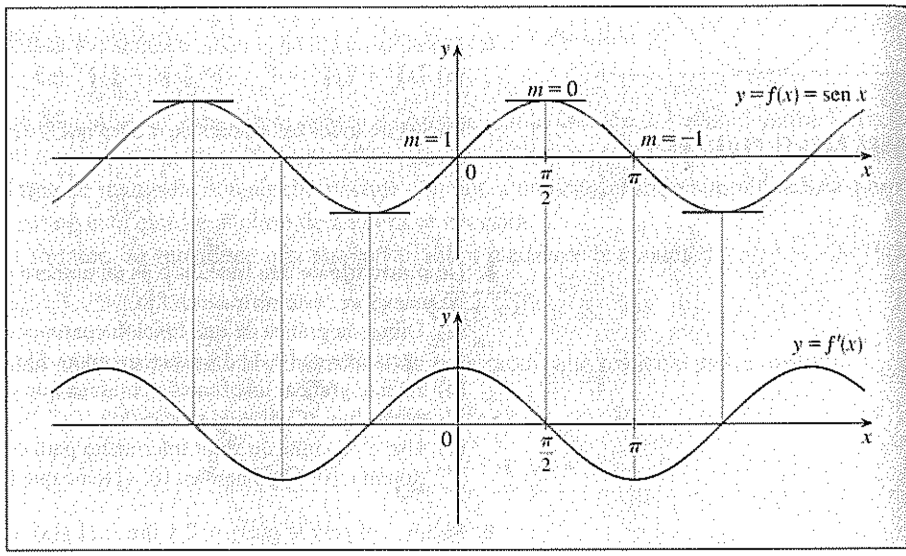
3

REGLAS DE DERIVACIÓN



Al medir las pendientes en puntos que se localizan en la curva seno obtiene claras evidencias de que la derivada de la función seno es la función coseno

Hasta aquí, ha visto cómo interpretar las derivadas como pendientes y relaciones de cambio y ha estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También ha aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y ha usado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviéra que aplicar la definición, de modo que, en este capítulo se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas, funciones exponenciales y logarítmicas y funciones trigonométricas inversas. A continuación usará estas reglas para resolver problemas en que intervienen relaciones de cambio, tangentes a curvas paramétricas y la aproximación de funciones.

3.1 DERIVADAS DE POLINOMIOS Y DE FUNCIONES EXPONENCIALES

En esta sección aprenderá la manera de derivar funciones constantes, funciones de potencias, polinomios y funciones exponenciales.

Empiece por la más sencilla de todas las funciones, la función constante $f(x) = c$. La gráfica de esta función es la recta horizontal $y = c$, la cual tiene pendiente 0, de modo que debe tener $f'(x) = 0$. (Véase la figura 1.) Una demostración formal, a partir de la definición de derivada, también es fácil:

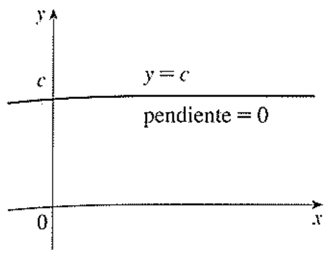


FIGURA 1
La gráfica de $f(x) = c$ es la recta $y = c$, por tanto $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

En la notación de Leibniz, se escribe está notación como sigue:

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

FUNCIONES POTENCIA

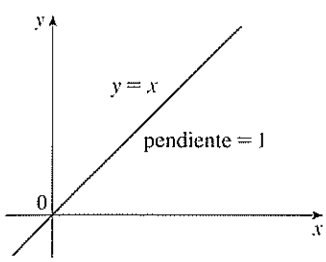


FIGURA 2
La gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, por tanto $f'(x) = 1$

En seguida, se consideran las funciones $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo. Si $n = 1$, la gráfica de $f(x) = x$ es la recta $y = x$, la cual tiene pendiente 1 (véase la figura 2). De modo que

1 $$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

(También puede comprobar la ecuación 1 a partir de la definición de derivada.) Ya ha investigado los casos $n = 2$ y $n = 3$. En efecto, en la sección 2.8 (ejercicios 17 y 18), encontró que

2 $$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$$

Para $n = 4$, la derivada de $f(x) = x^4$, queda como sigue:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned}$$

Así

3 $$\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Si compara las ecuaciones (1), (2), (3), surge un patrón. Parece razonable presumir que cuando n es un entero positivo, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$. Esto resulta cierto. Se demuestra de dos modos; en la segunda demostración se aplica el teorema del binomio

REGLA DE LA POTENCIA Si n es un entero positivo, en consecuencia

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

PRIMERA DEMOSTRACIÓN Puede verificar la fórmula

$$x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

multiplicando sólo el lado derecho (o mediante la suma del segundo factor como una serie geométrica). Si $f(x) = x^n$, puede aplicar la ecuación 2.7.5 para $f'(a)$ y la ecuación anterior para escribir

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

SEGUNDA DEMOSTRACIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^n - x^n}{h}$$

El teorema del binomio se da en la página de referencia 1.

Al hallar la derivada de x^4, tuvo que desarrollar $(x + h)^4$. En este caso, necesita desarrollar $(x + h)^n$ y, para hacerlo, aplique el teorema del binomio:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

porque todos los términos, excepto el primero, tienen h como factor, y, por lo tanto, tienden a 0.

En el ejemplo 1, se ilustra la regla de la potencia usando varias notaciones.

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = x^6$, después $f'(x) = 6x^5$. (b) Si $y = x^{1000}$, por lo tanto $y' = 1000x^{999}$.

(c) Si $y = t^4$, en seguida $\frac{dy}{dt} = 4t^3$. (d) $\frac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

¿Qué se puede decir acerca de las funciones potencia con exponentes enteros negativos? En el ejercicio 61 se le pide al lector que compruebe, a partir de la definición de derivada, que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Por lo que puede escribir de nuevo esta ecuación como

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}) = (-1)x^{-2}$$

y, por consiguiente, la regla de la potencia se cumple cuando $n = -1$. De hecho, en la sección siguiente [ejercicio 58(c)] se demuestra que se cumple para todos los enteros negativos.

¿Qué sucede si el exponente es una fracción? En el ejemplo 3 de la sección 2.8 encontró que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

lo cual se puede escribir como

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \tfrac{1}{2}x^{-1/2}$$

Esto hace ver que la regla de la potencia es verdadera incluso cuando $n = \frac{1}{2}$. De hecho, en la sección 3.6, se demuestra que es verdadera para todos los números reales n.

REGLA DE LA POTENCIA (VERSIÓN GENERAL) Si n es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

En la figura 3 se muestra la función y del ejemplo 2(b) y su derivada y'. Advierta que y no es derivable en 0 (y' no está definida allí). Observe que y' es positiva cuando y crece, y negativa cuando y decrece.

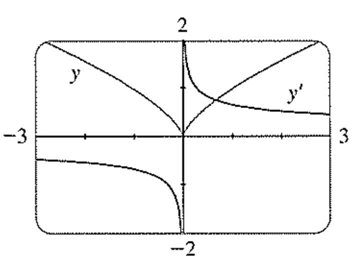


FIGURA 3
$y = \sqrt[3]{x^2}$

EJEMPLO 2 Derive:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

SOLUCIÓN En cada caso, reescriba la función como una potencia de x.

(a) Como $f(x) = x^{-2}$, aplique la regla de la potencia con $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \tfrac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3}$$ □

La regla de la potencia permite hallar las líneas tangentes sin hacer uso de la definición de una derivada. Además permite encontrar *línea normales*. La **línea normal** a una curva C en un punto P es la línea a través de P que es perpendicular a la línea tangente en P. (En el estudio de lo óptica, necesita considerar el ángulo entre un rayo de luz y la línea normal al lente.)

EJEMPLO 3 Halle la ecuación de la recta tangente y de la línea normal a la curva $y = x\sqrt{.}$ en el punto $(1, 1)$. Ilustre dibujando la curva y estas líneas.

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = x\sqrt{x} = xx^{1/2} = x^{3/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \tfrac{3}{2}x^{1/2} = \tfrac{3}{2}\sqrt{x}$$

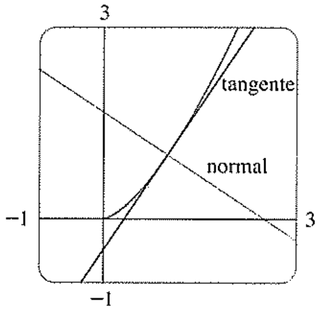


FIGURA 4

De este modo, la pendiente de la recta tangente en $(1, 1)$ es $f'(1) = \tfrac{3}{2}$. Por consiguiente l ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = \tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{2}$$

La línea normal es perpendicular a la línea tangente de tal manera que, su pendiente es (reciproco negativo de $\tfrac{3}{2}$, es decir, $-\tfrac{3}{2}$. En estos términos una ecuación de la línea normal e

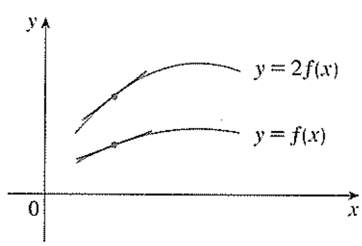
$$y - 1 = -\tfrac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = -\tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{3}$$

En la figura 4 se traza la gráfica de la curva y su recta tangente.

NUEVAS DERIVADAS A PARTIR DE ANTERIORES

Cuando se forman nuevas funciones a partir de funciones anteriores por adición, sustrac ción o multiplicación por una constante, sus derivadas se pueden calcular en términos de l derivada de sus funciones anteriores. En particular, en la fórmula siguiente se afirma qu la *derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicad por la derivada de la función.*

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE



La multiplicación por $c = 2$ estira la gráfica verticalmente en un factor de 2. Todas las elevaciones se han duplicado, pero los avances permanecen iguales. Las pendientes también se duplican.

REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE Si c es una constante y f es una función derivable, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

COMPROBACIÓN Sea $g(x) = cf(x)$. Después

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} c\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] \\ &= c\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{(por la ley de los límites 3)} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

EJEMPLO 4

(a) $\dfrac{d}{dx}(3x^4) = 3\dfrac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$

(b) $\dfrac{d}{dx}(-x) = \dfrac{d}{dx}[(-1)x] = (-1)\dfrac{d}{dx}(x) = -1(1) = -1$

La siguiente regla dice que *la derivada de una suma de funciones es la suma de la. derivadas.*

Si se utiliza la notación del apóstrofo, puede escribir la regla de la suma como

$$(f+g)' = f' + g'$$

REGLA DE LA SUMA Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

PRUEBA $F(x) = f(x) + g(x)$. Entonces

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \qquad \text{(por la ley 1)}$$

$$= f'(x) + g'(x)$$

□

La regla de la suma se puede extender a la suma de cualquier número de funciones. Por ejemplo, si se aplica este teorema dos veces obtiene

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Al escribir $f - g$ como $f + (-1)g$ y aplicando la regla de la suma y la del múltiplo constante, obtiene la fórmula siguiente.

REGLA DE LA DIFERENCIA Si tanto f como g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Estas tres reglas se pueden combinar con la regla de la potencia para derivar cualquier polinomio, como se demuestra en los ejemplos que siguen

EJEMPLO 5

$$\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5)$$

$$= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0$$

$$= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6$$

□

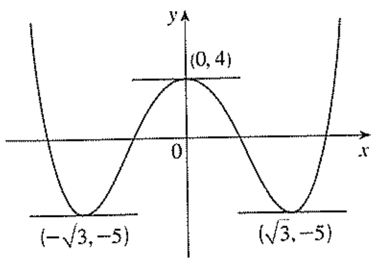


FIGURA 5
La curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$ y sus tangentes horizontales

EJEMPLO 6 Encuentre sobre la curva $y = x^4 - 6x^2 + 4$, los puntos donde la recta tangente es horizontal.

SOLUCIÓN Se tienen tangentes horizontales donde la derivada es cero. Observe que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4)$$
$$= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)$$

Así, $dy/dx = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 3 = 0$, es decir, $x = \pm\sqrt{3}$. Por eso, la curva dada tiene tangentes horizontales cuando $x = 0$, $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$. Los puntos correspondientes son $(0, 4)$ $(\sqrt{3}, -5)$ y $(-\sqrt{3}, -5)$. (Véase la figura 5.) □

EJEMPLO 7 La ecuación de movimiento de una particula es $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$, donde s se mide en centimetros y t en segundos. Hallar la aceleración como una función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración después de 2 segundos?

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

La aceleración después de 2 s es $a(2) = 14$ cm/s^2. □

FUNCIONES EXPONENCIALES

Intente calcular la derivada de la función exponencial $f(x) = a^x$, aplicando la función de derivada

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h}$$

El factor a^x no depende de h, de modo que puede llevarlo adelante del límite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Advierta que el límite es el valor de la derivada de f en 0; esto es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)$$

En consecuencia, ha demostrado que, si la función exponencial $f(x) = a^x$ es derivable en 0, en tal caso es derivable en todas partes y

$$\boxed{4} \qquad f'(x) = f'(0)a^x$$

En esta ecuación se afirma que *la relación de cambio de cualquier función exponencial es proporcional a la propia función.* (La pendiente es proporcional a la altura.)

h	$\dfrac{2^h - 1}{h}$	$\dfrac{3^h - 1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

En la tabla que aparece a la izquierda, se da evidencia numérica de la existencia de $f'(0)$ en los casos $a = 2$ y $a = 3$. (Los valores se dan correctos hasta cuatro cifras decimales.) Parece que los límites existen y

$$\text{Para } a = 2 \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h} \approx 0.69$$

$$\text{Para } a = 3 \quad f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{3^h - 1}{h} \approx 1.10$$

De hecho, se establecen los límites existentes y, correctos hasta seis cifras decimales, los valores son

$$\frac{d}{dx}(2^x)\bigg|_{x=0} \approx 0.693147 \qquad \frac{d}{dx}(3^x)\bigg|_{x=0} \approx 1.098612$$

Por esto, de la ecuación 4

$$\boxed{5} \qquad \frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x \qquad \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x$$

De todas las ecuaciones posibles para la base a de la ecuación 4, se tiene la fórmula más sencilla de derivación cuando $f'(0) = 1$. En vista de las estimaciones de $f'(0)$ para $a = 2$ y $a = 3$, parece razonable que exista un número a entre 2 y 3 para el que $f'(0) = 1$. Es tradicional denotar este valor con la letra e. (De hecho, así se presentó e en la sección 1.5.) Por esto se tiene la siguiente definición

En el ejercicio 1 verá que e se encuentra entre 2.7 y 2.8. Más adelante será capaz de demostrar que e con cinco cifras decimales es

$$e \approx 2.71828$$

DEFINICIÓN DEL NÚMERO e

$$e \text{ es el número tal que} \quad \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Geométricamente, esto significa que de todas las funciones exponenciales posibles $y = a^x$, la función $f(x) = e^x$ es aquella cuya recta tangente en $(0, 1)$ tiene una pendiente $f'(0)$ que es exactamente 1. (Véase las figuras 6 y 7.)

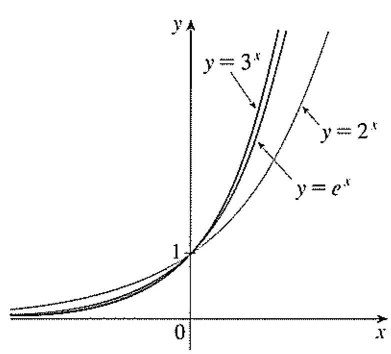


FIGURA 6

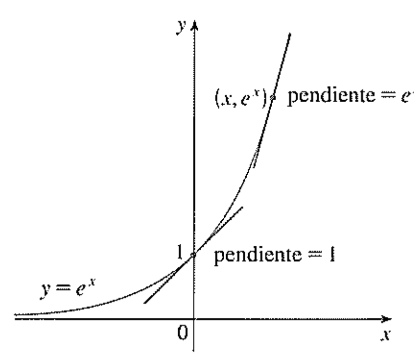


FIGURA 7

Si pone $a = e$ y, por lo tanto, $f'(0) = 1$ en la ecuación 4, se convierte en la importante fórmula de derivación que se proporciona a continuación.

TEC Visual 3.1 aplica el alcance de una pendiente para examinar esta formula

DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

De donde la función exponencial $f(x) = e^x$ tiene la propiedad de que es su propia derivada. El significado geométrico de esto es que la pendiente de una recta tangente a la curva $y = e^x$ es igual a la coordenada y del punto (véase la figura 7).

EJEMPLO 8 Si $f(x) = e^x - x$, encuentre f' y f''. Compare las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla de la diferencia, tiene

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

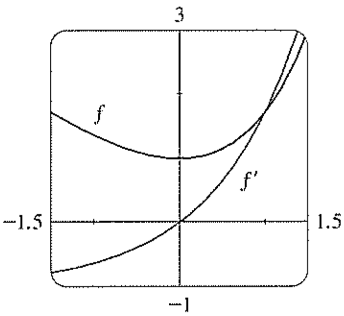


FIGURA 8

En la sección 2.8 se define la segunda derivada como la derivada de f', así

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

La función f y su derivada f' se grafican en la figura 8. Observe que f tiene una tangente horizontal cuando $x = 0$; esto corresponde al hecho de que $f'(0) = 0$. Asimismo, observe que para $x > 0$, $f'(x)$ es positiva y f es creciente. Cuando $x < 0$, $f'(x)$ es negativa y f es decreciente.

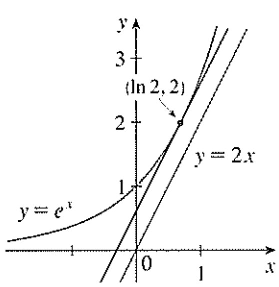


FIGURA 9

EJEMPLO 9 ¿En cuál punto de la curva $y = e^x$ la recta tangente es paralela a la recta $y = 2x$?

SOLUCIÓN Como $y = e^x$, tenemos $y' = e^x$. Sea a la coordenada x del punto en cuestión. Después, la pendiente de la recta tangente en ese punto es e^a. Esta recta tangente será paralela a la recta $y = 2x$ si tiene la misma pendiente; es decir, 2. Si se igualan las pendientes, tiene

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Por lo tanto, el punto requerido es $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$. (Véase la figura 9.)

3.1 EJERCICIOS

1. (a) ¿Cómo se define el número e?
   (b) Use una calculadora para estimar los valores de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2.7^h - 1}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2.8^h - 1}{h}$$

   correctos hasta dos cifras decimales. ¿Qué puede concluir acerca del valor de e?

