello, hágalo de manera visual con una gráfica. En la figura 1 se usa una computadora para trazar las gráficas del integrando $f(x) = x/\sqrt{1-4x^2}$ y de su integral indefinida $g(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2}$ (tome el caso $C = 0$). Advierta que $g(x)$ decrece cuando $f(x)$ es negativa, crece cuando $f(x)$ es positiva y tiene su valor mínimo cuando $f(x) = 0$. De modo que parece razonable, a partir de la evidencia gráfica, que g sea una antiderivada de f.

EJEMPLO 4 Calcule $\int e^{5x}\,dx$.

SOLUCIÓN Si hace $u = 5x$, en seguida $du = 5\,dx$, de modo que $dx = \frac{1}{5}\,du$. Por consiguiente

$$\int e^{5x}\,dx = \tfrac{1}{5}\int e^u\,du = \tfrac{1}{5}e^u + C = \tfrac{1}{5}e^{5x} + C$$

□

EJEMPLO 5 Calcule $\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx$.

SOLUCIÓN Una sustitución aceptable es más obvia si factoriza x^5 como $x^4 \cdot x$. Sea $u = 1 + x^2$. A continuación $du = 2x\,dx$, de modo que $x\,dx = du/2$. También, $x^2 = u - 1$, de modo que $x^4 = (u - 1)^2$:

$$\int \sqrt{1 + x^2}\, x^5\, dx = \int \sqrt{1 + x^2}\, x^4 \cdot x\, dx$$

$$= \int \sqrt{u}\,(u - 1)^2 \frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int \sqrt{u}\,(u^2 - 2u + 1)\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{7}u^{7/2} - 2 \cdot \tfrac{2}{5}u^{5/2} + \tfrac{2}{3}u^{3/2}\right) + C$$

$$= \tfrac{1}{7}(1 + x^2)^{7/2} - \tfrac{2}{5}(1 + x^2)^{5/2} + \tfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} + C$$

□

EJEMPLO 6 Calcule $\int \tan x\, dx$.

SOLUCIÓN En primer lugar, escriba la tangente en términos de seno y coseno:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Esto sugiere que debe sustituir $u = \cos x$, dado que entonces $du = -\operatorname{sen} x\, dx$ y, como consecuencia, $\operatorname{sen} x\, dx = -du$:

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du$$

$$= -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

□

Puesto que $-\ln|\cos x| = \ln(|\cos x|^{-1}) = \ln(1/|\cos x|) = \ln|\sec x|$, el resultado del ejemplo 6 también puede escribirse como

5
$$\boxed{\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + C}$$

INTEGRALES DEFINIDAS

Cuando se evalúa una integral *definida* por sustitución, se pueden aplicar dos métodos. Uno consiste en evaluar primero la integral indefinida y, enseguida, aplicar el teorema fundamental. Por ejemplo, si se usa el resultado del ejemplo 2, se tiene

$$\int_0^4 \sqrt{2x + 1}\, dx = \int \sqrt{2x + 1}\, dx\Big]_0^4 = \tfrac{1}{3}(2x + 1)^{3/2}\Big]_0^4$$

$$= \tfrac{1}{3}(9)^{3/2} - \tfrac{1}{3}(1)^{3/2} = \tfrac{1}{3}(27 - 1) = \tfrac{26}{3}$$

El otro método, que suele ser preferible, es cambiar los límites de integración cuando se cambia la variable.

En esta regla se afirma que cuando se usa una sustitución en una integral definida, debe poner todo en términos de la nueva variable u, no sólo x y dx, sino también los límites de integración. Los nuevos límites de integración son los valores de u que corresponden a $x = a$ y $x = b$.

6 REGLA DE SUSTITUCIÓN PARA INTEGRALES DEFINIDAS Si g' es continua en $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

DEMOSTRACIÓN Sea F una antiderivada de f. En consecuencia, por (3), $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$, de modo que de acuerdo con la parte 2 del teorema fundamental

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))\Big]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Pero, si se aplica TFC2 una segunda vez, también resulta

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = F(u)\Big]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$ □

EJEMPLO 7 Evalúe $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx$ usando (6).

SOLUCIÓN Si se aplica la sustitución a partir de la solución 1 del ejemplo 2, se tiene $u = 2x + 1$ y $dx = du/2$. Para encontrar los nuevos límites de integración, advierta que

cuando $x = 0$, $u = 2(0) + 1 = 1$ y cuando $x = 4$, $u = 2(4) + 1 = 9$

Por lo tanto,

$$\int_0^4 \sqrt{2x+1}\,dx = \int_1^9 \tfrac{1}{2}\sqrt{u}\,du = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}u^{3/2}\Big]_1^9$$

$$= \tfrac{1}{3}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \tfrac{26}{3}$$

Observe que al usar (6) *no* se regresa a la variable x después de integrar. Sencillamente evaluó la expresión en u entre los valores apropiados de u. □

En la figura 2 se muestra la interpretación geométrica del ejemplo 7. La sustitución $u = 2x + 1$ alarga el intervalo $[0, 4]$ con un factor de 2 y lo traslada hacia la derecha una unidad. La Regla de Sustitución hace ver que las dos áreas son iguales.