2. (a) Dibuje, a mano, la función $f(x) = e^x$, poniendo particular atención a la forma en que la gráfica cruza el eje y. ¿Qué hecho le permite hacer esto?
   (b) ¿Qué tipos de funciones son $f(x) = e^x$ y $g(x) = x^e$? Compare las fórmulas de derivación para f y g.
   (c) ¿Cuál de las dos funciones del inciso (b) crece con mayor rapidez cuando x es grande?

3–32 Derive la función.

3. $f(x) = 186.5$
4. $f(x) = \sqrt{30}$
5. $f(t) = 2 - \frac{2}{3}t$
6. $F(x) = \frac{3}{4}x^8$
7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$
8. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

9. $f(t) = \frac{1}{4}(t^4 + 8)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $y = 5e^x + 3$

13. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

14. $R(t) = 5t^{-3/5}$

15. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

16. $B(y) = cy^{-6}$

17. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

18. $y = \sqrt[3]{x}$

19. $F(x) = (\frac{1}{2}x)^5$

20. $f(t) = \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

21. $y = ax^2 + bx + c$

22. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

25. $y = 4\pi^2$

26. $g(u) = \sqrt{2}u + \sqrt{3u}$

27. $H(x) = (x + x^{-1})3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Hallar una ecuación de la línea tangente a la curva en el punto que se indica.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

35–36 Determine una ecuación de la tangente y la normal a la curva en el punto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = (1 + 2x)^2$, $(1, 9)$

37–38 Formule una ecuación para la tangente a la curva en el punto dado. Grafique la curva y la tangente en la misma pantalla.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39–42 Encuentre $f'(x)$. Compare las gráficas de f y f' y úselas enseguida para explicar por qué su respuesta es razonable.

39. $f(x) = e^x - 5x$

40. $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 50x$

41. $f(x) = 3x^{15} - 5x^3 + 3$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

43. (a) Use una calculadora graficadora o una computadora para dibujar la función $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ en el rectángulo de visualización $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.

(b) Utilizando la gráfica del inciso (a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la gráfica de f'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.9.)

(c) Calcule $f'(x)$ y use esta expresión, con un aparato graficador, para dibujar f'. Compare con el boceto que trazó usted en el inciso (b).

44. (a) Utilice un dispositivo graficador o una computadora para dibujar la función $g(x) = e^x - 3x^2$ en el rectángulo de visualización $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.

(b) Aplicando la gráfica del inciso (a) para estimar pendientes, haga a mano un boceto aproximado de la gráfica de g'. (Véase el ejemplo 1 de la sección 2.8.)

(c) Calcule $g'(x)$ y aplique esta expresión, con un dispositivo graficador, para dibujar g'. Compare con su boceto del inciso (b).

45–46 Hallar la primera y segunda derivadas de la función

45. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 16x$

46. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

47–48 Hallar la primera y segunda derivadas de la función. Verifique para ver que sus respuestas sean razonables al comparar las gráficas de f, f' y f''

47. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

48. $f(x) = e^x - x^3$

49. La ecuación de movimiento de una particula es $s = t^3 - 3t$, donde s está en metros y t en segundos. Hallar

(a) la velocidad y aceleración como funciones de t.

(b) la aceleración después de 2 s, y

(c) la aceleración cuando la velocidad es 0

50. La ecuación de movimiento de una particula es $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, donde s esta en metros y t en segundos.

(a) Hallar la velocidad y aceleración como funciones de t.

(b) Hallar la aceleración después de 1 s.

(c) grafíque las funciones, posición, velocidad y aceleración en la misma pantalla

51. Encuentre los puntos sobre la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ donde la tangente es horizontal

52. ¿Para qué valores de x tiene una tangente horizontal la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$?

53. Demuestre que la curva $y = 6x^3 + 5x - 3$ no tiene recta tangente con pendiente 4.

54. Encuentre una ecuación de la línea tangente a la curva $y = x\sqrt{x}$ que es paralela a la línea $y = 1 + 3x$

55. Hallar una ecuación de ambas líneas que son tangente a la curva $y = 1 + x^3$ y paralela a la línea $12x - y = 1$

56. ¿En qué punto sobre la curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ es la recta tangente paralela a la recta $3x - y = 5$. Ilústrelo dibujando la curva y ambas líneas.

57. Establezca una ecuación de la línea normal a la parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que es paralela a la línea $x - 34 = 5$

58. ¿Dónde corta por segunda vez la normal a la parábola $y = x - x^2$ que pasa por el punto $(1, 0)$ a la misma parábola? Elabore un esquema.

59. Dibuje un diagrama para demostrar que hay dos rectas tangentes a la parábola $y = x^2$ que pasan por el punto $(0, -4)$. Encuentre las coordenadas de los puntos donde estas rectas tangentes intersecan la parábola.

60. (a) Halle ecuaciones de ambas rectas que pasan por el punto $(2, -3)$ que sean tangentes a la parábola $y = x^2 + x$.
(b) Muestre que no hay ninguna línea que pase por el punto (2,7) que es tangente a la parábola. Cuando dibuje el diagrama verá por qué.

61. Aplique la definición de derivada para demostrar que si $f(x) = 1/x$, después $f'(x) = -1/x^2$. (Esto demuestra la regla de la potencia para el caso $n = -1$.)

62. Encuentre la derivada n-ésima de cada función calculando las primeras derivadas y observe el patrón que se desarrolla

(a) $f(x) = x^n$ $\qquad$ $f(x) = 1/x$

63. Hallar un polinomio de segundo grado P de tal manera que $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$, y $P''(2) = 2$

64. La ecuación $y'' + y' - 2y = x^2$ se le denomina **ecuación diferencial** porque involucra uno función desconocida y y sus derivadas y' y y''. Hallar las constantes A, B y C de tal manera que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisface esta ecuación. (Las ecuaciones diferenciales se estudiarán con detalle en el capítulo 9.)

65. Hallar una función cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica tiene una tangente horizontal en los puntos $(-2,6)$ y $(2,0)$.

66. Hallar una parábola con ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que tiene pendiente 4 en $x = 1$, pendiente -8 en $x = -1$, y pasa a través de el punto $(2, 15)$.

67. Sean

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Es derivable f en 1? Dibuje las gráficas f y f'.

68. ¿En qué valores la función siguiente g es derivable?

$$g(x) = \begin{cases} -1 - 2x & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Proporcione una fórmula para g' y trace las gráficas de g y g'.

69. (a) ¿Para qué valores de x la función $f(x) = |x^2 - 9|$ es derivable? Encuentre una fórmula para f'.
(b) Grafique f y f'.

70. ¿Dónde es derivable la función $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$? Proporcione una fórmula para h' y grafique h y h'.

71. Determine la parábola con ecuación $y = ax^2 + bx$ cuya tangente en $(1, 1)$ tiene por ecuación $y = 3x - 2$.

72. Considere la curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ que tiene una línea tangente donde $x = 0$ con ecuación $y = 2x + 1$ y una línea tangente cuando $x = 1$ con ecuación $y = 2 + 3x$. Halle los valores de a, b, c y d.

73. ¿Para qué valores de a y b es la recta $2x + y = b$ tangente a la parábola $y = ax^2$ cuando $x = 2$?

74. Hallar el valor de c tal que la línea $y = \frac{3}{2}x + 6$ es tangente a la curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine los valores de m y b que hacen que f sea siempre derivable.

76. Se dibuja una recta tangente a la hipérbola $xy = c$ en un punto P.
(a) Demuestre que el punto medio de este segmento de la recta que se corta de su recta tangente mediante los ejes de coordenadas es P.
(b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes de coordenadas tiene siempre la misma área, sin importar dónde se ubique P sobre la hipérbola.

77. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{1000} - 1}{x - 1}$.

78. Dibuje un diagrama en el que se muestren dos rectas perpendiculares que se intersecan sobre el eje y, y son tangentes a la parábola $y = x^2$. ¿Dónde se intersecan estas rectas?

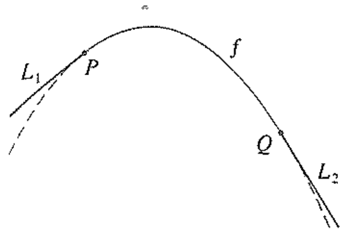
79. Si $c > \frac{1}{2}$, ¿cuántas líneas a través del punto $(0, c)$ son líneas normales a la parábola $y = x^2$? ¿que sucede si $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Dibuje la parábola $y = x^2$ y $y = x^2 - 2x + 2$. ¿Considera que existe una línea que es tangente a ambas curvas? De ser así, hallar su ecuación. Si no es así, ¿Por qué no?

PROYECTO DE APLICACIÓN

CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA

Suponga que se le solicita que diseñe el primer ascenso y descenso de una montaña rusa nueva. Después de estudiar fotografías de sus montañas rusas predilectas, decide hacer la pendiente del ascenso 0.8 y la del descenso -1.6. Opta por conectar estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ mediante parte de una parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que el trayecto sea uniforme no pueden existir cambios abruptos de dirección, por lo tanto desea que los



segmentos lineales L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q. (Véase la figura.) Para simplificar las ecuaciones decide situar el origen en P.

1. (a) Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Escriba ecuaciones en a, b y c que aseguren que el trayecto es suave en los puntos de transición.
   (b) Resuelva la ecuación del inciso (a) para a, b y c para hallar una fórmula para $f(x)$.
   (c) Dibuje L_1, f y L_2 para verificar que las transiciones son uniformes.
   (d) Encuentre la diferencia en elevación entre P y Q.

2. La solución del problema 1 quizá *parezca* suave, pero es posible que no *se sienta* suave debido a que la pieza definida como función [consistente de $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leq x \leq 100$ y $L_2(x)$ para $x > 100$] no tiene una segunda derivada continua. Por consiguiente decide mejorar el diseño aplicando una función cuadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ únicamente en el intervalo $10 \leq x \leq 90$ y conectándolo con las funciones lineales por medio de dos funciones cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leq x < 10$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 90 < x \leq 100$$

   (a) Escriba un sistema de ecuaciones en 11 incógnitas que aseguren que las funciones y sus dos primeras derivadas coincidan en los puntos de transición.
   CAS (b) Resuelva las ecuaciones del inciso (a) con un sistema de computo algebraico para encontrar las fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.
   (c) Dibuje L_1, g, q, h y L_2 y compárelos con las gráficas del problema 1 inciso (c).

3.2 LAS REGLAS DEL PRODUCTO Y EL COCIENTE

Las fórmulas de esta sección permiten derivar nuevas funciones formadas a partir de anteriores, por multiplicación o división.

REGLA DEL PRODUCTO

Por analogía con las reglas de la suma y la diferencia, podría sentirse la tentación de presumir —como Leibniz lo hizo hace tres siglos— que la derivada de un producto es el producto de las derivadas. Sin embargo, puede ver que esta suposición es errónea al considerar un ejemplo particular. Sea $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Por lo tanto la regla de la potencia da $f'(x) = 1$ y $g'(x) = 2x$. Pero $(fg)(x) = x^3$, de modo que $(fg)'(x) = 3x^2$. Por eso, $(fg)' \neq f'g'$. La fórmula correcta fue descubierta por Leibniz (poco tiempo después de su falso inicio) y se llama regla del producto.

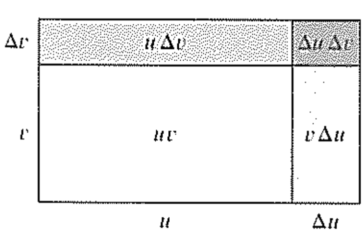


FIGURA 1
La geometría de la regla del producto

Antes de enunciar la regla del producto, vea cómo podría descubrirla. En el caso donde tanto $u = f(x)$ como $v = g(x)$ son funciones positivas, puede interpretar el producto uv como un área de un rectángulo (véase la figura 1). Si x cambia una cantidad Δx, en seguida los cambios correspondientes en u y v son

$$\Delta u = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad \Delta v = g(x + \Delta x) - g(x)$$

y el nuevo valor del producto, $(u + \Delta u)(v + \Delta v)$, se puede interpretar como el área del rectángulo grande en la figura 1 (siempre que Δu y Δv sean positivos).

El cambio en el área del rectángulo es

$$\boxed{1} \qquad \Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$$

$$= \text{la suma de las tres áreas sombreadas}$$

Si divide entre Δx, obtiene

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

■ Recuerde que en la notación de Leibniz la definición de derivada se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si ahora hace que $\Delta x \to 0$, obtiene la derivada de uv.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\ &= u\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \left(\lim_{\Delta x \to 0}\Delta u\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)\\ &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0\cdot\frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

$$\boxed{2} \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, puesto que f es derivable y, por lo tanto, continua.)

Aun cuando se partió de la hipótesis (para la interpretación geométrica) que todas las cantidades son positivas, observe que la ecuación 1 siempre es verdadera. (El álgebra es válida si u, v, Δu y Δv son positivas o negativas.) De modo que ha probado la ecuación 2, conocida como regla del producto, para todas las funciones diferenciables u y v.

■ En notación prima:
$(fg)' = fg' + gf'$

REGLA DEL PRODUCTO Si tanto f como g son derivables, en tal caso

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

En palabras, la regla del producto expresa que *la derivada de un producto de dos funciones es la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función, más la segunda función multiplicada por la derivada de la primera función.*

EJEMPLO 1

(a) Si $f(x) = xe^x$, encuentre $f'(x)$.
(a) Hallar la n-ésima derivada, $f^{(n)}(x)$.

■ En la figura 2 se muestran las gráficas de la función f del ejemplo 1 y su derivada f'. Advierta que $f'(x)$ es positiva cuando f crece y negativa cuando f disminuye.

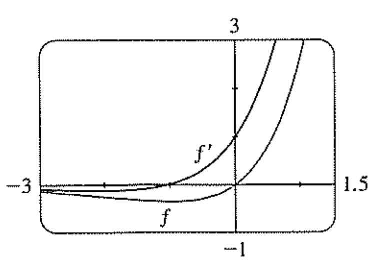


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) Por la regla del producto se tiene

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x)\\ &= xe^x + e^x\cdot 1 = (x+1)e^x\end{aligned}$$

(b) Aplicando la regla del producto una segunda vez se obtiene

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{d}{dx}[(x+1)e^x] = (x+1)\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x+1)\\ &= (x+1)e^x + e^x\cdot 1 = (x+2)e^x\end{aligned}$$

La aplicación adicional de la regla del producto proporciona

$$f'''(x) = (x + 3)e^x \qquad\qquad f^{(4)}(x) = (x + 4)e^x$$

En realidad, cada derivada que sigue adiciona otro término e^x, de esa manera

$$f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$$

□

▪ En el ejemplo 2, a y b son constantes. En matemáticas es habitual aplicar letras cerca del inicio del alfabeto para representar constantes y las letras cercanas del final del alfabeto representan variables

EJEMPLO 2 Derive la función $f(t) = \sqrt{t}\,(a + bt)$.

SOLUCIÓN 1 Si se aplica la regla del producto, tiene

$$\begin{aligned} f'(t) &= \sqrt{t}\,\frac{d}{dt}(a - bt) + (a + bt)\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) \\ &= \sqrt{t}\cdot b + (a + bt)\cdot \tfrac{1}{2}t^{-1/2} \\ &= b\sqrt{t} + \frac{a + bt}{2\sqrt{t}} = \frac{a + 3bt}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN 2 Si en primer lugar usa las leyes de los exponentes para volver a escribir $f(t)$, después puede proceder directamente, sin aplicar la regla del producto.

$$\begin{aligned} f(t) &= a\sqrt{t} + bt\sqrt{t} = at^{1/2} + bt^{3/2} \\ f'(t) &= \tfrac{1}{2}at^{-1/2} + \tfrac{3}{2}bt^{1/2} \end{aligned}$$

la cual equivale a la respuesta de la solución 1. □

En el ejemplo 2 se muestra que a veces es más fácil simplificar un producto de funciones que utilizar la regla del producto. Sin embargo, en el ejemplo 1 esta regla es el único método posible.

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}\,g(x)$, donde $g(4) = 2$ y $g'(4) = 3$, encuentre $f'(4)$.

SOLUCIÓN Si se aplica la regla del producto, obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\,g(x)\right] = \sqrt{x}\,\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right] \\ &= \sqrt{x}\,g'(x) + g(x)\cdot\tfrac{1}{2}x^{-1/2} = \sqrt{x}\,g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

De este modo $\quad f'(4) = \sqrt{4}\,g'(4) + \dfrac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \dfrac{2}{2\cdot 2} = 6.5$ □

REGLA DEL COCIENTE

Encontrar una regla para derivar el cociente de dos funciones derivables $u = f(x)$ y $v = g(x)$ de manera muy similar a como se encontró la regla del producto. Si x, u y v cambian en cantidades Δx, Δu y Δv, en tal caso el cambio correspondiente en el cociente u/v es

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(u + \Delta u)v - u(v + \Delta v)}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}$$

por eso

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u/v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}$$

A medida que $\Delta x \to 0$, $\Delta v \to 0$ también porque g es derivable y por consiguiente continua. Así, al aplicar las leyes de los límites, obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v \displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} (v + \Delta v)} = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

■ En notación prima

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

REGLA DEL COCIENTE Si tanto f como g son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\dfrac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\dfrac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

En palabras, en la regla del cociente se expresa que la *derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.*

La regla del cociente y las otras fórmulas de derivación permiten calcular la derivada de cualquier función racional, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

■ Puede usar un aparato graficador para comprobar que la respuesta al ejemplo 4 es plausible. En la figura 3 se muestran las gráficas de la función de ese ejemplo y su derivada. Advierta que cuando y crece con rapidez (cerca de -2), y' es grande. Y cuando y crece con lentitud, y' está cercana a 0.

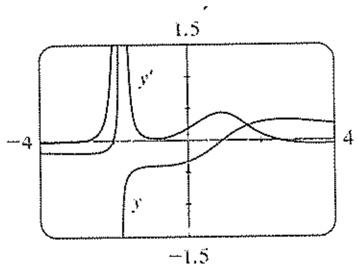


FIGURA 3

EJEMPLO 4 Sea $y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$. Entonces

$$y' = \frac{(x^3 + 6)\dfrac{d}{dx}(x^2 + x - 2) - (x^2 + x - 2)\dfrac{d}{dx}(x^3 + 6)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(x^3 + 6)(2x + 1) - (x^2 + x - 2)(3x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{(2x^4 + x^3 + 12x + 6) - (3x^4 + 3x^3 - 6x^2)}{(x^3 + 6)^2}$$

$$= \frac{-x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 12x + 6}{(x^3 + 6)^2}$$ □

EJEMPLO 5 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = e^x/(1 + x^2)$ en el punto $(1, e/2)$.