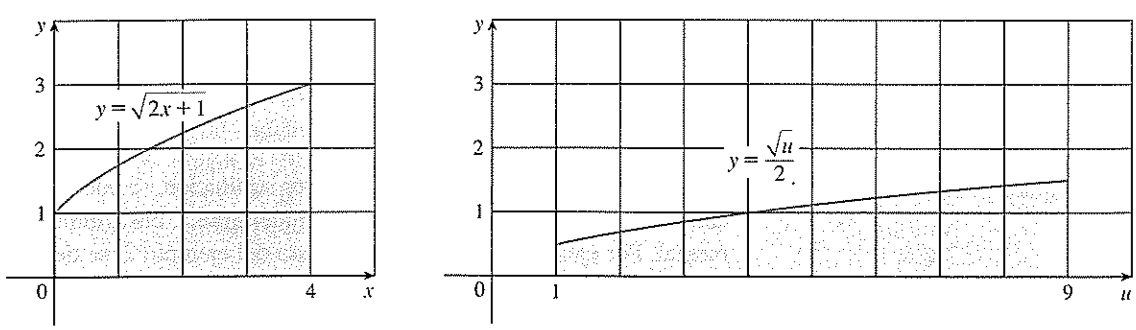


FIGURA 2

EJEMPLO 8 Evalúe $\int_1^2 \dfrac{dx}{(3-5x)^2}$.

La integral dada en el ejemplo 8 es una abreviatura para

$$\int_1^2 \frac{1}{(3-5x)^2}\,dx$$

SOLUCIÓN Sea $u = 3 - 5x$. A continuación $du = -5\,dx$, de modo que $dx = -du/5$.

Cuando $x = 1$, $u = -2$ y cuando $x = 2$, $u = -7$. Por esto

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3-5x)^2} = -\frac{1}{5}\int_{-2}^{-7} \frac{du}{u^2}$$

$$= -\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{u}\right]_{-2}^{-7} = \frac{1}{5u}\Bigg]_{-2}^{-7}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{7} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{14}$$ □

EJEMPLO 9 Calcule $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

SOLUCIÓN Haga $u = \ln x$ porque su diferencial $du = dx/x$ se presenta en la integral. Cuando $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; cuando $x = e$, $u = \ln e = 1$. De modo que

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\Bigg]_0^1 = \frac{1}{2}$$ □

Como la función $f(x) = (\ln x)/x$ en el ejemplo 9 es positiva para $x > 1$, la integral representa el área de la región sombreada en la figura 3.

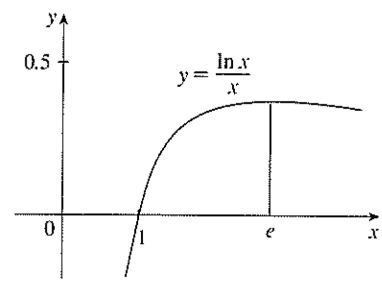


FIGURA 3

SIMETRÍA

En el teorema siguiente se usa la regla de sustitución para las integrales definidas, (6), con el fin de simplificar el cálculo de integrales de funciones que poseen propiedades de simetría.

> $\boxed{7}$ **INTEGRALES DE FUNCIONES SIMÉTRICAS** Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$.
>
> (a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
>
> (b) Si f es impar $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN Separe la integral en dos:

$$\boxed{8} \quad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

En la primera integral de la extrema derecha haga la sustitución $u = -x$. Después $du = -dx$ y, cuando $x = -a$, $u = a$. Por consiguiente,

$$-\int_0^{-a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(-u)(-du) = \int_0^a f(-u)\,du$$

con lo cual, la ecuación 8 se convierte en

$$\boxed{9} \qquad \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx$$

(a) Si f es par, entonces $f(-u) = f(u)$, de esa manera la ecuación 9 da

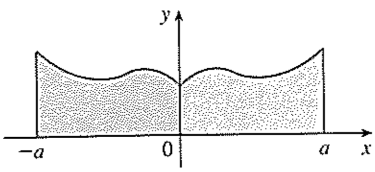
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Si f es impar, entonces $f(-u) = -f(u)$ y la ecuación 9 da

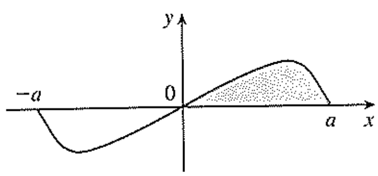
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

□

La figura 4 ilustra el teorema 7. Para el caso en que f es positiva y par, en el inciso (a) se hace ver que el área debajo de $y = f(x)$ desde $-a$ hasta a es el doble del área desde 0 hasta a, en virtud de la simetría. Recuerde que una integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se puede expresar como el área arriba del eje x y debajo de $y = f(x)$ menos el área debajo del eje x y arriba de la curva. Por esto, en el inciso (b) se hace ver que el área es 0 porque las áreas se cancelan.



(a) f par, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$



(b) f impar, $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

FIGURA 4

EJEMPLO 10 Dado que $f(x) = x^6 + 1$ satisface $f(-x) = f(x)$, es par y, por consiguiente,

$$\int_{-2}^{2} (x^6 + 1)\,dx = 2\int_0^2 (x^6 + 1)\,dx$$

$$= 2\left[\tfrac{1}{7}x^7 + x\right]_0^2 = 2\left(\tfrac{128}{7} + 2\right) = \tfrac{284}{7}$$

□

EJEMPLO 11 Como $f(x) = (\tan x)/(1 + x^2 + x^4)$ satisface $f(-x) = -f(x)$, es impar y, de este modo,

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan x}{1 + x^2 + x^4}\,dx = 0$$

□

5.5 EJERCICIOS

1–6 Evalúe la integral efectuando la sustitución dada.

1. $\int e^{-x}\,dx$, $u = -x$

2. $\int x^3(2 + x^4)^5\,dx$, $u = 2 + x^4$

3. $\int x^2\sqrt{x^3 + 1}\,dx$, $u = x^3 + 1$

4. $\int \dfrac{dt}{(1 - 6t)^4}$, $u = 1 - 6t$

5. $\int \cos^3\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta$, $u = \cos\theta$

6. $\int \dfrac{\sec^2(1/x)}{x^2}\,dx$, $u - 1/x$

7–46 Evalúe la integral indefinida.

7. $\int x \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\,dx$

9. $\int (3x - 2)^{20}\,dx$

10. $\int (3t + 2)^{2.4}\,dt$

11. $\int (x + 1)\sqrt{2x + x^2}\,dx$

12. $\int \dfrac{x}{(x^2 + 1)^2}\,dx$

13. $\int \dfrac{dx}{5 - 3x}$

14. $\int e^x \operatorname{sen}(e^x)\,dx$

15. $\int \operatorname{sen} \pi t\,dt$

16. $\int \dfrac{x}{x^2 + 1}\,dx$

17. $\int \dfrac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}}\,dx$

18. $\int \sec 2\theta \tan 2\theta\,d\theta$

19. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

20. $\int \frac{dx}{ax+b}\ (a \neq 0)$

21. $\int \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

22. $\int \sqrt{x}\,\operatorname{sen}(1+x^{3/2})\,dx$

23. $\int \cos\theta\,\operatorname{sen}^6\theta\,d\theta$

24. $\int (1+\tan\theta)^5\sec^2\theta\,d\theta$

25. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

26. $\int e^{\cos t}\operatorname{sen} t\,dt$

27. $\int \frac{z^2}{\sqrt[3]{1+z^3}}\,dz$

28. $\int \frac{\tan^{-1}x}{1+x^2}\,dx$

29. $\int e^{\tan x}\sec^2 x\,dx$

30. $\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sin}^2 x}\,dx$

32. $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

33. $\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

34. $\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}\,dx$

35. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$

36. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$

37. $\int \cot x\,dx$

38. $\int \frac{dt}{\cos^2 t\sqrt{1+\tan t}}$

39. $\int \sec^3 x\tan x\,dx$

40. $\int \operatorname{sen} t\,\sec^2(\cos t)\,dt$

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\operatorname{sen}^{-1}x}$

42. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

43. $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$

44. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}\,dx$

45. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x+2}}\,dx$

46. $\int x^3\sqrt{x^2+1}\,dx$

47–50 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable, dibujando la función y su antiderivada (tome $C = 0$).

47. $\int x(x^2-1)^3\,dx$

48. $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

49. $\int \operatorname{sen}^3 x\cos x\,dx$

50. $\int \tan^2\theta\sec^2\theta\,d\theta$

51–70 Evalúe la integral definida.

51. $\int_0^2 (x-1)^{25}\,dx$

52. $\int_0^7 \sqrt{4+3x}\,dx$

53. $\int_0^1 x^2(1+2x^3)^5\,dx$

54. $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\cos(x^2)\,dx$

55. $\int_0^{\pi} \sec^2(t/4)\,dt$

56. $\int_{1/6}^{1/2} \csc\pi t\,\cot\pi t\,dt$

57. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} \tan^3\theta\,d\theta$

58. $\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx$

59. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

60. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+x^6}\,dx$

61. $\int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$

62. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)\,dx$

63. $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx\ (a>0)$

64. $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

65. $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

66. $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$

67. $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

68. $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

69. $\int_0^1 \frac{e^z+1}{e^z+z}\,dz$

70. $\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$

71–72 Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva dada. Enseguida encuentre el área exacta.