SOLUCIÓN De acuerdo con la regla del cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + x^2)\dfrac{d}{dx}(e^x) - e^x\dfrac{d}{dx}(1 + x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$= \frac{(1 + x^2)e^x - e^x(2x)}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(1 - x)^2}{(1 + x^2)^2}$$

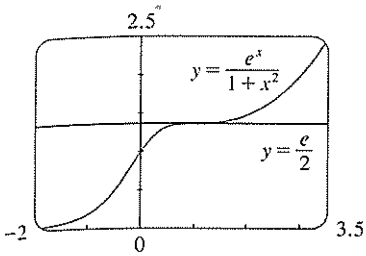


FIGURA 4

De modo que la pendiente de la recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$$

Esto significa que la recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$ es horizontal y su ecuación es $y = \frac{1}{2}e$. [Véase la figura 4. Advierta que la función es creciente y cruza su recta tangente en $(1, \frac{1}{2}e)$.] □

NOTA No use la regla del cociente *cada* vez que vea un cociente. A veces es más fácil volver a escribir un cociente para ponerlo en una forma que sea más sencilla para los fines de derivación. Por ejemplo, aun cuando es posible derivar la función

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

aplicando la regla del cociente es más fácil dividir primero y escribir la función como

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

antes de derivar.

Se resumen las fórmulas de derivación que ha aprendido hasta el momento como se describe a continuación:

TABLA DE FÓRMULAS DE DERIVACIÓN

$\frac{d}{dx}(c) = 0$	$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
$(cf)' = cf'$	$(f+g)' = f' + g'$	$(f-g)' = f' - g'$
$(fg)' = fg' + gf'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$	

3.2 EJERCICIOS

1. Encuentre la derivada de $y = (x^2 + 1)(x^3 + 1)$ de dos maneras: aplicando la regla del producto y efectuando primero la multiplicación. ¿Sus respuestas son equivalentes?

2. Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \frac{x - 3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

de dos maneras: primero aplicando la regla del cociente y simplificando. Demuestre que sus respuestas son equivalentes. ¿Cuál método prefiere?

3–26 Derive la función

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$ 3

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \frac{e^x}{x^2}$

6. $y = \frac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \frac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \frac{2t}{4 + t^2}$

9. $V(x) = (2x^3 + 3)(x^4 - 2x)$

10. $Y(u) = (u^{-2} + u^{-3})(u^5 - 2u^2)$

11. $F(y) = \left(\frac{1}{y^2} - \frac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $R(t) = (t + e^t)(3 - \sqrt{t})$

13. $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \frac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \frac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^3 + 1}$

16. $y = \frac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = (r^2 - 2r)e^r$

18. $y = \frac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{v^3 - 2v\sqrt{v}}{v}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Hallar $f'(x)$ y $f''(x)$

27. $f(x) = x^4e^x$

28. $f(x) = x^{5/2}e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{3 + e^x}$

31–32 Encontrar una ecuación de la línea tangente a la curva que se proporciona en el punto especifico.

31. $y = \dfrac{2x}{x + 1}$, $(1, 1)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33–34 Halle ecuaciones de las rectas tangentes y de las rectas normales a la curva dada en el punto que se especifica.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$, $(4, 0.4)$

---

35. (a) La curva $y = 1/(1 + x^2)$ se llama **bruja de Agnesi**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre el inciso (a) trazando las gráficas de la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

36. (a) La curva $y = x/(1 + x^2)$ se llama **serpentina**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(3, 0.3)$.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

37. (a) Si $f(x) = e^x/x^3$, encuentre $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

38. (a) Si $f(x) = x/(x^2 - 1)$, halle $f'(x)$.
(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

39. (a) Si $f(x) = (x - 1)e^x$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Verifique para ver que sus respuestas en el inciso (a) son razonables al comparar los gráficas de f, f' y f''.

40. (a) Si $f(x) = x/(x^2 + 1)$, hallar $f'(x)$ y $f''(x)$.
(b) Verifique para comprobar que sus respuestas en el inciso (
son son justas al comparar los gráficas de f, f' y f''.

41. Si $f(x) = x^2/(1 + x)$, hallar $f''(1)$.

42. Si $g(x) = x/e^x$, hallar $g^{(n)}(x)$.

43. Suponga que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ y $g'(5) = 2$. Er cuentre los valores siguientes
(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$
(c) $(g/f)'(5)$

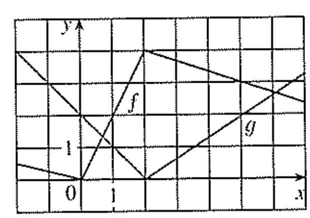
44. Considere que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $g'(2) = 7$, encuentre $h'(2)$.
(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

45. Si $f(x) = e^xg(x)$, donde $g(0) = 2$ y $g'(0) = 5$, halle $f'(0)$.

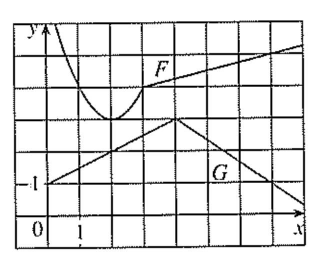
46. Si $h(2) = 4$ y $h'(2) = -3$, encuentre

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\bigg|_{x=2}$$

47. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sean $u(x) = f(x)g(x)$ y $v(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encuentre $u'(1)$. (b) Encuentre $v'(5)$.



48. Sea $P(x) = F(x)G(x)$ y $Q(x) = F(x)/G(x)$, donde F y G sor las funciones cuyas gráficas se muestran
(a) Encuentre $P'(2)$. (b) Encuentre $Q'(7)$.



49. Si g es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

50. Si f es una función derivable, encuentre una expresión para la derivada de cada una de las funciones siguientes.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

51. ¿Cuántas rectas tangentes a la curva $y = x/(x+1)$ pasan por el punto $(1, 2)$? ¿En qué puntos toca la curva estas rectas tangentes?

52. Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$y = \frac{x-1}{x+1}$$

que sean paralelas a la recta $x - 2y = 2$.

53. En este ejercicio estime la proporción a la que se está elevando el ingreso personal total en el área metropolitana de Richmond-Petersburg, Virginia. En 1999, la población de esta área era 961 400 y la población aumentaba en alrededor de 9 200 personas al año. El ingreso anual promedio era \$30 593 per cápita, y este promedio aumentaba en cerca de \$1 400 al año (ligeramente por arriba del promedio nacional de alrededor de \$1 225 al año). Use la regla del producto y estas cifras para estimar la proporción en la que estaba aumentando el ingreso personal total en el área de Richmond-Petersburg en 1999. Explique el significado de cada término en la regla del producto.

54. Un fabricante produce rollos de una tela con un ancho fijo. La cantidad q de esta tela (medida en yardas) que se vende es función del precio de venta p (en dólares por yarda), de modo que $q = f(p)$. Luego el ingreso total que se percibe con el precio de venta p es $R(p) = pf(p)$.

(a) ¿Qué significa afirmar que $f(20) = 10\,000$ y $f'(20) = -350$?

(b) Suponiendo los valores del inciso (a), encuentre $R'(20)$ e interprete su respuesta.

55. (a) Utilice la regla del producto dos veces para probar que si f, g y h son derivables, en tal caso

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

(b) Tome $f = g = h$ en el inciso (a) y demuestre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x)$$

(c) Aplique el resultado del inciso (b) para derivar $y = e^{3x}$.

56. (a) Si $F(x) = f(x)g(x)$, donde f y g son derivables en todos los ordenes y demostrar que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

(b) Hallar formulas similares para F''' y $F^{(4)}$.

(c) Intente una formula para $F^{(n)}$.

57. Hallar expresiones para las primeras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. ¿Observa algún patrón en estas expresiones? Intente una formula para $f^{(n)}(x)$ y compruebe aplicando inducción matemática.

58. (a) Si g es derivable la **regla del recíproco** dice que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Aplique la regla del cociente para comprobar la regla del recíproco

(b) Utilice la regla del recíproco para derivar la función del ejercicio 18.

(c) Utilice la regla del recíproco para comprobar que la regla de la potencia es válida para números enteros negativos, es decir,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todos los números enteros positivos n.

3.3 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En el apéndice D se da un repaso de las funciones trigonométricas

Antes de iniciar esta sección, quizá podría necesitar repasar las funciones trigonométricas. En particular, es importante recordar que cuando habla de la función f definida para todos los números reales x por

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

se entiende que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x. Se cumple una convención similar para las demás funciones trigonométricas: cos, tan, csc, sec y cot. Recuerde, por lo que se vio en la sección 2.5, que todas las funciones trigonométricas son continuas en cada número en sus dominios.

Si traza la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y utiliza la interpretación de $f'(x)$ como la pendiente de la tangente a la curva seno para trazar la gráfica de f' (véase el ejercicio 14 de la sección 2.8), parece que la gráfica de esta última es la misma que la curva coseno (véase figura 1).

TEC Visual 3.3 muestra una animación de la figura 1

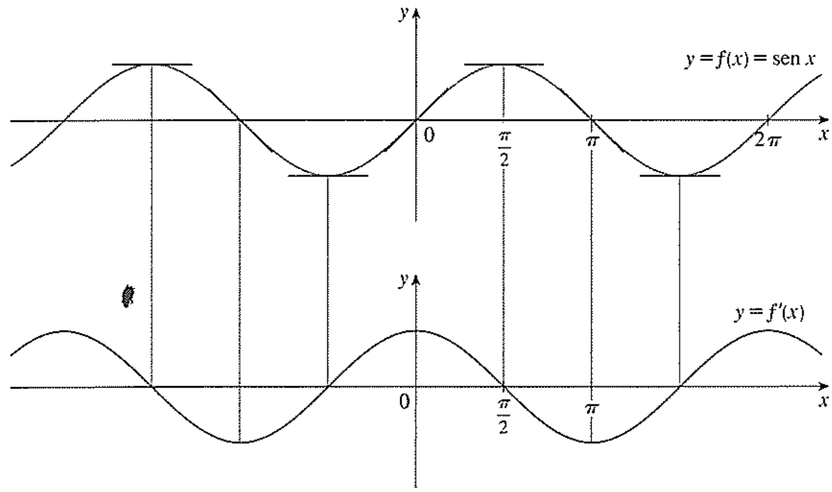


FIGURA 1

Intente confirmar la conjetura de que si $f(x) = \text{sen } x$, por lo tanto $f'(x) = \cos x$. A partir de la definición de derivada

■ Se usa la fórmula de la adición para el seno. Véase el apéndice D.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } x \cos h + \cos x \text{ sen } h - \text{sen } x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\text{sen } x \cos h - \text{sen } x}{h} + \frac{\cos x \text{ sen } h}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\text{sen } x \left(\frac{\cos h - 1}{h} \right) + \cos x \left(\frac{\text{sen } h}{h} \right) \right]
\end{aligned}
$$

1
$$= \lim_{h\to 0} \text{sen } x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0} \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen } h}{h}$$

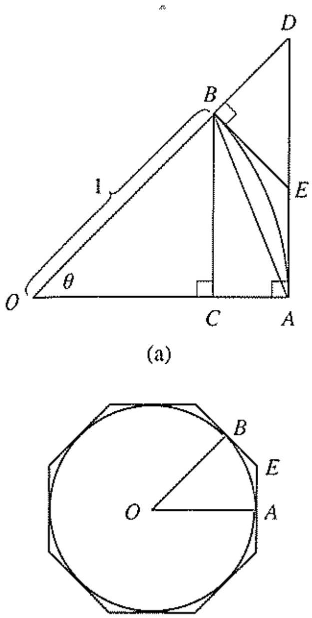
Dos de estos cuatro límites son fáciles de evaluar. Puesto que se considera a x como constante al calcular un límite cuando $h \to 0$, tiene

$$\lim_{h\to 0} \text{sen } x = \text{sen } x \qquad \text{y} \qquad \lim_{h\to 0} \cos x = \cos x$$

El límite de (sen h)/h no es tan obvio. Con base en la evidencia numérica y gráfica, en el ejemplo 3 de la sección 2.2, se infiere que

2
$$\boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta} = 1}$$

Ahora, use un argumento geométrico para probar la ecuación 2. Suponga primero que θ se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En la figura 2(a) se muestra un sector de círculo con centro en O, ángulo central θ y radio 1. BC se traza perpendicular a OA. Por la definición de radián,



(a)

(b)

FIGURA 2

arco $AB = \theta$. Asimismo, $|BC| = |OB| \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} \theta$. Con base en el diagrama, se ve que

$$|BC| < |AB| < \text{arco } AB$$

En consecuencia $\quad \operatorname{sen} \theta < \theta \quad$ de igual manera $\quad \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$

Suponga que las tangentes en A y B se intersecan en E. Puede ver, con base en la figura 2(b) que la circunferencia de un círculo es menor que la longitud de un polígono circunscrito, de modo que arco $AB < |AE| + |EB|$. Así,

$$\begin{aligned} \theta = \text{arco } AB &< |AE| + |EB| \\ &< |AE| + |ED| \\ &= |AD| = |OA| \tan \theta \\ &= \tan \theta \end{aligned}$$

(En el apéndice F se demuestra directamente la desigualdad $\theta \leqslant \tan \theta$ a partir de la definición de la longitud de un arco, sin recurrir a la intuición geométrica como se hizo aquí.) Por lo tanto,

$$\theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

de modo que

$$\cos \theta < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1$$

Sabe que $\lim_{\theta \to 0} 1 = 1$ y $\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$; de este modo, por el teorema de la compresión

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

Pero la función $(\operatorname{sen} \theta)/\theta$ es una función par, de suerte que sus límites por la derecha y la izquierda deben ser iguales. De donde, tiene

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$$

de forma que ha probado la ecuación 2.

Puede deducir el valor del límite restante en (1), como sigue:

■ Multiplique el numerador y el denominador por $\cos \theta + 1$ para poner la función en una forma en que pueda usar los límites que conoce.

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\cos \theta - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} \right) = \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta (\cos \theta + 1)} \\ &= \lim_{\theta \to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 \theta}{\theta (\cos \theta + 1)} = -\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + 1} \right) \\ &= -\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta + 1} \\ &= -1 \cdot \left(\frac{0}{1 + 1} \right) = 0 \qquad \text{(por la ecuación 2)} \end{aligned}$$

3
$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0}$$

Si ahora pone los límites (2) y (3) en (1), obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} x) \cdot 0 + (\cos x) \cdot 1 = \cos x$$

Así ha probado la fórmula para la derivada de la función seno:

4
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x}$$

La figura 3 muestra las gráficas de la función del ejemplo 1 y su derivada. Advierta que $y' = 0$ siempre que y tenga una tangente horizontal.

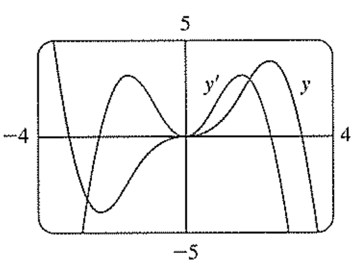


FIGURA 3

EJEMPLO 1 Derive $y = x^2 \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Con la regla del producto y la fórmula 4, tiene

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$$

□

Si se aplican los mismos métodos que en la demostración de la fórmula 4, se puede probar (véase el ejercicio 20) que

5
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x}$$

También se puede derivar la función tangente aplicando la definición de derivada, pero es más fácil usar la regla del cociente con las fórmulas 4 y 5:

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

6
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

También es fácil hallar las derivadas de las funciones trigonométricas restantes, csc, sec y cot, aplicando la regla del cociente (véase los ejercicios 17-19). En la tabla siguiente aparecen todas las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas. Recuerde que son válidas sólo cuando x se mide en radianes.

▪ Cuando memorice esta tabla, resulta útil notar que los signos menos van con las derivadas de las "cofunciones"; es decir, coseno, cosecante y cotangente.

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\operatorname{sen} x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

EJEMPLO 2 Derive $f(x) = \dfrac{\sec x}{1 + \tan x}$. ¿Para cuáles valores de x la gráfica de f tiene una tangente horizontal?

SOLUCIÓN La regla del cociente da

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan x)\dfrac{d}{dx}(\sec x) - \sec x \dfrac{d}{dx}(1 + \tan x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{(1 + \tan x)\sec x \tan x - \sec x \cdot \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \tan^2 x - \sec^2 x)}{(1 + \tan x)^2}$$

$$= \frac{\sec x(\tan x - 1)}{(1 + \tan x)^2}$$

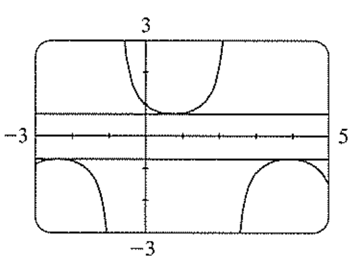


FIGURA 4
Las tangentes horizontales del ejemplo 2

Al simplificar la respuesta, se usó la identidad $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$.

Como $\sec x$ nunca es 0, $f'(x) = 0$ cuando $\tan x = 1$, y esto sucede cuando $x = n\pi + \pi/4$, donde n es un entero (véase la figura 4). □

Las funciones trigonométricas se usan con frecuencia en el modelado de fenómenos del mundo real. En particular, las vibraciones, las ondas, los movimientos elásticos y otras cantidades que varían de manera periódica, se pueden describir por medio de las funciones trigonométricas. En el ejemplo siguiente, se analiza un caso de movimiento armónico simple.

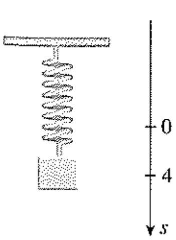


FIGURA 5

V EJEMPLO 3 Un objeto que se encuentra en el extremo de un resorte vertical se desplaza hacia abajo 4 cm más allá de su posición de reposo, para estirar el resorte, y se deja en libertad en el instante $t = 0$. (Véase la figura 5 y observe que la dirección hacia abajo es positiva.) Su posición en el instante t es

$$s = f(t) = 4 \cos t$$

Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t y úselas para analizar el movimiento del objeto.