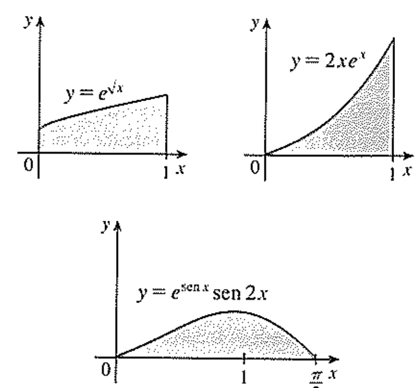
71. $y = \sqrt{2x+1},\quad 0 \leq x \leq 1$

72. $y = 2\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x,\quad 0 \leq x \leq \pi$

73. Evalúe $\int_{-2}^{2} (x+3)\sqrt{4-x^2}\,dx$ al escribirla como una suma de dos integrales e interpretar una de ellas en términos de un área.

74. Evalúe $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$ al efectuar una sustitución e interpretar la integral resultante en términos de un área.

75. ¿Cuáles de las áreas siguientes son iguales? ¿Por qué?



76. Un modelo de rapidez de metabolismo fundamental, en kcal/h de un hombre joven es $R(t) = 85 - 0.18\cos(\pi t/12)$, donde t es el tiempo en horas a partir de las 5:00 AM. ¿Cuál es el metabolismo fundamenta total de este hombre, $\int_0^{24} R(t)dt$, en un periodo de 24 horas?

77. Un tanque de almacenamiento de petróleo se rompe en $t = 0$ y el petróleo se fuga del tanque en una proporción de $r(t) = 100^{e^{-0.01t}}$ litros por cada minuto. ¿Cuánto petróleo se escapa durante la primera hora?

78. Una población de bacterias se inicia con 400 ejemplares y crece con una rapidez de $r(t) = (450.268)e^{1.12567t}$ bacterias por hora. ¿Cuántos especímenes habrá después de tres horas?

79. La respiración es cíclica y un ciclo respiratorio completo —desde el principio de la inhalación hasta el final de la exhalación— requiere alrededor de 5 s. El gasto máximo de aire que entra en los pulmones es de más o menos 0.5 L/s. Esto explica en parte por qué a menudo se ha usado la función $f(t) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2\pi t/5)$ para modelar el gasto de aire hacia los pulmones. Úselo para hallar el volumen de aire inhalado en los pulmones en el tiempo t.

80. Alabama Instruments Company ha montado una línea de producción para fabricar una calculadora nueva. El índice de producción de estas calculadoras, después de t semanas es

$$\frac{dx}{dt} = 5000\left(1 - \frac{100}{(t+10)^2}\right) \text{ calculadoras/semana}$$

(Advierta que la producción tiende a 5 000 por semana a medida que avanza el tiempo, pero que la producción inicial es más baja debido a que los trabajadores no están familiarizados con las técnicas nuevas.) Encuentre la cantidad de calculadoras producidas desde el principio de la tercera semana hasta el final de la cuarta.

81. Si f es continua y $\int_0^4 f(x)\,dx = 10$, encuentre $\int_0^2 f(2x)\,dx$.

82. Si f es continua y $\int_0^9 f(x)\,dx = 4$, encuentre $\int_0^3 xf(x^2)\,dx$.

83. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$ y $0 < a < b$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

84. Si f es continua sobre $\mathbb{R}$, demuestre que

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$$

Para el caso donde $f(x) \geqslant 0$, dibuje un diagrama para interpretar geométricamente esta ecuación como una igualdad de áreas.

85. Si a y b son números positivos, demuestre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b\,dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a\,dx$$

86. Si f es continua en $[0, \pi]$, utilice la sustitución $u = \pi - x$ para demostrar que

$$\int_0^\pi xf(\mathrm{sen}\,x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\mathrm{sen}\,x)\,dx$$

87. Mediante el ejercicio 86 calcule la integral

$$\int_0^\pi \frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

88. (a) Si f es continua, comprobar que

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi/2} f(\mathrm{sen}\,x)\,dx$$

(b) Aplique el inciso (a) para valorar

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx \text{ y } \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^2 x\,dx$$

5 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) Escriba una expresión para una suma de Riemann de una función f. Explique el significado de la notación que use.
(b) Si $f(x) \geqslant 0$, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.
(c) Si $f(x)$ toma tanto valores positivos como negativos, ¿cuál es la interpretación geométrica de una suma de Riemann? Ilustre la respuesta con un diagrama.

2. (a) Escriba la definición de la integral definida de una función continua, desde a hasta b.
(b) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x) \geqslant 0$?
(c) ¿Cuál es la interpretación geométrica de $\int_a^b f(x)\,dx$ si $f(x)$ toma valores tanto positivos como negativos? Ilustre la respuesta con un diagrama.

3. Enuncie las dos partes del teorema fundamental del cálculo.

4. (a) Enuncie el teorema del cambio total.
(b) Si $r(t)$ es la proporción a la cual el agua fluye hacia un depósito, ¿qué representa $\int_{t_1}^{t_2} r(t)\,dt$?

5. Suponga que una partícula se mueve hacia adelante y hacia atrás a lo largo de una recta con una velocidad $v(t)$, medida en pies por segundo, y una aceleración $a(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} v(t)\,dt$?
(b) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} |v(t)|\,dt$?
(c) ¿Cuál es el significado de $\int_{60}^{120} a(t)\,dt$?

6. (a) Explique el significado de la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.
(b) ¿Cuál es la relación entre la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ y la integral indefinida $\int f(x)\,dx$?

7. Explique con exactitud qué significa la proposición de que "la derivación y la integración son procesos inversos".

8. Enuncie la regla de sustitución. En la práctica, ¿cómo puede usarla?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Si f y g son continuas sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b [f(x)g(x)]\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$$

3. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b 5f(x)\,dx = 5\int_a^b f(x)\,dx$$

4. Si f es continua sobre $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b xf(x)\,dx = x\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Si f es continua sobre $[a, b]$ y $f(x) \geqslant 0$ entonces

$$\int_a^b \sqrt{f(x)}\,dx = \sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$$

6. Si f' es continua sobre $[1, 3]$, entonces $\int_1^3 f'(v)\,dv = f(3) - f(1)$.

7. Si f y g son continuas y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a \leqslant x \leqslant b$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

8. Si f y g son derivables y $f(x) \geqslant g(x)$ para $a < x < b$, entonces $f'(x) \geqslant g'(x)$ para $a < x < b$.

9. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(x^5 - 6x^9 + \frac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^2}\right) dx = 0$

10. $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^2 + bx + c)\,dx = 2\int_0^5 (ax^2 + c)\,dx$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{x^4}\,dx = -\frac{3}{8}$

12. La expresión $\int_0^2 (x - x^3)\,dx$ representa el área bajo la curva $y = x - x^3$ de 0 a 2.

13. Todas las funciones continuas tienen derivadas.

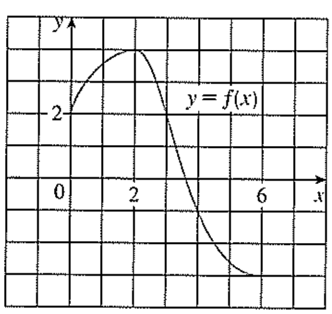
14. Todas las funciones continuas tienen antiderivadas.

15. Si f es continua en $[a, b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(x)$$

EJERCICIOS

1. Use la gráfica dada de f para hallar la suma de Riemann con seis subintervalos. Tome los puntos muestra como (a) los puntos extremos de la izquierda y (b) los puntos medios. En cada caso, dibuje un diagrama y explique qué representa la suma de Riemann.



2. (a) Evalúe la suma de Riemann para

$$f(x) = x^2 - x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

con cuatro subintervalos; tome los puntos extremos de la derecha como puntos muestra. Con ayuda de un diagrama explique qué representa la suma de Riemann.

(b) Use la definición de integral definida (con los puntos extremos de la derecha) para calcular el valor de la integral

$$\int_0^2 (x^2 - x)\,dx$$

(c) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (b).

(d) Dibuje un diagrama para explicar el significado geométrico de la integral del inciso (b).

3. Evalúe

$$\int_0^1 \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right) dx$$

interpretándola en términos de áreas.

4. Exprese

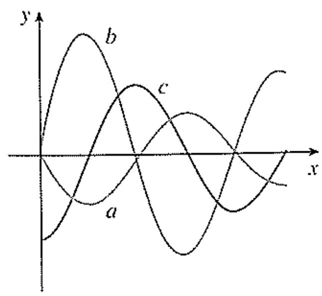
$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sen} x_i\,\Delta x$$

como una integral definida sobre el intervalo $[0, \pi]$ y, a continuación, evalúe la integral.

5. Si $\int_0^6 f(x)\,dx = 10$ y $\int_0^4 f(x)\,dx = 7$, encuentre $\int_4^6 f(x)\,dx$.

CAS 6. (a) Escriba $\int_1^5 (x + 2x^5)\,dx$ como un límite de sumas de Riemann, tomando los puntos extremos de la derecha como los puntos muestra. Utilice un sistema algebraico para computadora para evaluar la suma y calcular el límite.
(b) Aplique el teorema fundamental para comprobar la respuesta al inciso (a).

7. En la figura se muestran las gráficas de f, f' y $\int_0^x f(t)\,dt$. Identifique cada gráfica y explique sus selecciones



8. Evalúe:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dx}\left(e^{\arctan x}\right) dx$ (b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 e^{\arctan x}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{\arctan t}\,dt$

9–38 Evalúe la integral cuando exista.