SOLUCIÓN La velocidad y la aceleración son

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4 \cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4 \operatorname{sen} t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(-4 \operatorname{sen} t) = -4\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = -4 \cos t$$

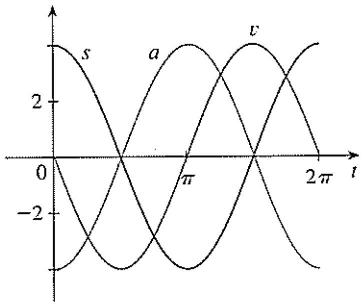


FIGURA 6

El objeto oscila desde el punto más bajo ($s = 4$ cm) hasta el punto más alto ($s = -4$ cm). El periodo de la oscilación es 2π, el periodo de cos t.

La rapidez (magnitud de la velocidad) es $|v| = 4|\operatorname{sen} t|$, la cual es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = 1$; es decir, cuando $\cos t = 0$. De modo que el objeto se mueve con la mayor rapidez cuando pasa por su posición de equilibrio ($s = 0$). Su rapidez es 0 cuando $\operatorname{sen} t = 0$; esto es, en los puntos alto y bajo.

La aceleración $a = -4 \cos t = 0$ cuando $s = 0$. Alcanza la magnitud máxima en los puntos alto y bajo. Observe la gráfica en la figura 6.

EJEMPLO 4 Hallar la vigésima séptima derivada de cos x.

■ Busque la norma

SOLUCIÓN Las primeras derivadas de $f(x)$ cos x son como sigue:

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f''(x) = -\cos x$$
$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$f^{(5)}(x) = -\operatorname{sen} x$$

Así que las derivadas sucesivas suceden en un ciclo de extensión 4 y, en particular, $f^{(n)}(x) = \cos x$ cada vez que n es un múltiplo de 4. En consecuencia

$$f^{(24)}(x) = \cos x$$

y, derivando tres veces más, tiene

$$f^{(27)}(x) = \operatorname{sen} x$$

La principal aplicación del límite en la ecuación 2 ha sido comprobar la formula de derivación de la función seno. Pero este límite también se aplica en la búsqueda de otros límites trigonométricos, como en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Determine $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 7x}{4x}$.

SOLUCIÓN Con objeto de aplicar la ecuación 2, primero vuelva a escribir la función para multiplicar y dividir entre 7:

Observe que $\operatorname{sen} 7x \neq 7 \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right)$$

Si considera $\theta = 7x$, entonces $\theta \to 0$, cuando $x \to 0$, de este modo, mediante la ecuación 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 7x}{4x} = \frac{7}{4} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 7x}{7x}\right) = \frac{7}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}$$ □

EJEMPLO 6 Calcule $\lim_{x\to 0} x\cot x$.

SOLUCIÓN En este caso se divide tanto al numerador como el denominador entre x:

$$\lim_{x\to 0} x\cot x = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\cos x}{\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}$$

$$= \frac{\cos 0}{1} \qquad \text{(según la continuidad del coseno y la ecuación 2)}$$

$$= 1$$ □

3.3 EJERCICIOS

1–16 Encuentre las derivadas de:

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$
2. $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{sen} x$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cot x$
4. $y = 2\csc x + 5\cos x$
5. $g(t) = t^3\cos t$
6. $g(t) = 4\sec t + \tan t$
7. $h(\theta) = \csc\theta + e^{\theta}\cot\theta$
8. $y = e^{u}(\cos u + cu)$
9. $y = \dfrac{x}{2 - \tan x}$
10. $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$
11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$
12. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\tan x}$
13. $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
14. $y = \csc\theta\,(\theta + \cot\theta)$
15. $f(x) = ex^{x}\csc x$
16. $y = x^2\operatorname{sen} x\tan x$

17. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x\cot x$.
18. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\tan x$.
19. Pruebe que $\dfrac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$.
20. Aplique la definición de derivada y pruebe que si $f(x) = \cos x$, por lo tanto $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto especificado.

21. $y = \sec x, \quad (\pi/3, 2)$
22. $y = e^{x}\cos x, \quad (0, 1)$
23. $y = x + \cos x, \quad (0, 1)$
24. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}, \quad (0, 1)$

25. (a) Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x\operatorname{sen} x$ en el punto $(\pi/2, \pi)$.
    (b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.
26. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sec x - 2\cos x$ en el punto $(\pi/3, 1)$.
    (b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.
27. (a) Si $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, encuentre $f'(x)$.
    (b) Compruebe para ver que su respuesta al inciso (a) es razonable trazando las gráficas de f y f' para $|x| < \pi/2$.
28. (a) Si $f(x) = e^{x}\cos x$, calcule $f'(x)$ y $f''(x)$.
    (b) Verifique que su respuesta del inciso (a) sea razonable graficando f, f' y f''.
29. Si $H(\theta) = \theta\operatorname{sen}\theta$ hallar $H'(\theta)$ y $H''(\theta)$
30. Si $f(x) = \sec x$, hallar $f''(\pi/4)$.

31. (a) Aplique la regla del cociente para derivar la función.

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique la expresión de $f(x)$ expresándola en términos de sen x y cos x y en seguida halle $f'(x)$.
(c) Demuestre que sus respuestas a los incisos (a) y (b) son equivalentes

32. Considere $f(\pi/3) = 4$ y $f'(\pi/3) = -2$, y sea

$$g(x) = f(x) \operatorname{sen} x$$

y

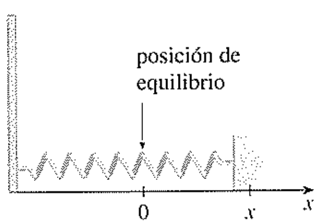
$$h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$$

Hallar (a) $g'(\pi/3)$ y (b) $h'(\pi/3)$.

33. ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x) = x + 2 \operatorname{sen} x$ tiene una tangente horizontal?

34. Determine los puntos de la curva $y = (\cos x)/(2 + \operatorname{sen} x)$ en los cuales la tangente es horizontal.

35. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada, en un movimiento armónico simple. (Véase la figura.) Su ecuación del movimiento es $x(t) = 8 \operatorname{sen} t$, donde t está en segundos y x en centímetros.
(a) Encuentre la velocidad y aclaración en el instante t.
(b) Encuentre la posición, la velocidad y la aclaración de la masa en el instante $t = 2\pi/3$. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante?



36. Una banda elástica cuelga de un gancho, con una masa sujeta en su extremo inferior. Cuando se tira de la masa hacia abajo y, luego, se deja en libertad, vibra verticalmente en un movimiento armónico simple. La ecuación del movimiento es $s = 2 \cos t + 3 \operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. (Tome la dirección positiva correspondiente hacia abajo.)
(a) Encuentre la velocidad y la aceleración en el instante t.
(b) Dibuje las funciones velocidad y aceleración.
(c) ¿Cuándo pasa la masa por la posición de equilibrio por primera vez?
(d) ¿Cuán lejos de su posición de equilibrio viaja la masa?
(e) ¿Cuándo es máxima la magnitud de la velocidad?

37. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada sobre una pared vertical. Sea θ el ángulo entre la parte superior de la escalera y la pared, y x la distancia del extremo inferior de aquélla hasta la pared. Si el extremo inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared, ¿con qué rapidez cambia x con respecto a θ cuando $\theta = \pi/3$?

38. Un objeto con peso W es arrastrado a lo largo de un plano horizontal por una fuerza que actúa a lo largo de una cuerda sujeta al propio objeto. Si la cuerda forma un ángulo θ con el plano, después la magnitud de la fuerza es

$$F = \frac{\mu W}{\mu \operatorname{sen} \theta + \cos \theta}$$

donde μ es una constante llamada *coeficiente de fricción*.
(a) Encuentre la relación de cambio de F con respecto a θ.
(b) ¿Cuándo es igual a 0 esta relación de cambio?
(c) Si $W = 50$ lb y $\mu = 0.6$ dibuje la gráfica de F como función de θ y úsela para localizar el valor de esta última para el cual $dF/d\theta = 0$. ¿Resulta coherente el valor con su respuesta al inciso (b)?

39–48 Determine el límite

39. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$

40. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 6x}$

41. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\tan 6t}{\operatorname{sen} 2t}$

42. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos \theta - 1}{\operatorname{sen} \theta}$

43. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\cos \theta)}{\sec \theta}$

44. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 3t}{t^2}$

45. $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\theta + \tan \theta}$

46. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \tan x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$

48. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

---

49. Derive cada identidad trigonométrica para obtener una identidad nueva (o conocida)

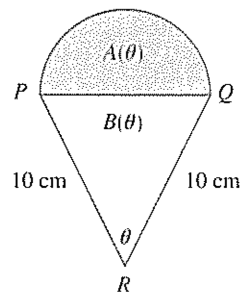
(a) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

(c) $\operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{1 + \cot x}{\csc x}$

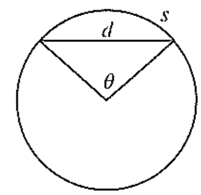
50. Un semicírculo con diámetro PQ descansa sobre un triángulo isósceles PQR para formar una región en forma de cono, como el que se ilustra en la figura. Si $A(\theta)$ es el área del semicírculo y $B(\theta)$ es el área del triángulo, halle

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



51. En la figura se muestra un arco circular de longitud s y una cuerda de longitud d, los dos subtendidos por un ángulo central θ. Encuentre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



3.4 LA REGLA DE LA CADENA

Suponga que se le pide derivar la función

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Las fórmulas de derivación que aprendió en las secciones anteriores de este capítulo no lo capacitan para calcular $F'(x)$.

▨ Vea la sección 1.3 para un repaso de funciones compuestas

Observe que F es una función compuesta. De hecho, si hace $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$, en este caso puede escribir $y = F(x) = f(g(x))$, es decir, $F = f \circ g$. Sabe cómo derivar tanto f como g, de modo que sería útil contar con una regla que le diga cómo hallar la derivada de $F = f \circ g$ en términos de las derivadas de f y g.

Resulta que la derivada de la función compuesta $f \circ g$ es el producto de las derivadas de f y g. Este hecho es uno de los más importantes de las reglas de derivación y se llama *regla de la cadena*. Parece plausible, si interpreta las derivadas como relaciones de cambio. Considere du/dx como la relación de cambio de u con respecto a x, dy/du como la relación de cambio de y en relación a u y dy/du como la relación de cambio de y con respecto de x. Si u cambia el doble de rápido que x y y tres veces de rápido que u, en este caso resulta razonable que y cambie seis veces de rápido que x y, por consiguiente, espera que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

REGLA DE LA CADENA Si g es derivable en x y f en $g(x)$, por lo tanto la función compuesta $F = f \circ g$ se definen mediante $F(x) = f(g(x))$, derivable en x y F' está dada por el producto

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En la notación de Leibniz, si tanto $y = f(u)$ como $u = g(x)$ son funciones diferenciables, por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

COMENTARIOS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN DE LA REGLA DE LA CADENA Sea Δu el cambio en u correspondiente a un cambio de Δx en x; es decir

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x)$$

Por lo tanto el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u)$$

Resulta tentador escribir

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{1} \qquad = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(Advierta que $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ porque g es continua.)

$$= \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

El único defecto de este razonamiento es que, en (1), podría suceder que $\Delta u = 0$ (incluso cuando $\Delta x \neq 0$) y, por supuesto, no puede dividir entre 0. No obstante, este razonamiento por lo menos sugiere que la regla de la cadena es verdadera. Al final de esta sección se da una prueba completa de la regla de la cadena. □

La regla de la cadena se puede escribir con apóstrofos

$$\boxed{2} \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

o bien, si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, en la notación de Leibniz:

$$\boxed{3} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

La ecuación 3 es fácil de recordar porque, si dy/du y du/dx fueran cocientes, después podría cancelar du. Sin embargo, recuerde que du no se ha definido y no debe concebir du/dx como un cociente real.

EJEMPLO 1 Encuentre $F'(x)$ si $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

SOLUCIÓN 1 (Con la ecuación 2): Al principio de esta sección, se expresó F como $F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $f(u) = \sqrt{u}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Dado que

$$f'(u) = \tfrac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

tiene

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

SOLUCIÓN 2 (con la ecuación 3): Si hace $u = x^2 + 1$ y $y = \sqrt{u}$, después

$$F'(x) = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$ □

Al utilizar la fórmula 3, debe tener presente que dy/dx se refiere a la derivada de y cuando ésta se considera como función de x (llamada *derivada de y con respecto a x*), en tanto que dy/du se refiere a la derivada de y cuando se considera como función de u (la derivada de y en función de u). Por lo tanto, en el ejemplo 1 y se puede considerar como función de x $\left(y = \sqrt{x^2+1}\right)$ y como función de u $\left(y = \sqrt{u}\right)$. Advierta que

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{en tanto que} \qquad \frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

NOTA En la aplicación de la regla de la cadena, trabaja del exterior hacia el interior. La fórmula 2 expresa que *deriva la función exterior* f [*en la función interior* $g(x)$] *y, a continuación, multiplica por la derivada de la función interior.*

$$\frac{d}{dx}\underbrace{f}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{f'}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(g(x))}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

EJEMPLO 2 Derive (a) $y = \text{sen}(x^2)$ y (b) $y = \text{sen}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a) Si $y = \text{sen}(x^2)$, por lo tanto la función exterior es la función seno y la interior es la función de elevar al cuadrado, de modo que la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{\text{sen}}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} = \underbrace{\cos}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}}\underbrace{(x^2)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{2x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

$$= 2x\cos(x^2)$$

(b) Observe que $\text{sen}^2 x = (\text{sen}\, x)^2$. En este caso, la función exterior es la de elevar al cuadrado y la interior es la función seno. Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\underbrace{(\text{sen}\, x)^2}_{\substack{\text{función}\\ \text{exterior}}} = \underbrace{2}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{exterior}}} \cdot \underbrace{(\text{sen}\, x)}_{\substack{\text{evaluada en}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}} \cdot \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{derivada de}\\ \text{la función}\\ \text{interior}}}$$

La respuesta se puede dejar como $2\,\text{sen}\, x\cos x$, o bien, escribirse como $\text{sen}\, 2x$ (por una identidad trigonométrica conocida como la fórmula del ángulo doble). □

Véase la página de referencia 2 o el apéndice D.

En el ejemplo 2(a), combinó la regla de la cadena con la regla para derivar la función seno. En general, si $y = \text{sen}\, u$, donde u es una función diferenciable de x, en consecuencia, por la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

De esta manera, $$\frac{d}{dx}(\text{sen } u) = \cos u \frac{du}{dx}$$

De manera semejante, todas las fórmulas para derivar funciones trigonométricas se pueden combinar con la regla de la cadena.

Para hacer explícito el caso especial de la regla de la cadena donde la función exterior f es una función potencia. Si $y = [g(x)]^n$, por lo tanto puede escribir $y = f(u) = u^n$, donde $u = g(x)$. Si aplica la regla de la cadena y, a continuación, la regla de la potencia, obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

$\boxed{4}$ **REGLA DE LA POTENCIA COMBINADA CON LA REGLA DE LA CADENA** Si n es cualquier número real y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

De modo alternativo, $$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Advierta que la derivada del ejemplo 1 pudo calcularse al tomar $n = \frac{1}{2}$ en la regla 4.

EJEMPLO 3 Derive $y = (x^3 - 1)^{100}$.

SOLUCIÓN Si, en (4), se toma $u = g(x) = x^3 - 1$ y $n = 100$, tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3 - 1)^{100} = 100(x^3 - 1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)\\ &= 100(x^3 - 1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3 - 1)^{99}\end{aligned}$$

V EJEMPLO 4 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$.

SOLUCIÓN En primer lugar, reescriba f: $f(x) = (x^2 + x + 1)^{-1/3}$.

De este modo $$\begin{aligned}f'(x) &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)\\ &= -\tfrac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-4/3}(2x + 1)\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^9$$

SOLUCIÓN Si se combina la regla de la potencia, la de la cadena y la del cociente, obtiene

$$\begin{aligned}g'(t) &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)\\ &= 9\left(\frac{t - 2}{2t + 1}\right)^8 \frac{(2t + 1) \cdot 1 - 2(t - 2)}{(2t + 1)^2} = \frac{45(t - 2)^8}{(2t + 1)^{10}}\end{aligned}$$

En la figura 1 se muestran las gráficas de las funciones y y y' del ejemplo 6. Advierta que y' es grande cuando y crece con rapidez, y $y' = 0$ cuando y tiene una tangente horizontal. De modo que la respuesta parece ser razonable.

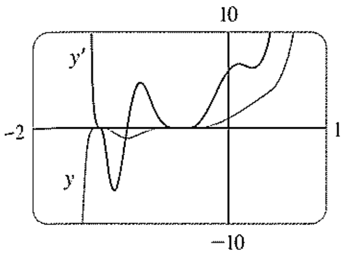


FIGURA 1

EJEMPLO 6 Derive $y = (2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^4$.

SOLUCIÓN En este ejemplo debe aplicar la regla del producto antes de aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dx} = (2x + 1)^5 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)^4 + (x^3 - x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)^5$$

$$= (2x + 1)^5 \cdot 4(x^3 - x + 1)^3 \frac{d}{dx}(x^3 - x + 1)$$

$$+ (x^3 - x + 1)^4 \cdot 5(2x + 1)^4 \frac{d}{dx}(2x + 1)$$

$$= 4(2x + 1)^5(x^3 - x + 1)^3(3x^2 - 1) + 5(x^3 - x + 1)^4(2x + 1)^4 \cdot 2$$

Al observar que cada término tiene el factor común $2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3$, podría factorizarlo y escribir la respuesta como

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x + 1)^4(x^3 - x + 1)^3(17x^3 + 6x^2 - 9x + 3)$$ □

EJEMPLO 7 Derive $y = e^{\operatorname{sen} x}$.

SOLUCIÓN En este caso, la función interior es $g(x) = \operatorname{sen} x$ y la exterior es la función exponencial $f(x) = e^x$. Por lo tanto, por la regla de la cadena,

La regla de la cadena en su forma más general

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\operatorname{sen} x}) = e^{\operatorname{sen} x} \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x$$ □

Puede aplicar la regla de la cadena para derivar una función exponencial con cualquier base $a > 0$. Recuerde, por lo visto en la sección 1.6, que $a = e^{\ln a}$. De este modo,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

y la regla de la cadena da

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \frac{d}{dx}(e^{(\ln a)x}) = e^{(\ln a)x} \frac{d}{dx}(\ln a)x$$

$$= e^{(\ln a)x} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

porque $\ln a$ es una constante. De este modo, tiene la fórmula

No confunda la fórmula 5 (donde x es el *exponente*) con la regla de la potencia (donde x es la base):

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

5 $$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a}$$

En particular, si $a = 2$, obtiene

6 $$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

En la sección 3.1, se dio la estimación

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x$$

Esto resulta coherente con la fórmula exacta (6), porque $\ln 2 \approx 0.693147$.