9. $\displaystyle\int_1^2 (8x^3 + 3x^2)\,dx$

10. $\displaystyle\int_0^T (x^4 - 8x + 7)\,dx$

11. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x^9)\,dx$

12. $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)^9\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{u} - 2u^2}{u}\,du$

14. $\displaystyle\int_0^1 (\sqrt[4]{u} + 1)^2\,du$

15. $\displaystyle\int_0^1 y(y^2 + 1)^5\,dy$

16. $\displaystyle\int_0^2 y^2\sqrt{1 + y^3}\,dy$

17. $\displaystyle\int_1^5 \frac{dt}{(t - 4)^2}$

18. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(3\pi t)\,dt$

19. $\displaystyle\int_0^1 v^2\cos(v^3)\,dv$

20. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{t^4 \tan t}{2 + \cos t}\,dt$

22. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx$

24. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{x}{x^2 - 4}\,dx$

25. $\displaystyle\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}}\,dx$

26. $\displaystyle\int \frac{\csc^2 x}{1 + \cot x}\,dx$

27. $\displaystyle\int \operatorname{sen} \pi t \cos \pi t\,dt$

28. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x \cos(\cos x)\,dx$

29. $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

30. $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

31. $\displaystyle\int \tan x \ln(\cos x)\,dx$

32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\,dx$

33. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1 + x^4}\,dx$

34. $\displaystyle\int \operatorname{senh}(1 + 4x)\,dx$

35. $\displaystyle\int \frac{\sec\theta\,\tan\theta}{1 + \sec\theta}\,d\theta$

36. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (1 + \tan t)^3 \sec^2 t\,dt$

37. $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 4|\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^4 |\sqrt{x} - 1|\,dx$

39–40 Evalúe la integral indefinida. Ilustre y compruebe que su respuesta es razonable trazando las gráficas de la función y de su antiderivada (tome $C = 0$).

39. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}\,dx$

40. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx$

41. Use una gráfica para dar una estimación aproximada del área de la región que se encuentra debajo de la curva $y = x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 4$. Enseguida, encuentre el área exacta.

42. Dibuje la función $f(x) = \cos^2 x\,\operatorname{sen}^3 x$ y use esa gráfica para inferir el valor de la integral $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. A continuación evalúe la integral para confirmar su conjetura.

43–48 Encuentre la derivada de la función.

43. $\displaystyle F(x) = \int_0^x \frac{t^2}{1 + t^2}\,dt$

44. $\displaystyle F(x) = \int_x^1 \sqrt{t + \operatorname{sen} t}\,dt$

45. $\displaystyle g(x) = \int_0^{x^4} \cos(t^2)\,dt$

46. $\displaystyle g(x) = \int_1^{\operatorname{sen} x} \frac{1 - t^2}{1 + t^4}\,dt$

47. $\displaystyle y = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t}\,dt$

48. $\displaystyle y = \int_{2x}^{3x+1} \operatorname{sen}(t^4)\,dt$

49–50 Mediante la propiedad 8 de las integrales estime el valor de la integral.

49. $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x^2 + 3}\,dx$

50. $\displaystyle\int_3^5 \frac{1}{x + 1}\,dx$

51–54 Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad.

51. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cos x\,dx \le \frac{1}{3}$

52. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

53. $\displaystyle\int_0^1 e^x \cos x\,dx \le e - 1$

54. $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{sen}^{-1} x\,dx \le \pi/4$

55. Use la regla del punto medio $n = 6$ para obtener un valor aproximado de $\int_0^3 \operatorname{sen}(x^3)\,dx$.

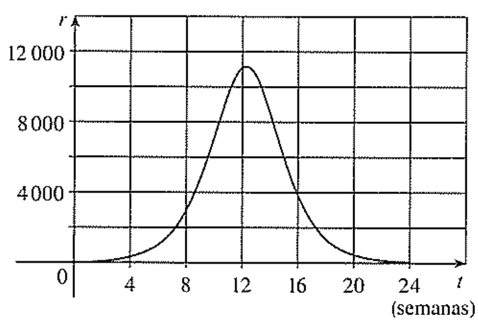
56. Una partícula se mueve a lo largo de una recta con la función de velocidad $v(t) = t^2 - t$, donde v se mide en metros por segundo. Encuentre (a) el desplazamiento y (b) la distancia recorrida por la partícula durante el intervalo $[0, 5]$.

57. Sea $r(t)$ la rapidez a la cual el petróleo del mundo es consumido, donde t se mide en años y empieza en $t = 0$ el primero de enero de 2000, y $r(t)$ se mide en barriles por año. ¿Qué representa $\int_0^8 r(t)\,dt$?

58. Se utiliza una pistola de radar para registrar la rapidez de un corredor en los tiempos que se listan en la tabla siguiente. Aplique la regla del punto medio para estimar la distancia del corredor cubierta durante esos 5 segundos.

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	3.0	10.51
0.5	4.67	3.5	10.67
1.0	7.34	4.0	10.76
1.5	8.86	4.5	10.81
2.0	9.73	5.0	10.81
2.5	10.22		

59. Una población de abejas aumentó en una proporción de $r(t)$ insectos por semana, donde la gráfica de r es como se ilustra. Use la regla del punto medio junto con seis subintervalos para estimar el aumento en la población de abejas durante las primeras 24 semanas.



60. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -x - 1 & \text{si } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ -\sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Evalúe $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ mediante la interpretación de la integral como una diferencia de áreas.

61. Si f es continua y $\int_0^2 f(x)\,dx = 6$, valore $\int_0^{\pi/2} f(2 \operatorname{sen} \theta) \cos \theta\, d\theta$.

62. En la sección 5.3 se introdujo la función de Fresnel $S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2)\,dt$. En su teoría de la difracción de las ondas luminosas, Fresnel también usó la función

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\,dt$$

(a) ¿Sobre cuáles intervalos C es creciente?

(b) ¿Sobre cuáles intervalos C es cóncava hacia arriba?

CAS (c) Use una gráfica para resolver la ecuación siguiente, correcta hasta dos cifras decimales:

$$\int_0^x \cos(\pi t^2/2)\,dt = 0.7$$

CAS (d) Dibuje C y S en la misma pantalla. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

63. Estime el valor del número c tal que el área bajo la curva $y = \operatorname{senh} cx$ entre $x = 0$ y $x = 1$ es igual a 1.

64. Suponga que en un inicio la temperatura en una varilla larga y delgada que se encuentra colocada a lo largo del eje x es $C/(2a)$, si $|x| \leqslant a$, y 0, si $|x| > a$. Se puede demostrar que si la difusividad calorífica de la varilla es k, por lo tanto la temperatura de esa varilla en el punto x, en el instante t, es

$$T(x, t) = \frac{C}{a\sqrt{4\pi kt}} \int_0^a e^{-(x-u)^2/(4kt)}\,du$$

Para hallar la distribución de temperaturas que se produce a partir de un punto caliente inicial concentrado en el origen, necesita calcular

$$\lim_{a \to 0} T(x, t)$$

Use la regla de l'Hospital para hallar este límite.

65. Si f es una función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt = xe^{2x} + \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

para toda x, encuentre una fórmula explícita para $f(x)$.

66. Suponga que h es una función tal que $h(1) = -2$, $h'(1) = 2$, $h''(1) = 3$, $h(2) = 6$, $h'(2) = 5$, $h''(2) = 13$ y h'' dondequiera es continua. Evalúe $\int_1^2 h''(u)\,du$.

67. Si f' es continua en $[a, b]$, demuestre que

$$2\int_a^b f(x)f'(x)\,dx = [f(b)]^2 - [f(a)]^2$$

68. Determine $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1 + t^3}\,dt$.

69. Si f es continua en $[0, 1]$, demuestre que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f(1 - x)\,dx$$

70. Evalúe

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^9 + \left(\frac{2}{n}\right)^9 + \left(\frac{3}{n}\right)^9 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^9 \right]$$

71. Considere que f es continua, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(x) > 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Hallar el valor de la integral $\int_0^1 f^{-1}(y)dx$.

PROBLEMAS ADICIONALES

Antes de ver la solución del ejemplo siguiente, cúbrala e intente resolver el problema por usted mismo.

EJEMPLO 1 Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right)$.

SOLUCIÓN Empiece por tener un panorama preliminar de los ingredientes de la función. ¿Qué sucede al primer factor, $x/(x-3)$, cuando x tiende a 3? El numerador tiende a 3 y el denominador tiende a 0, de modo que

$$\frac{x}{x-3}\to\infty \quad \text{cuando} \quad x\to 3^+ \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{x-3}\to-\infty \quad \text{cuando} \quad x\to 3^-$$

El segundo factor tiende a $\int_3^3 (\operatorname{sen} t)/t\,dt$, lo cual es 0. No resulta claro qué sucede a la función como un todo. (Uno de los factores aumenta y el otro disminuye.) De modo que, ¿cómo proceder?

En la página 76 se analizan los principios de solución de problemas.

Uno de los principios de solución de problemas es *reconocer algo familiar*. ¿Existe una parte de la función que recuerde algo que ya ha visto? Bien, la integral

$$\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

tiene a x como su límite superior de integración y ese tipo de integral se presenta en la parte 1 del teorema fundamental del cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Esto sugiere que podría relacionarse con la derivación.