Queda clara la razón del nombre "regla de la cadena", cuando se alarga una caden se agrega al otro eslabón. Suponga que $y = f(u)$, $u = g(x)$ y $x = h(t)$, donde f, g y son funciones derivables. En tal caso, para calcular la derivada de y con respecto a aplica dos veces la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\frac{dx}{dt}$$

EJEMPLO 8 Si $f(x) = \operatorname{sen}(\cos(\tan x))$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x))\frac{d}{dx}\cos(\tan x) \\ &= \cos(\cos(\tan x))[-\operatorname{sen}(\tan x)]\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x))\operatorname{sen}(\tan x)\sec^2 x \end{aligned}$$

Advierta que la regla de la cadena se ha aplicado dos veces.

EJEMPLO 9 Derive $y = e^{\sec 3\theta}$.

SOLUCIÓN La función exterior es la función exponencial, la función media es la función secante y la función interna es la función triplicadora. De modo que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\theta} &= e^{\sec 3\theta}\frac{d}{d\theta}(\sec 3\theta) \\ &= e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta\frac{d}{d\theta}(3\theta) \\ &= 3e^{\sec 3\theta}\sec 3\theta\tan 3\theta \end{aligned}$$

CÓMO PROBAR LA REGLA DE LA CADENA

Recuerde que si $y = f(x)$ y x cambia de a a $a + \Delta x$, define el incremento de y como

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

Según la definición de derivada

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

Por consiguiente, si denota por medio de ε la diferencia entre el cociente de diferenc y la derivada, obtiene

$$\lim_{\Delta x \to 0}\varepsilon = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

pero $$\varepsilon = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a) \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$$

Si define ε como 0 cuando $\Delta x = 0$, después ε se convierte en función continua de Δx. De esta manera para una función f derivable, puede escribir

$$\boxed{7} \qquad \Delta y = f'(a)\,\Delta x + \varepsilon\,\Delta x \quad \text{donde} \quad \varepsilon \to 0 \text{ a medida que } \Delta x \to 0$$

y ε es una función continua de Δx. Esta propiedad de las funciones derivables es lo que permite probar la regla de la cadena.

PRUEBA DE LA REGLA DE LA CADENA Suponga que $u = g(x)$ es derivable en a y $y = f(u)$ lo es en $b = g(a)$. Si Δx es un incremento en x y Δu y Δy son los incrementos correspondientes en u y y, en seguida puede aplicar la ecuación 7 para escribir

$$\boxed{8} \qquad \Delta u = g'(a)\,\Delta x + \varepsilon_1\,\Delta x = [g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. De manera análoga

$$\boxed{9} \qquad \Delta y = f'(b)\,\Delta u + \varepsilon_2\,\Delta u = [f'(b) + \varepsilon_2]\,\Delta u$$

donde $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta u \to 0$. Si ahora sustituye la expresión para Δu de la ecuación 8 en la ecuación 9, obtiene

$$\Delta y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\,\Delta x$$

de modo que $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Cuando $\Delta x \to 0$, la ecuación 8 demuestra que $\Delta u \to 0$. De modo que tanto el $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ a medida que $\Delta x \to 0$. Debido a eso

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$
$$= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Esto prueba la regla de la cadena. □

3.4 EJERCICIOS

1–6 Escriba la función compuesta en la forma $f(g(x))$. [Identifique la función interior $u = g(x)$ y la exterior $y = f(u)$]. Luego, encuentre la derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$

2. $y = \sqrt{4 + 3x}$

3. $y = (1 - x^2)^{10}$

4. $y = \tan(\operatorname{sen} x)$

5. $y = e^{\sqrt{x}}$

6. $y = \operatorname{sen}(e^x)$

7–46 Halle la derivada de la función.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$

8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$

9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$

10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$

11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$

12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$

13. $y = \cos(a^3 + x^3)$

14. $y = a^3 + \cos^3 x$

15. $y = xe^{-kx}$

16. $y = 3\cos(n\theta)$

17. $g(x) = (1 + 4x)^5(3 + x - x^2)^8$

18. $h(t) = (t^4 - 1)^3(t^3 + 1)^4$

19. $y = (2x - 5)^4(8x^2 - 5)^{-3}$

20. $y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$

21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$ **22.** $y = e^{-5x} \cos 3x$

23. $y = e^{x \cos x}$ **24.** $y = 10^{1-x^2}$

25. $F(z) = \sqrt{\dfrac{z - 1}{z + 1}}$ **26.** $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$

27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$ **28.** $y = \dfrac{e^u - e^u}{e^u + e^{-u}}$

29. $y = \text{sen}(\tan 2x)$ **30.** $G(y) = \left(\dfrac{y^2}{y + 1}\right)^5$

31. $y = 2^{\text{sen}\, \pi x}$ **32.** $y = \tan^2(3\theta)$

33. $y = \sec^2 x + \tan^2 x$ **34.** $y = x \,\text{sen}\, \dfrac{1}{x}$

35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$ **36.** $f(t) = \sqrt{\dfrac{t}{t^2 + 4}}$

37. $y = \cot^2(\text{sen}\, \theta)$ **38.** $y = e^{k \tan \sqrt{x}}$

39. $f(t) = \tan(e^t) + e^{\tan t}$ **40.** $y = \text{sen}(\text{sen}(\text{sen}\, x))$

41. $f(t) = \text{sen}^2(e^{\text{sen}^2 t})$ **42.** $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$ **44.** $y = 2^{3^{x^2}}$

45. $y = \cos\sqrt{\text{sen}\,(\tan \pi x)}$ **46.** $y = [x + (x + \text{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Hallar la primera y segunda derivadas de la función.

47. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **48.** $y = xe^{cx}$

49. $y = e^{\alpha x} \,\text{sen}\, \beta x$ **50.** $y = e^{e^x}$

51–54 Encuentre una ecuación de la recta tangente de la curva en un punto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$ **52.** $y = \text{sen}\, x + \text{sen}^2 x$, $(0, 0)$

53. $y = \text{sen}(\text{sen}\, x)$, $(\pi, 0)$ **54.** $y = x^2 e^{-x}$ $(1, 1/e)$

---

55. (a) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ en el punto $(0, 1)$.

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

56. (a) La curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ se llama *curva nariz de bala*. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $(1, 1)$.

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente sobre la misma pantalla.

57. (a) Si $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encuentre $f'(x)$.

(b) Compruebe que su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

58. La función $f(x) = \text{sen}(x + \text{sen}\, 2x)$, $0 \leq x \leq \pi$, surge en aplicaciones de la síntesis de modulación de frecuencia (FM).

(a) Use una gráfica de f producida por un aparato graficador para trazar un boceto aproximado de la gráfica de f'.

(b) Calcule $f'(x)$ y utilice esta expresión, junto con un dispositivo graficador, para graficar f'. Compare con su boceto del inciso (a).

59. Encuentre todos los puntos en la gráfica de la función

$$f(x) = 2\,\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x$$

en los cuales la recta tangente es horizontal.

60. Determine las coordenadas x de todos los puntos de la curva $y = \text{sen}\, 2x - 2\,\text{sen}\, x$ en los cuales la tangente es horizontal.

61. Si $F(x) = f(g(x))$ donde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$. $g(5) = -2$, y $g'(5) = 6$ Hallar $F'(5)$.

62. Si $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$, donde $f(1) = 7$ y $f'(1) = 4$, hallar $h'(1)$.

63. Se da una tabla de valores de f, g, f' y g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Si $h(x) = f(g(x))$, encuentre $h'(1)$.

(b) Si $H(x) = g(f(x))$, halle $H'(1)$.

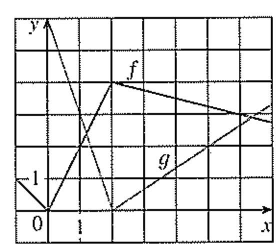
64. Sean f y g las funciones del ejercicio 63.

(a) Si $F(x) = f(f(x))$, encuentre $F'(2)$.

(b) Si $G(x) = g(g(x))$, encuentre $G'(3)$.

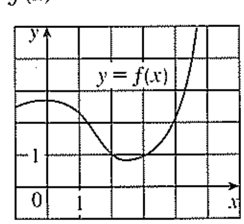
65. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se ilustran, sea $u(x) = f(g(x))$, $v(x) = g(f(x))$, y $w(x) = g(g(x))$. Encuentre, si existe, cada derivada. En caso contrario, explique por qué.

(a) $u'(1)$ (b) $v'(1)$ (c) $w'(1)$



66. Si f es la derivada cuya gráfica se muestra, sea $h(x) = f(f(x)$ y $g(x) = f(x^2)$. Utilice la gráfica de f para estimar el valor de cada derivada.

(a) $h'(2)$ (b) $g'(2)$



67. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$. Sea $F(x) = f(e^x)$ y $G(x) = e^{f(x)}$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

68. Suponga que f es derivable en $\mathbb{R}$ y α es un número real. Sea $F(x) = f(x^\alpha)$ y $G(x) = [f(x)]^\alpha$. Encuentre expresiones para (a) $F'(x)$ y (b) $G'(x)$.

69. Sea $r(x) = f(g(h(x)))$, donde $h(1) = 2$, $g(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g'(2) = 5$ y $f'(3) = 6$. Encuentre $r'(1)$.

70. Si g es una función derivable dos veces y $f(x) = xg(x^2)$, hallar f'' en términos de g, g', y g''.

71. Si $F(x) = f(3f(4f(x)))$, donde $f(0) = 0$ y $f'(0) = 2$, hallar $F'(0)$.

72. Si $F(x) = f(xf(xf(x)))$, donde $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, y $f'(3) = 6$, hallar $F'(1)$.

73. Demuestre que la función $y = Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = 0$.

74. ¿Para que valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

75. Hallar la quincuagésima derivada de $y = \cos 2x$.

76. Encuentre la derivada 1000 de $f(x) = xe^{-x}$.

77. La ecuación expresa el desplazamiento de una partícula de una cuerda vibrante.

$$s(t) = 10 + \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}(10\pi t)$$

En ella s se mide en centímetros y t en segundos. Encuentre la velocidad y la aceleración de la partícula después de t segundos.

78. Si la ecuación del movimiento de una partícula está dada por $s = A\cos(\omega t + \delta)$, se dice que la partícula describe un *movimiento armónico simple.*
(a) Encuentre la velocidad de la partícula en el instante t.
(b) ¿Cuándo es 0 la velocidad?

79. Una estrella variable Cefeida tiene brillantez que aumenta y disminuye de manera alternada. La estrella de ese tipo más visible es la Delta Cefeida, para la cual el intervalo entre los momentos de máxima brillantez es de 5.4 días. La brillantez promedio de esta estrella es de 4.0 y su brillantez cambia en ± 0.35. En vista de estos datos, la brillantez de la Delta Cefeida en el tiempo t, donde éste se mide en días, se ha modelado mediante la función

$$B(t) = 4.0 + 0.35\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{5.4}\right)$$

(a) Halle la relación de cambio de la brillantez después de t días.
(b) Encuentre, correcta hasta dos cifras decimales, la relación de aumento después de un día.

80. En el ejemplo 4 de la sección 1.3, obtuvo un modelo para la duración de la luz diurna (en horas) en Filadelfia en el t-ésimo día del año

$$L(t) = 12 + 2.8\operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

Aplique este modelo para comparar cómo aumentan las horas de luz diurna en Filadelfia el 21 de marzo y el 21 de mayo.

81. El movimiento de un resorte que se somete a una fuerza de fricción o una fuerza de amortiguamiento (como un amortiguador en un automóvil) se modela a menudo mediante el producto de una función exponencial y una función seno o coseno. Suponga que la ecuación del movimiento de un punto sobre tal resorte es

$$s(t) = 2e^{-1.5t}\operatorname{sen} 2\pi t$$

donde s se mide en centímetros y t en segundos. Halle la velocidad después que transcurren t segundos y dibuje las funciones de posición y de velocidad para $0 \leqslant t \leqslant 2$.

82. En ciertas circunstancias, un rumor se esparce según la ecuación

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

donde $p(t)$ es la proporción de la población que lo conoce en el tiempo t, y a y k son constantes positivas. [En la sección 9.4 verá que ésta es una ecuación razonable para $p(t)$.]
(a) Encuentre $\lim_{t\to\infty} p(t)$.
(b) Halle la rapidez de esparcimiento del rumor.
(c) Dibuje p para el caso en que $a = 10$, $k = 0.5$, con t medido en horas. Use la gráfica para estimar cuánto tiempo transcurrirá para que el 80% de la población escuche el rumor.

83. Una particula se mueve a lo largo de una línea recta con desplazamiento $s(t)$, velocidad $v(t)$, y aceleración $a(t)$. Demuestre que

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Explique la diferencia entre los significados de los derivados dv/dt y dv/ds.

84. Se bombea aire dentro de un globo esférico para el clima. En cualquier tiempo t, el volumen del globos es $V(t)$ y su radio es $r(t)$.
(a) ¿qué representa las derivadas dV/dr y dV/dt.
(b) Expres dV/dt en terminos de dr/dt.

85. El *flash* (unidad de destello) de una cámara funciona mediante el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina cuando se lanza el destello. Los datos siguientes describen la carga que queda en el capacitor (en microcoulombs, μC) en el instante t (en segundos)

t	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
Q	100.00	81.87	67.03	54.88	44.93	36.76

(a) Halle, usando una calculadora graficadora o una computadora, un modelo exponencial para la carga.
(b) La derivada $Q'(t)$ representa la corriente eléctrica (en microamperes, μA) que fluye del capacitor hacia el bulbo de la lámpara de destello. Con el resultado del inciso (a), estime la corriente cuando $t = 0.04$ s. Compare la respuesta con el resultado del ejemplo 2 de la sección 2.1.

86. En la tabla se da la población de estadounidenses, desde 1790 hasta 1860.

Año	Población	Año	Población
1790	3 929 000	1830	12 861 000
1800	5 308 000	1840	17 063 000
1810	7 240 000	1850	23 192 000
1820	9 639 000	1860	31 443 000

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para hacer coincidir una función exponencial con los datos. Dibuje los puntos correspondientes a los datos y el modelo exponencial. ¿Qué tan bien coinciden?
(b) Estime las proporción de incremento de la población en 1800 y 1850 promediando las pendientes de las rectas secantes.
(c) Use el modelo exponencial del inciso (a) para estimar las proporciones de crecimiento en 1800 y 1850. Compare estas estimaciones con las del inciso (b).
(d) Utilice el modelo exponencial para predecir la población en 1870. Compare con la población real de 38 558 000. ¿Puede explicar la discrepancia?

CAS **87.** Los sistemas algebraicos para computadora (CAS) tienen comandos que derivan funciones, pero la forma de la respuesta quizá no convenga, como consecuencia, pueden ser necesarios otros comandos para simplificarla.
(a) Use un CAS para hallar la derivada del ejemplo 5 y compárela con la respuesta en ese ejemplo. Enseguida, use el comando de simplificación y vuelva a comparar.
(b) Utilice un CAS para derivar la función del ejemplo 6. ¿Qué sucede si usa el comando de simplificación? ¿Qué ocurre si emplea el comando de factorización? ¿Cuál forma de la respuesta sería la mejor para localizar las tangentes horizontales?

CAS **88.** (a) Use un CAS para derivar la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - x + 1}{x^4 + x + 1}}$$

y simplificar el resultado.
(b) ¿En dónde tiene la gráfica de f tangentes horizontales?
(c) Trace las gráficas de f y f' en la misma pantalla. ¿Son coherentes las gráficas con su respuesta al inciso (b)?

89. Mediante la regla de la cadena demuestre lo siguiente.
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

90. Aplique la regla de la cadena y la regla del producto para obtener otra demostración de la regla del cociente. [*Sugerencia:* escriba $f(x)/g(x) = f(x)[g(x)]^{-1}$.]

91. (a) Si n es un entero positivo, demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^n x \cos nx) = n \operatorname{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$$

(b) Plantee una fórmula para la derivada de $y = \cos^n x \cos nx$ que es similar a la del inciso (a).

92. Suponga que $y = f(x)$ es una curva que siempre queda arriba del eje x y nunca tiene una tangente horizontal, donde f es derivable en todos los puntos. ¿Para qué valor de y la relación de cambio de y^5 con respecto a x es 80 veces la tasa de cambio de y con respecto a x?

93. Use la regla de la cadena para demostrar que si θ se mide en grados, después

$$\frac{d}{d\theta}(\operatorname{sen}\theta) = \frac{\pi}{180}\cos\theta$$

(Esto da una razón para la convención de que siempre se use el radián cuando se manejen funciones trigonométricas en el cálculo: las fórmulas de derivación no serían tan sencillas si usara el grado.)

94. (a) Escriba $|x| = \sqrt{x^2}$ y aplique la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$$

(b) Si $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, encuentre $f'(x)$ y trace las gráficas de f y f'. ¿En dónde f no es derivable?
(c) Si $g(x) = \operatorname{sen}|x|$, halle $g'(x)$ y dibuje g y g'. ¿En dónde g no es derivable?

95. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, f y g son funciones derivables dos veces, demuestre que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

96. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, donde f y g tienen tercera derivada, hallar una formula por d^3y/dx^3 parecida a la que se proporciona en el ejercicio 95

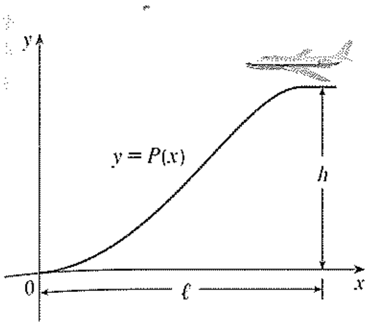
PROYECTO DE APLICACIÓN

¿DÓNDE DEBE UN PILOTO INICIAR UN DESCENSO?

En la figura se muestra una trayectoria de aproximación para el aterrizaje de un avión que satisface las condiciones siguientes:

(i) La altura de crucero es h, cuando se inicia el descenso a una distancia ℓ del punto de contacto con la pista en el origen.

(ii) El piloto debe mantener una rapidez horizontal constante v a todo lo largo del descenso.



(iii) El valor absoluto de la aceleración vertical no debe sobrepasar una constante k (la cual es mucho menor que la aceleración debida a la gravedad).