Una vez que empiece a pensar en la derivación, el denominador $(x-3)$ le recuerda algo más que debe de ser familiar: una de las formas de la definición de la derivada en el capítulo 2 es

$$F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}$$

y con $a=3$ esto se convierte en

$$F'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$

De modo que, ¿cuál es la función F en esta situación? Advierta que si define

$$F(x)=\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$$

por lo tanto $F(3)=0$. ¿Qué se puede decir acerca del factor x en el numerador? Esto es una situación irregular, de modo que sáquelo como factor y conjunte el cálculo:

Otro enfoque consiste en usar la regla de l'Hospital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\left(\frac{x}{x-3}\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right) &= \left(\lim_{x\to 3} x\right)\cdot\lim_{x\to 3}\frac{\displaystyle\int_3^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt}{x-3}\\ &= 3\lim_{x\to 3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\\ &= 3F'(3)\\ &= 3\,\frac{\operatorname{sen} 3}{3} \qquad \text{(TFC1)}\\ &= \operatorname{sen} 3\end{aligned}$$

□

PROBLEMAS ADICIONALES

PROBLEMAS

1. Si $x \operatorname{sen} \pi x = \int_0^{x^2} f(t)\,dt$, donde f es una función continua, encuentre $f(4)$.

2. Encuentre el valor mínimo del área bajo la curva $y = x + 1/x$ desde $x = a$ hasta $x = a + 1.5$ para toda $a > 0$.

3. Si f es una función derivable tal que $f(x)$ nunca es 0 y $\int_0^x f(t)\,dt = [f(x)]^2$ para toda x, encuentre f.

4. (a) Trace la gráfica de varios miembros de la familia de funciones $f(x) = (2cx - x^2)/c^3$ para $c > 0$ y vea las regiones limitadas por estas curvas y el eje x. Haga una conjetura en cuanto a cómo se relacionan las áreas de estas regiones.
(b) Pruebe su conjetura del inciso (a).
(c) Vea de nuevo las gráficas del inciso (a) y úselas para trazar la curva descrita por vértices (los puntos más altos) de la familia de funciones. ¿Puede conjeturar qué tipo de curva es ésta?
(d) Halle una ecuación para la curva que trazó en el inciso (c).

5. Si $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1 + t^3}}\,dt$, donde $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \operatorname{sen}(t^2)]\,dt$, encuentre $f'(\pi/2)$.

6. Si $f(x) = \int_0^x x^2 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$, halle $f'(x)$.

7. Evalúe $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 - \tan 2t)^{1/t}\,dt$.

8. En la figura se pueden ver dos regiones en el primer cuadrante: $A(t)$ es el área bajo la curva $y = \operatorname{sen}(x^2)$ desde 0 hasta t, y $B(t)$ es el área del triángulo con vértices O, P y $(t, 0)$. Calcule $\lim_{t \to 0^+} A(t)/B(t)$.

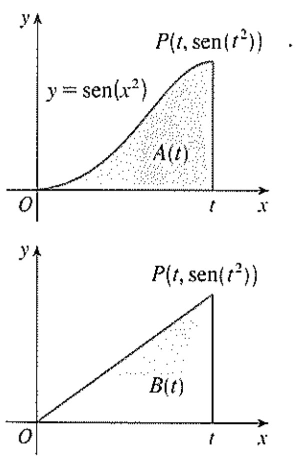


FIGURA PARA EL PROBLEMA 8

9. Encuentre el intervalo $[a, b]$ para el cual el valor de la integral $\int_a^b (2 + x - x^2)\,dx$ es un máximo.

10. Utilice una integral para estimar la suma $\sum_{i=1}^{10000} \sqrt{i}$.

11. (a) Evalúe $\int_0^n [\![x]\!]\,dx$, donde n es un entero positivo.
(b) Calcule $\int_a^b [\![x]\!]\,dx$, donde a y b son números reales con $0 \leq a < b$.

12. Encuentre $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1 + u^4}\,du \right) dt$.

13. Suponga que los coeficientes del polinomío cúbico $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ satisfacen la ecuación.

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} + \frac{d}{4} = 0$$

Demuestre que la ecuación $P(x) = 0$ tiene una raíz entre 0 y 1. ¿Puede generalizar este resultado para un polinomio de grado násimo?

14. En un evaporador se usa un disco circular y se hace girar en un plano vertical. Si debe estar parcialmente sumergido en el líquido de modo que se maximice el área humedecida expuesta del disco, demuestre que el centro de éste debe hallarse a una altura $r/\sqrt{1 + \pi^2}$ arriba de la superficie del líquido.

15. Demuestre que si f es continua, en tal caso $\int_0^x f(u)(x - u)\,du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)\,dt \right) du$.

16. En la figura se muestra una región que consta de todos los puntos dentro de un cuadrado que están más cerca del centro que de los lados del cuadrado. Encuentre el área de la región.

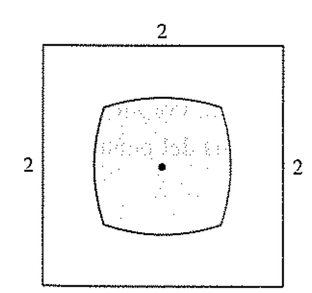


FIGURA PARA EL PROBLEMA 16

17. Evalúe $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right)$.

18. Para cualquier número c, permita que $f_c(x)$ sea el más pequeño de los dos números $(x - c)^2$ y $(x - c - 2)^2$. En tal caso, defina $g(c) = \int_0^1 f_c(x)\,dx$. Hallar los valores máximo y mínimo de $g(c)$ si $-2 \leq c \leq 2$.