1. Encuentre un polinomio cúbico $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que satisfaga la condición (i), imponiendo condiciones adecuadas sobre $P(x)$ y $P'(x)$ en el inicio del descenso y el contacto con la pista.
2. Use las condiciones (ii) y (iii) para demostrar que

$$\frac{6hv^2}{\ell^2} \leqslant k$$

3. Suponga que una aerolínea comercial decide no permitir que la aceleración vertical de un avión sea mayor que $k = 860$ mi/h^2. Si la altitud de crucero de un avión es de 35 000 pies y la rapidez de 300 mi/h, ¿a qué distancia del aeropuerto debe el piloto iniciar el descenso?
4. Trace la gráfica de la trayectoria de aproximación, si se satisfacen las condiciones que se enuncian en el problema 3.

3.5 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

La mayor parte de las funciones vistas pueden describirse expresando una variable explícitamente en términos de otra variable; por ejemplo,

$$y = \sqrt{x^3 + 1} \qquad \text{o bien} \qquad y = x \operatorname{sen} x$$

o, en general, $y = f(x)$. Sin embargo, algunas funciones se definen implícitamente por medio de una relación entre x y y como

$$\boxed{1} \qquad x^2 + y^2 = 25$$

o bien

$$\boxed{2} \qquad x^3 + y^3 = 6xy$$

En algunos casos, es posible resolver una ecuación de ese tipo para y como una función explícita (o varias funciones) de x. Por ejemplo, si resuelve la ecuación 1 para y, obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$, de modo que dos de las funciones determinadas por la ecuación implícita 1 son $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Las gráficas de f y g son los semicírculos superior e inferior del círculo $x^2 + y^2 = 25$. (Véase la figura 1.)

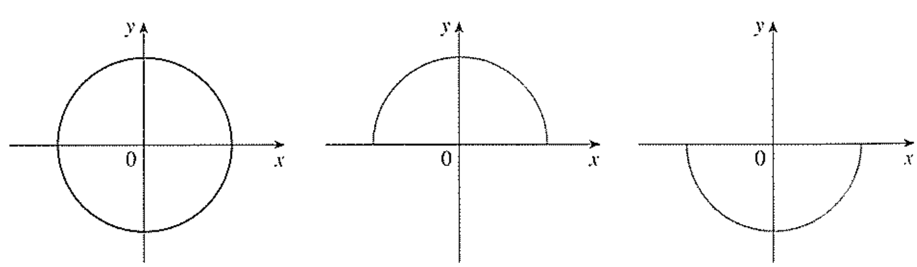


FIGURA 1 (a) $x^2 + y^2 = 25$ (b) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ (c) $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

No es fácil resolver a mano la ecuación 2 para y explícitamente como función x. (Con un sistema algebraico para computadora no hay dificultad, pero las expresiones que se obtienen son muy complicadas.) Pero (2) es la ecuación de una curva llamada **folio** **Descartes**, que se ilustra en la figura 2 y, de manera implícita, define y como varias fu ciones de x. En la figura 3 se muestran las gráficas de esas tres funciones. Cuando se di que f es una función definida implícitamente por la ecuación 2, se da a entender que ecuación

$$x^3 + [f(x)]^3 = 6xf(x)$$

es verdadera para todos los valores de x en el dominio de f.

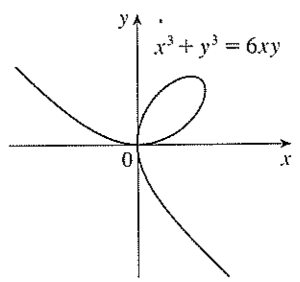


FIGURA 2 Folio de Descartes

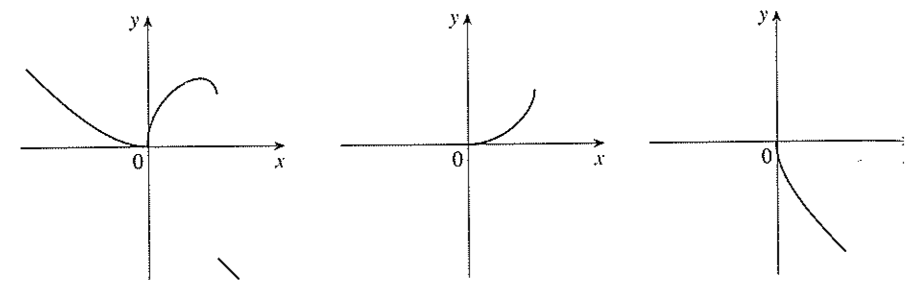


FIGURA 3 Gráficas de tres funciones definidas por el folio de Descartes

Por fortuna, no es necesario resolver una ecuación para y en términos de x con fin de hallar la derivada de y. En lugar de ello, aplica el método de **derivación imp cita**. Éste consiste en derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a x y continuación, resolver la ecuación resultante para y'. En los ejemplos y ejercicios esta sección, siempre se supone que la ecuación dada determina y implícitamente mo una función derivable de x, de modo que puede aplicarse el método de derivaci implícita.

EJEMPLO 1

(a) Si $x^2 + y^2 = 25$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) Encuentre la ecuación de la tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$, en el punto $(3, 4)$.

SOLUCIÓN 1

(a) Derive ambos miembros de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Recuerde que y es una función de x, aplique la regla de la cadena y tendrá

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto $$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Ahora, se resuelve esta ecuación para dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) En el punto (3, 4), tiene $x = 3$ y $y = 4$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Por lo tanto, una ecuación de la tangente al círculo en (3, 4) es

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad 3x + 4y = 25$$

SOLUCIÓN 2

(b) Al resolver la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, obtiene $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. El punto (3, 4) se encuentra en el semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$ y, por consiguiente, considere la función $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Si al aplicar la regla de la cadena deriva f, tiene

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(25 - x^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

En el ejemplo 1 se ilustra que incluso cuando es posible resolver una ecuación explícita para y en términos de x puede ser más fácil aplicar la derivación implícita

De modo que $$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

y, como en la solución 1, la ecuación de la tangente es $3x + 4y = 25$. □

NOTA 1 La expresión $dy/dx = -x/y$ en la solución 1 da la derivada en términos tanto de x como de y. Esto es correcto sin importar cuál función y queda determinada por la ecuación dada. Por ejemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

en tanto que, para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

EJEMPLO 2

(a) Encuentre y' si $x^3 + y^3 = 6xy$.

(b) Halle la tangente al folio de Descartes $x^3 + y^3 = 6xy$, en el punto (3, 3).

(c) ¿En cuáles puntos de la curva se tiene que la recta tangente es horizontal o vertical?

SOLUCIÓN

(a) Si se derivan ambos miembros de $x^3 + y^3 = 6xy$ con respecto a x, considerando y como función de x, y usando la regla de la cadena en el término y^3 y la regla del producto en el término $6xy$, obtiene

$$3x^2 + 3y^2y' = 6xy' + 6y$$

o bien $$x^2 + y^2y' = 2xy' + 2y$$

Ahora resuelva para y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$(y^2 - 2x)y' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

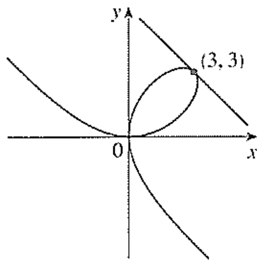


FIGURA 4

(b) Cuando $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

un vistazo a la figura 4 confirma que éste es un valor razonable para la pendiente en $(3, 3)$ De este modo, una ecuación de la recta tangente al folio en $(3, 3)$ es

$$y - 3 = -1(x - 3) \qquad \text{o bien} \qquad x + y = 6$$

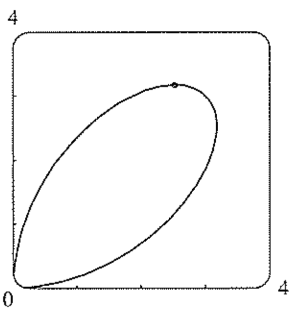


FIGURA 5

(c) La recta tangente es horizontal si $y' = 0$. Si utiliza la expresión para y' del inciso (a), $y' = 0$ cuando $2y - x^2 = 0$. (siempre que $y^2 - 2x \neq 0$). Al sustituir $y = \frac{1}{2}x^2$ en la ecuación de la curva, obtiene

$$x^3 + \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$$

lo cual se simplifica para quedar $x^6 = 16x^3$. De modo que $x \neq 0$, en el primer cuadrant o bien, $x^3 = 16$. Si $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$, por lo tanto $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Por esto, la tangen te es horizontal en $(0, 0)$ y en $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, lo cual es aproximadamente $(2.5198, 3.1748)$. A estudiar la figura 5, es claro que la respuesta es razonable.

NOTA 2 Existe una fórmula para las tres raíces de una ecuación cúbica, que es seme jante a la fórmula cuadrática pero mucho más complicada. Si usa esta fórmula (o un sis tema de cómputo algebraico) para resolver la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$, para y en término de x, obtiene tres funciones determinadas por la ecuación:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

y

$$y = \tfrac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 + \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}x^3 - \sqrt{\tfrac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right]$$

■ El matemático noruego Niels Abel probó en 1824 que no se puede dar una fórmula general para las raíces de una ecuación de quinto grado. Tiempo después, el matemático francés Evariste Galois probó que es imposible hallar una fórmula general para las raíces de una ecuación de n-ésimo grado (en términos de operaciones algebraicas sobre los coeficientes), si n es cualquier entero mayor que 4.

(Éstas son las tres funciones cuyas gráficas se muestran en la figura 3.) Usted pued ver que el método de la derivación implícita ahorra una cantidad enorme de trabajo, e casos como éste. Es más, la derivación implícita funciona con igual facilidad para fun ciones como

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

las cuales son *imposibles* de resolver para y en términos de x.

EJEMPLO 3 Encuentre y' si $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$.

SOLUCIÓN Si deriva implícitamente con respecto a x y recuerda que y es una función de x, obtiene

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = y^2(-\operatorname{sen} x) + (\cos x)(2yy')$$

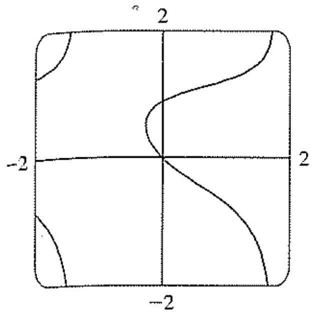


FIGURA 6

(Note que en el lado izquierdo aplica la regla de la cadena y, en el derecho, la regla de la cadena y la del producto.) Si agrupa los términos que contienen y', obtiene

$$\cos(x + y) + y^2 \operatorname{sen} x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Por lo que
$$y' = \frac{y^2 \operatorname{sen} x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}$$

En la figura 6 dibujada con el comando de construir gráficas en forma implícita de un sistema de cálculo algebraico, se muestra parte de la curva $\operatorname{sen}(x + y) = y^2 \cos x$. Como comprobación del cálculo, advierta que $y' = -1$, cuando $x = y = 0$ y en la gráfica parece que la pendiente es alrededor de -1 en el origen. □

El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar la segunda derivada de una función si es definida implícita.

EJEMPLO 4 Hallar y'' sí $x^4 + y^4) = 16$.

SOLUCIÓN Derivando la ecuación de manera implicita con respecto a x, obtiene

$$4x^3 + 4y^3y' = 0$$

Resolviendo para y'

$$\boxed{3} \qquad y' = -\frac{x^3}{y^2}$$

■ La figura 7 muestra la gráfica de la curva $x^4 + y^4 = 16$ del ejemplo y observe que su versión del círculo se extiende y se achata $x^2 + y^2 = 4$. Por esta razón algunas veces se le llama círculo grueso, inicia muy escarpador a la izquierda pero rapidamente se hace muy plano. Se puede ver de la expresión.

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} = -\left(\frac{x}{y}\right)^3$$

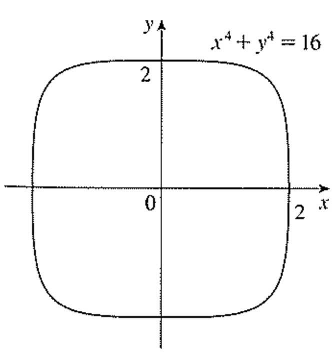


FIGURA 7

Para hallar y'' derive esta expresión para y' aplicando la regla del cociente recordando que y es una función de x:

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3(d/dx)(x^3) - x^3(d/dx)(y^3)}{(y^3)^2}$$
$$= -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$

Si ahora sustituye la ecuación 3 dentro de esta expresión, obtiene

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^2y^2\left(-\dfrac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$
$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}$$

Pero el valor de x y y debe satisfacer la ecuación original $x^4 + y^4 = 16$. De esa manera la respuesta se simplifica a

$$y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\frac{x^2}{y^7}$$ □

DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas inversas se repasan en la sección 1.6. En la sección 2.5 analizó su continuidad y en la sección 2.6 sus asíntotas. Aquí se usa la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, porque se supone que estas funciones son derivables. [En efecto, si f es una función derivable uno a uno, se pued demostrar que su función inversa f^{-1} también es derivable, excepto donde sus tangente son verticales. Esto es posible porque la gráfica de una función derivable no tiene vértices ı bucles y, de este modo, si la refleja con respecto a $y = x$, la gráfica de su función invers tampoco tiene vértices ni bucles.]

Recuerde la definición de la función arco seno:

$$y = \operatorname{sen}^{-1}x \qquad \text{significa} \qquad \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Al derivar implícitamente $\operatorname{sen} y = x$ con respecto a x, obtiene

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ahora $\cos y \geqslant 0$, debido a que $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$, de modo que

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

■ El mismo método puede utilizarse para hallar una fórmula para la derivada de *cualquier* función inversa. Véase el ejercicio 67.

De manera que $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

■ En la figura 8 se muestra la gráfica de $f(x) = \tan^{-1}x$ y su derivada $f'(x) = 1/(1 + x^2)$. Advierta que f es creciente y $f'(x)$ siempre es positiva. El hecho de que $\tan^{-1}x \to \pm\pi/2$ como $x \to \pm\infty$ se refleja en el hecho de que $f'(x) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$.

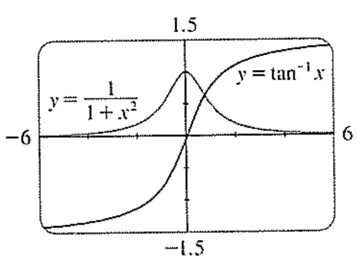


FIGURA 8

La fórmula para la derivada de la función arco tangente se obtiene de manera semeja te. Si $y = \tan^{-1} x$, en tal caso $\tan y = x$. Si se deriva esta última ecuación implícitamer con respecto a x, tiene

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1 + x^2}}$$

V EJEMPLO 5 Derive (a) $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^{-1}x}$ y (b) $f(x) = x \arctan\sqrt{x}$.

SOLUCIÓN

(a) $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-1} = -(\operatorname{sen}^{-1}x)^{-2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x)$$

$$= -\frac{1}{(\operatorname{sen}^{-1}x)^2\sqrt{1 - x^2}}$$

■ Recuerde que $\arctan x$ es una notación alterna para $\tan^{-1}x$.

(b) $$f'(x) = x\frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2}\left(\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\right) + \arctan\sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2(1 + x)} + \arctan\sqrt{x}$$

Las funciones trigonométricas inversas que se generan con mayor frecuencia son las que acaba de analizar. Las derivadas de las cuatro restantes se presentan en la tabla siguiente. Las demostraciones de las fórmulas se dejan como ejercicios.

Las fórmulas de las derivadas de $\csc^{-1}x$ y $\sec^{-1}x$ dependen de las definiciones que se aplican para estas funciones. Véase ejercicio 58.

DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\csc^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

3.5 EJERCICIOS

1–4

(a) Encuentre y' por derivación implícita.

(b) Resuelva en forma explícita la ecuación para y y derive para obtener y' en términos de x.

(c) Compruebe que sean coherentes sus soluciones a los incisos (a) y (b) sustituyendo la expresión para y en su solución del inciso (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$ **2.** $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$ **4.** $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encuentre dy/dx por derivación implícita.

5. $x^2 + y^2 = 1$ **6.** $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$ **8.** $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$ **10.** $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$ **12.** $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$ **14.** $y \operatorname{sen}(x^2) = x \operatorname{sen}(y^2)$

15. $e^{x^2y} = x + y$ **16.** $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$ **18.** $\tan(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$ **20.** $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

21. Si $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ y $f(1) = 2$, encuentre $f'(1)$.

22. Si $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, determine $g'(0)$.

23–24 Considere a y como la variable independiente y a x como la variable dependiente, y aplique la derivación implícita para calcular dx/dy.

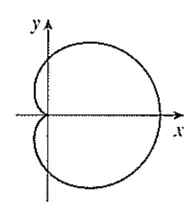
23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$ **24.** $y \sec x = x \tan y$

25–30 Utilice la derivación implícita para encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

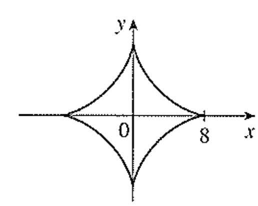
25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbola)

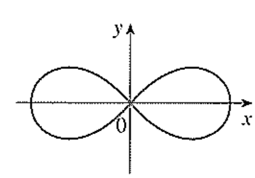
27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



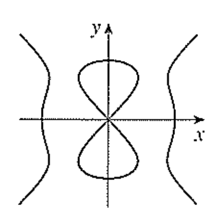
28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva del diablo)



31. (a) La curva con ecuación $y^2 = 5x^4 - x^2$ se llama **kampila de Eudoxo**. Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 2)$.

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la curva y la recta tangente en una pantalla común. (Si su aparato graficador puede trazar las gráficas de curvas definidas implícitamente, después utilice esa capacidad. Si no es así, puede dibujar esta curva trazando sus mitades superior e inferior por separado.)

32. (a) La curva con ecuación $y^2 = x^3 + 3x^2$ se llama **cúbica de Tschirnhausen.** Encuentre una ecuación de la recta tangente a esta curva, en el punto $(1, -2)$.
(b) ¿En cuáles puntos esta curva tiene una tangente horizontal?
(c) Ilustre los incisos (a) y (b) dibujando la curva y las rectas tangentes en una pantalla común.

33–36 Hallar por derivación implicita

33. $9x^2 + y^2 = 9$ **34.** $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

35. $x^3 + y^3 = 1$ **36.** $x^4 + y^4 = a^4$

CAS **37.** Se pueden crear formas caprichosas con las capacidades de construir gráficas en forma implícita de los sistemas algebraicos para computadora (sistema de computo algebraico).
(a) Trace la gráfica de la curva con ecuación

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

¿En cuántos puntos esta curva tiene tangentes horizontales? Estime las coordenadas x de estos puntos.
(b) Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes en los puntos $(0, 1)$ y $(0, 2)$.
(c) Halle las coordenadas x exactas de los puntos mencionados en el inciso (a).
(d) Cree curvas incluso más caprichosas modificando la ecuación del inciso (a).

CAS **38.** (a) La curva con ecuación

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

se ha ligado a un carretón que rebota. Utilice un sistema de computo algebraico para dibujarla y descubra por qué.
(b) ¿En cuántos puntos esta curva tiene tangentes horizontales? Encuentre las coordenadas x de estos puntos.

39. Halle los puntos de la lemniscata del ejercicio 29 donde la tangente sea horizontal.

40. Demuestre por derivación implícita que la tangente a la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

41. Formule una ecuación para la tangente a la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

42 Demuestre que la suma de las intersecciones x y y de cualquier recta tangente a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ es igual a c.

43. Mediante la derivación implícita demuestre que cualquier tangente en un punto P a una circunferencia con centro O es perpendicular al radio OP.

44. La regla de la potencia se puede demostrar por medio de la derivación implícita para el caso donde n es un número racional, $n = p/q$, y se presupone que $y = f(x) = x^n$ es una función derivable. Si $y = x^{p/q}$, entonces $y^q = x^p$. Mediante la derivación implícita demuestre que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

45–54 Halle la derivada de la función. Simplifique donde se pueda.

45. $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$ **46.** $y = \sqrt{\tan^{-1} x}$

47. $y = \operatorname{sen}^{-1}(2x + 1)$ **48.** $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\sec^{-1} x$

49. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\arccos x$ **50.** $y = \tan^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

51. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$ **52.** $F(\theta) = \arcsin\sqrt{\operatorname{sen}\theta}$

53. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$ **54.** $y = \arctan\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

55–56 Encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

55. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\operatorname{arcsen} x$ **56.** $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

57. Compruebe las fórmulas $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ y $(d/dx)(\operatorname{sen}^{-1}x)$ por medio del mismo método.

58. (a) Una manera de definir $\sec^{-1}x$ es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y < \pi/2$, o bien, $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Demuestre que con esta definición,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Otro modo de definir $\sec^{-1}x$ que se utiliza a veces es decir que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Demuestre que con esta definición

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

59–62 Dos curvas son **ortogonales** si sus líneas tagentes son perpendiculares en cada punto de intersección. Demuestre que las familias dadas de curvas son **trayectorias ortogonales** entre sí, es decir, cualquier curva en una familia es ortogonal a cualquier curva en la otra familia. Dibuje ambas familias de curvas usando los mismos ejes de coordenadas.

59. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

60. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

61. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

62. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

63. La ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa una "elipse girada"; es decir, una elipse cuyos ejes no son paralelos a los ejes de coordenadas. Encuentre los puntos en que esta elipse cruza el eje x y demuestre que las rectas tangentes en estos puntos son paralelas.

64. (a) ¿Dónde la recta normal a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$, en el punto $(-1, 1)$ cruza la elipse por segunda vez?

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la elipse y la recta normal.

65. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$ donde la pendiente de la recta tangente es -1.

66. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasen por el punto $(12, 3)$.

67. (a) Suponga que f es una función derivable uno a uno y que su función inversa f^{-1} también es derivable. Utilice la derivación implícita para demostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el denominador no sea 0.

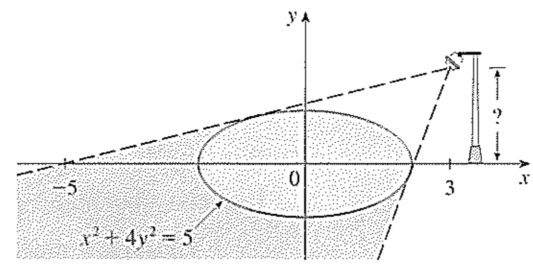
(b) Si $f(4) = 5$ y $f'(4) = \frac{2}{3}$, encuentre $(f^{-1})'(5)$.

68. (a) Demuestre que $f(x) = 2x + \cos x$ es uno a uno.

(b) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(1)$?

(c) Use la fórmula del ejercicio 67(a) para hallar $(f^{-1})'(1)$.

69. En la figura se muestra una lámpara colocada tres unidades hacia la derecha del eje y y una sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿qué tan arriba del eje x está colocada la lámpara?



3.6 DERIVADAS DE FUNCIONES LOGARÍTMICAS

En esta sección se usa la derivación implícita para hallar las derivadas de las funciones logarítmicas $y = \log_a x$ y, en particular, de la función logaritmo natural $y = \ln x$. [Suponga que las funciones logarítmicas son derivables; ciertamente esto es plausible a partir de sus gráficas (véase la figura 12 de la sección 1.6).]

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = \log_a x$. Por lo tanto

$$a^y = x$$

La fórmula 3.4.5 expresa que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Si se deriva esta ecuación de manera implícita con respecto a x, mediante la fórmula (3.45) obtiene

$$a^y(\ln a)\frac{dy}{dx} = 1$$

y por consiguiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$ □

Si en la fórmula (1) pone $a = e$, en tal caso el factor $\ln a$ en el lado derecho se convierte en $\ln e = 1$ y obtiene la fórmula para la derivada de la función logarítmica natural $\log_e x = \ln x$:

$$\boxed{2} \qquad \boxed{\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}}$$

Si se comparan las fórmulas (1) y (2), aparece una de las razones principales por la que se usan los logaritmos naturales (logaritmos con base e) en el cálculo. La fórmula de derivación es más sencilla cuando $a = e$, porque $\ln e = 1$.

EJEMPLO 1 Derive $y = \ln(x^3 + 1)$.

SOLUCIÓN Para aplicar la regla de la cadena, se hace $u = x^3 + 1$. Por lo tanto $y = \ln u$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

En general, si combina la fórmula (2) con la regla de la cadena como en el ejemplo 1 obtiene

3 $$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}} \quad \text{o bien} \quad \boxed{\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)}}$$

EJEMPLO 2 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Al aplicar (3), tiene

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \cot x$$

EJEMPLO 3 Derive $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

SOLUCIÓN En esta ocasión el logaritmo es la función interior, de modo que la regla de la cadena da

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

EJEMPLO 4 Derive $f(x) = \log_{10}(2 + \operatorname{sen} x)$.

SOLUCIÓN Si se usa la fórmula 1 con $a = 10$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}(2+\operatorname{sen} x) = \frac{1}{(2+\operatorname{sen} x)\ln 10}\frac{d}{dx}(2+\operatorname{sen} x)$$
$$= \frac{\cos x}{(2+\operatorname{sen} x)\ln 10}$$

En la figura 1 se muestra la gráfica de la función f del ejemplo 5, junto con la gráfica de su derivada. Proporciona una comprobación visual del cálculo. Advierta que $f'(x)$ es grande negativa cuando f está decreciendo con rapidez.

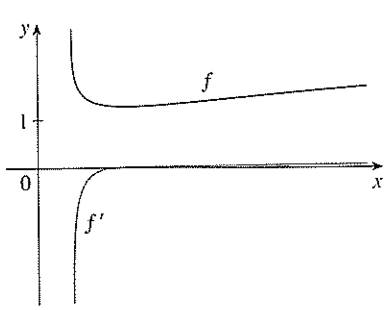


FIGURA 1

EJEMPLO 5 Encuentre $\dfrac{d}{dx}\ln\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}$.

SOLUCIÓN 1

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2}$$
$$= \frac{x-2-\tfrac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}$$

SOLUCIÓN 2 Si en primer lugar simplifica la función dada aplicando las leyes de los logaritmos, entonces la derivación se vuelve más fácil:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Esta respuesta se puede dejar como está pero, si usara un denominador común, vería que da la misma respuesta que en la solución 1.) □

■ En la figura 2 se muestra la gráfica de la función $f(x) = \ln|x|$ del ejemplo 6 y la de su derivada $f'(x) = 1/x$. Note que cuando x es pequeño, la gráfica de $y = \ln|x|$ está inclinada y, por lo consiguiente, $f'(x)$ es grande (positiva o negativa).

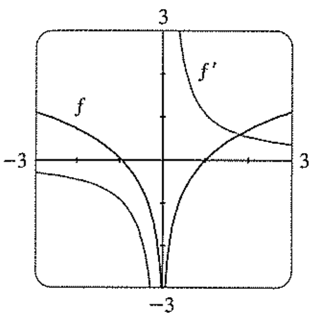


FIGURA 2

V EJEMPLO 6 Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln|x|$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

se concluye que

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Por esto, $f'(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$. □

Vale la pena recordar el resultado del ejemplo 6:

4 $$\boxed{\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x}}$$

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Con frecuencia, el cálculo de derivadas de funciones complicadas que comprenden productos, cocientes o potencias se puede simplificar tomando logaritmos. El método que se aplica en el ejemplo siguiente se llama **derivación logarítmica**.

EJEMPLO 7 Derive $y = \dfrac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos de ambos miembros de la ecuación y aplique las leyes de los logaritmos para simplificar:

$$\ln y = \tfrac{3}{4}\ln x + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Al derivar implícitamente con respecto a x, resulta

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\cdot\frac{3}{3x+2}$$

Al resolver para dy/dx obtiene

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Si no hubiera utilizado la derivación logarítmica en el ejemplo 7, habría tenido que aplicar tanto la regla del cociente como la regla del producto. El cálculo resultante habría sido horrendo.

Como tiene una expresión explícita para y, puede sustituir y escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

PASOS EN LA DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

1. Tome logaritmos naturales de ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilice las leyes de los logaritmos para simplificar.
2. Derive implícitamente con respecto a x.
3. Resuelva la ecuación resultante para y'.

Si $f(x) < 0$ para algunos valores de x, después $\ln f(x)$ no está definido, pero puede escribir $|y| = |f(x)|$ y aplicar la ecuación (4). Se ilustra este procedimiento probando la versión general de la regla de la potencia, según se prometió en la sección 3.1.

REGLA DE LA POTENCIA Si n es cualquier número real y $f(x) = x^n$, en seguida

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN Sea $y = x^n$ y aplique la derivación logarítmica:

Si $x = 0$ puede demostrar que $f'(0) = 0$, para $n > 1$, de modo directo a partir de la definición de derivada.

$$\ln|y| = \ln|x|^n = n\ln|x| \qquad x \neq 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

De donde,

$$y' = n\frac{y}{x} = n\frac{x^n}{x} = nx^{n-1}$$

Debe distinguir con cuidado la regla de la potencia $[(x^n)' = nx^{n-1}]$, donde la base es variable y el exponente constante de la regla para derivar funciones exponenciales $[(a^x)' = a^x \ln a]$, donde la base es constante y el exponente es variable.

En general, se tienen cuatro casos para exponentes y bases

1. $\dfrac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a y b son constantes)

2. $\dfrac{d}{dx}[f(x)]^b = b[f(x)]^{b-1}f'(x)$

3. $\dfrac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\ln a)g'(x)$

4. Para hallar $(d/dx)[f(x)]^{g(x)}$, se puede aplicar la derivación logarítmica, como en el ejemplo que sigue:

EJEMPLO 8 Derive $y = x^{\sqrt{x}}$

SOLUCIÓN 1 Con la derivación logarítmica tiene

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} + (\ln x)\,\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

SOLUCIÓN 2 Otro método es escribir $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{x}\ln x}\right) = e^{\sqrt{x}\ln x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\ln x\right)$$

$$= x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right) \qquad \text{(como en la solución 1)}$$ □

La figura 3 ilustra el ejemplo 8 mostrando las gráficas de $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ y su derivada.

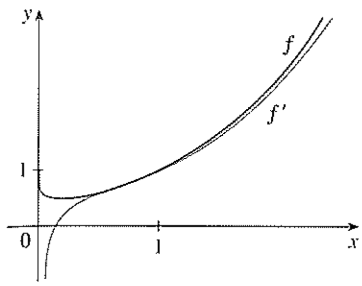


FIGURA 3

EL NÚMERO e COMO LÍMITE

Se ha demostrado que si $f(x) = \ln x$, después $f'(x) = 1/x$. Por esto, $f'(1) = 1$. Aplique ahora esto para expresar el número e como un límite.

A partir de la definición de derivada como un límite, tiene

$$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}$$

Ya que $f'(1) = 1$, tiene

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Luego, por el teorema 2.5.8 y la continuidad de la función exponencial, tiene

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

5
$$\boxed{e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}}$$

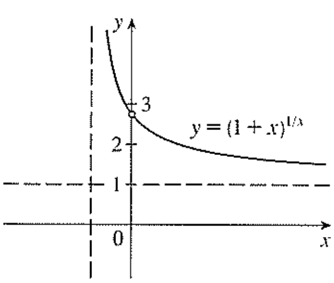


FIGURA 4

x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.59374246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

En la figura 4 se ilustra la fórmula (5) mediante la gráfica de la función $y = (1+x)^{1/x}$ y una tabla de valores para valores pequeños de x. Con esto se ilustra el hecho de que es correcto hasta siete cifras decimales

$$e \approx 2.7182818$$

Si hace $n = 1/x$ en la fórmula (5), en seguida $n \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ y, por consiguiente una expresión alternativa para e es

$$\boxed{6} \qquad \boxed{e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

3.6 EJERCICIOS

1. Explique por qué en cálculo se usa con mucha más frecuencia la función logarítmica natural, $y = \ln x$, que las otras funciones logarítmicas, $y = \log_a x$.

2–22 Derive la función.

2. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$

4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

5. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$

6. $f(x) = \log_5(xe^x)$

7. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$

8. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$

9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$

10. $f(t) = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

11. $F(t) = \ln \dfrac{(2t + 1)^3}{(3t - 1)^4}$

12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

13. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$

14. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

15. $f(u) = \dfrac{\ln u}{1 + \ln(2u)}$

16. $y = \dfrac{1}{\ln x}$

17. $y = \ln|2 - x - 5x^2|$

18. $H(z) = \ln \sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$

19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

20. $y = [\ln(1 + e^x)]^2$

21. $x = 2x\log_{10}\sqrt{x}$

22. $y = \log_2(e^{-x}\cos \pi x)$

23–26 Encuentre y' y y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$

24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

25. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}$

26. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

27–30 Derive f y encuentre su dominio.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{1 + \ln x}$

29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Si $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, determine $f'(1)$.

32. Si $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, determine $f'(0)$.

33–34 Determine una ecuación de la tangente a la curva en un punto dado.

33. $y = \ln(xe^{x^2})$, $(1,1)$

34. $y = \ln(x^3 - 7)$, $(2, 0)$

35. Si $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encuentre $f'(x)$. Compruebe si su respuesta es razonable comparando las gráficas de f y f'.

36. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = (\ln x)/x$, en los puntos $(1, 0)$ y $(e, 1/e)$. Ilustre lo anterior dibujando la curva y sus rectas tangentes.

37–48 Aplique la derivación logarítmica para hallar la derivada de la función.

37. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$

38. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$

39. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2 + 1)^2}$

40. $y = \sqrt[4]{\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}}$

41. $y = x^x$

42. $y = x^{\cos x}$

43. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

44. $y = \sqrt{x}^{\,x}$

45. $y = (\cos x)^x$

46. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$

47. $y = (\tan x)^{1/x}$

48. $y = (\ln x)^{\cos x}$

49. Encuentre y' si $y = \ln(x^2 + y^2)$.

50. Halle y' si $x^y = y^x$.

51. Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = \ln(x - 1)$.

52. Encuentre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

53. Use la definición de derivada para probar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

52. Demuestre que $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$ para cualquier $x > 0$.

3.7 RAZONES DE CAMBIO EN LAS CIENCIAS NATURALES Y SOCIALES

Sabe que si $y = f(x)$, en seguida la derivada dy/dx se puede interpretar como la razón de cambio de y con respecto a x. En esta sección se analizan algunas de las aplicaciones de esta idea a la física, la química, la biología, la economía y otras ciencias.

Con base en la sección 2.7, recuerde la idea básica que se encuentra detrás de las razones de cambio. Si x cambia de x_1 a x_2, por lo tanto el cambio en x es

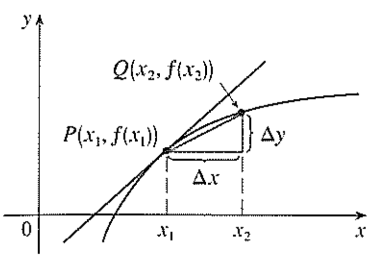
$$\Delta x = x_2 - x_1$$

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencia

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



m_{PQ} = relación promedio de cambio
$m = f'(x_1)$ = relación de cambio instantánea

FIGURA 1

es la **razón promedio de cambio de y con respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la recta secante PQ de la figura 1. Su límite, cuando $\Delta x \to 0$ es la derivada $f'(x_1)$, la cual, por lo tanto, puede interpretarse como la **razón de cambio instantánea de y con respecto a x**, o sea, la pendiente de la recta tangente en $P(x_1, f(x_1))$. Si se usa la notación de Leibniz, escriba el proceso en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio. (Como se analizó en la sección 2.7, las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas entre las de x.) Vea ahora algunas de estas interpretaciones en las ciencias naturales y sociales.

FÍSICA

Si $s = f(t)$ es la función de posición de una partícula que se mueve en línea recta, por lo tanto $\Delta s/\Delta t$ representa la velocidad promedio en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo). La razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Esto se vio en las secciones 2.7 y 2.8; pero ahora que conoce las fórmulas de derivación, es capaz de resolver los problemas de velocidades con mayor facilidad.

EJEMPLO 1 La ecuación siguiente da la posición de una partícula

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

donde t se mide en segundos y s en metros.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 2 y 4 s?
(c) ¿Cuándo está en reposo la partícula?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia adelante (es decir, en dirección positiva)?
(e) Dibuje un diagrama que represente el movimiento de la partícula.
(f) Encuentre la distancia total recorrida por la partícula durante los primeros cinco segundos.

(g) Hallar la aceleración en el tiempo t y después de 4 s.
(h) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leqslant t \leqslant 5$.
(i) ¿Cuándo incrementa se rapidez la partícula? ¿cuándo la disminuye.

SOLUCIÓN
(a) La función velocidad es la derivada de la función de posición.

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$
$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

(b) La velocidad después de 2 s significa la velocidad instantánea cuando $t = 2$; es decir,

$$v(2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=2} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = -3 \text{ m/s}$$

La velocidad después de 4 s es

$$v(4) = 3(4)^2 - 12(4) + 9 = 9 \text{ m/s}$$

(c) La partícula está en reposo cuando $v(t) = 0$, esto es,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t^2 - 4t + 3) = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

y esto se cumple cuando $t = 1$ o $t = 3$. Por lo tanto, la partícula está en reposo después de 1 s y después de 3 s.
(d) La partícula se mueve en dirección positiva cuando $v(t) > 0$, es decir,

$$3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) > 0$$

Esta desigualdad se cumple cuando ambos factores son positivos ($t > 3$) o cuando los dos son negativos ($t < 1$). Así, la partícula se mueve en dirección positiva en los periodos $t < 1$ y $t > 3$. Se mueve hacia atrás (en la dirección negativa) cuando $1 < t < 3$.

(e) En la figura 2, se esquematiza el movimiento de la partícula hacia atrás y hacia adelante a lo largo de una recta (el eje s), aplicando la información del inciso (d).

(f) En virtud de los incisos (d) y (e), necesita calcular las distancias recorridas durante los periodos [0, 1], [1, 3] y [3, 5], por separado.

La distancia recorrida en el primer segundo es

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4 \text{ m}$$

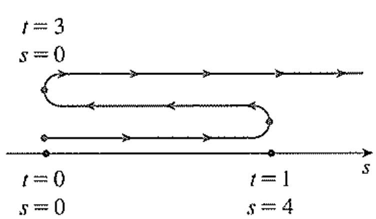


FIGURA 2

De $t = 1$ a $t = 3$, la distancia recorrida es

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4 \text{ m}$$

De $t = 3$ a $t = 5$, la distancia recorrida es

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20 \text{ m}$$

La distancia total es $4 + 4 + 20 = 28$ m. □
(g) La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

$$a(4) = 6(4) - 12 = 12 \text{ m/s}^2$$

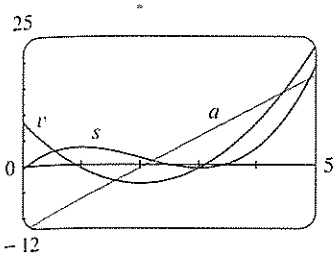


FIGURA 3

(h) La figura 3 escribe las gráficas de s, v y a.

(i) El incremento de la rapidez de la partícula cuando la velocidad es positiva y creciente (v y a son positivas) y también cuando la velocidad es negativa y decreciente (v y a son negativas). En otras palabras, el aumento en la rapidez cuando la velocidad y la aceleración tiene el mismo signo. (La partícula es empujada en la misma dirección en que se está moviendo.) De la figura 3 se ve que ésta sucede cuando $1 < t < 2$ y cuando $t > 3$. La partícula disminuye su rapidez cuando v y a tienen signos opuestos, es decir, cuando $0 \leqslant t < 1$ y cuando $2 < t < 3$. La figura 4 resume el movimiento de la partícula

TEC En Module 3.7 puede ver una animación de la figura 4 con una expresión para s que selecione.

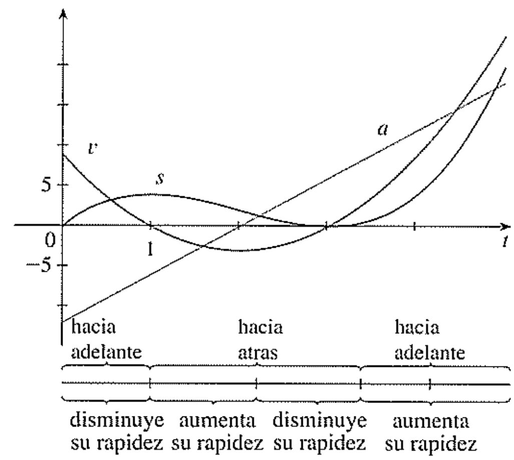


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Si una varilla o un trozo de alambre son homogéneos, por lo tanto su densidad lineal es uniforme y se define como la masa por unidad de longitud ($\rho = m/l$) y se mide en kilogramos por cada metro. Pero suponga que la varilla no es homogénea sino que su masa medida desde su extremo izquierdo hasta un punto x es $m = f(x)$, como se muestra en la figura 5.

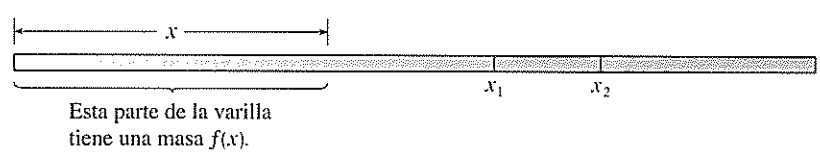


FIGURA 5

La masa de la parte de la varilla que se encuentra entre $x = x_1$ y $x = x_2$ se expresa con $\Delta m = f(x_2) - f(x_1)$, de modo que la densidad promedio de esa sección es

$$\text{densidad promedio} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Si ahora hace que $\Delta x \to 0$ (es decir $x_2 \to x_1$), calcula la densidad promedio sobre un intervalo cada vez más pequeño. La **densidad lineal** ρ en x_1 es el límite de estas densidades promedio cuando $\Delta x \to 0$; es decir, la densidad lineal es la razón de cambio de la masa con respecto a la longitud. En forma simbólica,

$$\rho = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}$$

De este modo, la densidad lineal de la varilla es la derivada de la masa con respecto a la longitud.

Por ejemplo, si $m = f(x) = \sqrt{x}$, en donde x se mide en metros y m en kilogramos, después la densidad promedio de la parte de la varilla dada por $1 \leqslant x \leqslant 1.2$ es

$$\frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(1.2) - f(1)}{1.2 - 1} = \frac{\sqrt{1.2} - 1}{0.2} \approx 0.48 \text{ kg/m}$$

en tanto que la densidad en $x = 1$ es

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right|_{x=1} = 0.50 \text{ kg/m}$$ ◻

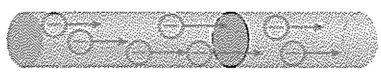


FIGURA 6

V **EJEMPLO 3** Hay corriente siempre que las cargas eléctricas se mueven. En la figura 6 se muestra parte de un alambre con electrones que cruzan una superficie plana sombreada. Si ΔQ es la carga neta que pasa por esta superficie durante un periodo Δt, en tal caso la corriente promedio durante este intervalo se define como

$$\text{corriente promedio} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}$$

Si toma el límite de esta corriente promedio sobre lapsos más y más pequeños, obtiene lo que se llama **corriente** I en un instante dado t_1:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

Por esto, la corriente es la rapidez con que la carga fluye por una superficie. Se mide en unidades de carga por unidad de tiempo (a menudo coulombs por segundo, llamados amperes). ◻

La velocidad, la densidad y la corriente no son las únicas razones de cambio de importancia para la física. Otras incluyen la potencia (la rapidez a la cual se consume trabajo), la relación de flujo de calor, el gradiente de temperatura (la razón de cambio de la temperatura con respecto a la posición) y la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva en la física nuclear.

QUÍMICA

EJEMPLO 4 El resultado de una reacción química en la formación de una o más sustancias (llamadas *productos*) a partir de uno o más materiales (*reactivos*). Por ejemplo, la "ecuación"

$$2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$$

indica que dos moléculas de hidrógeno y una de oxígeno forman dos moléculas de agua. Considere la reacción

$$A + B \rightarrow C$$

donde A y B son los reactivos y C es el producto. La **concentración** de un reactivo A es el número de moles ($1 \text{ mol} = 6.022 \times 10^{23}$ moléculas) por litro y se denota con [A]. La concentración varía durante una reacción, de modo que [A], [B] y [C] son funciones del tiempo (t). La velocidad de reacción promedio del producto C en un intervalo de tiempo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{[\mathrm{C}](t_2) - [\mathrm{C}](t_1)}{t_2 - t_1}$$

Pero los químicos tienen más interés en la **velocidad instantánea de reacción**, la cual se obtiene tomando el límite de la velocidad promedio de reacción conforme el intervalo Δt tiende a 0:

$$\text{velocidad de reacción} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[\mathrm{C}]}{\Delta t} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt}$$

Como la concentración del producto aumenta a medida que la reacción avanza, la derivada $d[\mathrm{C}]/dt$ será positiva, y así la velocidad de reacción de C es positiva. Sin embargo, las concentraciones de los reactivos disminuyen durante la reacción; por eso, para que las velocidades de reacción de A y B sean números positivos, ponga signos negativos delante de las derivadas $d[\mathrm{A}]/dt$ y $d[\mathrm{B}]/dt$. Dado que [A] y [B] disminuyen con la misma rapidez que [C] crece, tiene

$$\text{velocidad de reacción} = \frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{d[\mathrm{B}]}{dt}$$

De modo más general, resulta que para una reacción de la forma

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{B} \to c\mathrm{C} + d\mathrm{D}$$

tiene

$$-\frac{1}{a}\frac{d[\mathrm{A}]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[\mathrm{B}]}{dt} = \frac{1}{c}\frac{d[\mathrm{C}]}{dt} = \frac{1}{d}\frac{d[\mathrm{D}]}{dt}$$

La velocidad de reacción se puede determinar a partir de datos y con métodos gráficos. En algunos casos existen fórmulas explícitas para las concentraciones como funciones del tiempo, que permiten calcular la velocidad de reacción (véase el ejercicio 22). □

EJEMPLO 5 Una de las cantidades de interés en termodinámica es la compresibilidad. Si una sustancia dada se mantiene a una temperatura constante, en tal caso su volumen V depende de su presión P. Puede considerar la razón de cambio del volumen con respecto a la presión: a saber, la derivada dV/dP. Cuando P crece, V decrece, de modo que $dV/dP < 0$. La **compresibilidad** se define al introducir un signo menos y dividir esta derivada entre el volumen V:

$$\text{compresibilidad isotérmica} = \beta = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dP}$$

En estos términos, β mide cuán rápido, por unidad de volumen, decrece el volumen de una sustancia a medida que la presión aumenta, a temperatura constante.

Por ejemplo, se encontró que la siguiente ecuación relaciona el volumen V (en metros cúbicos) de una muestra de aire a 25°C se encontró que está relacionada con la presión P (en kilopascales) mediante la ecuación.

$$V = \frac{5.3}{P}$$

La razón de cambio de V con respecto a P, cuando $P = 50$ kPa, es

$$\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = -\left.\frac{5.3}{P^2}\right|_{P=50}$$

$$= -\frac{5.3}{2500} = -0.00212 \text{ m}^3/\text{kPa}$$

La compresibilidad a esa presión es

$$\beta = -\frac{1}{V}\left.\frac{dV}{dP}\right|_{P=50} = \frac{0.00212}{\frac{5.3}{50}} = 0.02 \text{ (m}^3/\text{kPa)/m}^3 \qquad \square$$

BIOLOGÍA

EJEMPLO 6 Sea $n = f(t)$ el número de individuos de una población de animales o plantas en el tiempo t. El cambio del tamaño de la población entre los tiempos $t = t_1$ y $t = t_2$ es $\Delta n = f(t_2) - f(t_1)$, de modo que la rapidez de crecimiento promedio durante el periodo $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ es

$$\text{rapidez de crecimiento promedio} = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

La **rapidez instantánea de crecimiento** se obtiene a partir de esta rapidez promedio al hacer que el periodo Δt tienda a 0:

$$\text{rapidez de crecimiento} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{dn}{dt}$$

En términos estrictos, esto no es muy exacto porque la gráfica real de una función de población $n = f(t)$ sería una función escalón que es discontinua siempre que ocurre un nacimiento o una muerte y, por lo tanto, no es derivable. Sin embargo, para una población grande de animales o plantas, es posible reemplazar la gráfica con una curva de aproximación uniforme como en la figura 7.

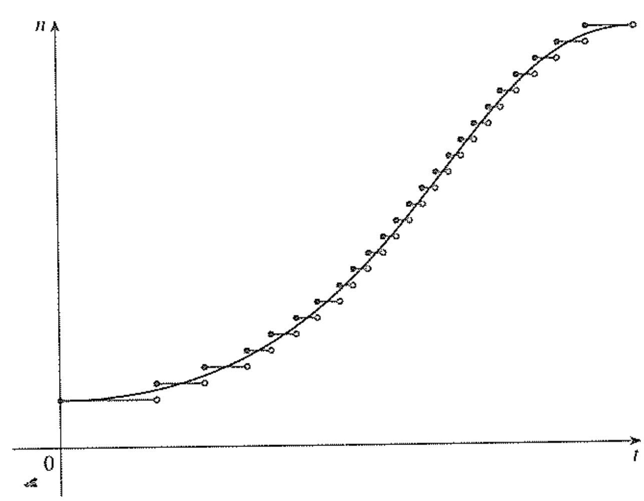


FIGURA 7
Una curva uniforme que se hace con una aproximación a una función de crecimiento

Para ser más específicos, considere una población de bacterias en un medio nutritivo homogéneo. Suponga que, por medio de la toma de muestras de la población a ciertos intervalos, se determina que esa población se duplica cada hora. Si la población inicial es n_0 y el tiempo t se mide en horas, en consecuencia

$$f(1) = 2f(0) = 2n_0$$

$$f(2) = 2f(1) = 2^2n_0$$

$$f(3) = 2f(2) = 2^3n_0$$

y, en general,

$$f(t) = 2^t n_0$$

La función de población es $n = n_0 2^t$.

En la sección 3.4 se demostró que

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$$

Por eso, la rapidez de crecimiento de la población de bacterias, en el tiempo t, es

$$\frac{dn}{dt} = \frac{d}{dt}(n_0 2^t) = n_0 2^t \ln 2$$

Por ejemplo, suponga que inicia con una población inicial de $n_0 = 100$ bacterias. En consecuencia, la rapidez de crecimiento después de 4 horas es

$$\left.\frac{dn}{dt}\right|_{t=4} = 100 \cdot 2^4 \ln 2 = 1600 \ln 2 \approx 1109$$

Esto significa que, después de 4 horas, la población de bacterias crece en una cantidad de casi 1 109 bacterias por hora. □

EJEMPLO 7 Cuando considera el flujo de la sangre por un vaso sanguíneo, como una vena o una arteria, puede tomar la forma de este vaso como el de un tubo cilíndrico con radio R y longitud l, como se ilustra en la figura 6.

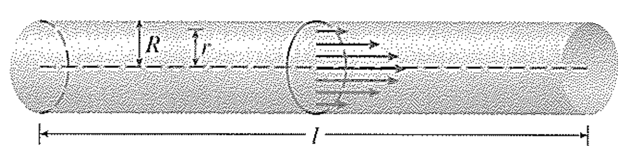


FIGURA 8
Flujo de sangre dentro de una arteria

Debido a la fricción en las paredes del tubo, la velocidad v de la sangre es máxima a lo largo del eje central del propio tubo y decrece conforme aumenta la distancia r al eje, hasta que v se vuelve 0 en la pared. La relación entre v y r está dada por la **ley del flujo laminar** descubierta por el físico francés Jean-Louis-Marie Poiseuille en 1840. En ésta se afirma que

$$\boxed{1} \qquad v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

donde η es la viscosidad de la sangre y P es la diferencia en la presión entre los extremos del tubo. Si P y l son constantes, en tal caso v es función de r, con dominio $[0, R]$.

Para información más detalladas, véase W. Nichols y M. O'Rourke (eds.), *McDonald's Blood Flow in Arteries: Theoretic, Experimental, and Clinical Principles*, 4th ed. (Nueva York: Oxford University Press, 1998).

La razón de cambio promedio de la velocidad, al moverse de $r = r_1$ hacia afuera, hasta $r = r_2$ es

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{v(r_2) - v(r_1)}{r_2 - r_1}$$

y si hace que $\Delta r \to 0$, obtiene el **gradiente de velocidad**, es decir, la razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto a r:

$$\text{gradiente de velocidad} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{dv}{dr}$$

Al aplicar la ecuación (1) obtiene

$$\frac{dv}{dr} = \frac{P}{4\eta l}(0 - 2r) = -\frac{Pr}{2\eta l}$$

Para una de las arterias humanas más pequeñas, puede tomar $\eta = 0.027$, $R = 0.008$ cm, $l = 2$ cm y $P = 4000$ dinas/cm^2, lo cual da

$$\begin{aligned} v &= \frac{4000}{4(0.027)2}(0.000064 - r^2) \\ &\approx 1.85 \times 10^4(6.4 \times 10^{-5} - r^2) \end{aligned}$$

En $r = 0.002$ cm la sangre fluye a una rapidez de

$$\begin{aligned} v(0.002) &\approx 1.85 \times 10^4(64 \times 10^{-6} - 4 \times 10^{-6}) \\ &= 1.11 \text{ cm/s} \end{aligned}$$

y el gradiente de velocidad en ese punto es

$$\left.\frac{dv}{dr}\right|_{r=0.002} = -\frac{4000(0.002)}{2(0.027)2} \approx -74 \text{ (cm/s)/cm}$$

Para tener una idea de lo que esto significa, cambie las unidades de centímetros a micrómetros (1 cm = 10 000 μm). Por lo tanto el radio de la arteria es de 80 μm. La velocidad en el eje central es de 11 850 μm/s, la cual disminuye hasta 11 110 μm/s a una distancia de $r = 20$ μm. El hecho de que $dv/dr = -74$ (μm/s)/μm significa que cuando $r = 20$ μm, la velocidad disminuye en una cantidad de casi 74 μm/s por cada micrómetro que se aleja del centro.

ECONOMÍA

EJEMPLO 8 Suponga que $C(x)$ es el costo total en que una compañía incurre al produ cir x unidades de cierto artículo. La función C se llama **función de costo**. Si el númer de artículos producidos se incrementa de x_1 hasta x_2, el costo adicional es $\Delta C = C(x_2) - C(x_1)$ y la razón de cambio promedio del costo es

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

Los economistas llaman **costo marginal** al límite de esta cantidad, cuando $\Delta x \to 0$ es decir, la razón de cambio instantánea del costo con respecto al número de artículos producidos:

$$\text{costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

[Como x suele tomar sólo valores enteros, quizá no tenga sentido hacer que Δx tienda a 0, pero siempre podrá reemplazar $C(x)$ con una función suave de aproximación uniforme, como en el ejemplo 6.]

Si se toma $\Delta x = 1$ y n grande (de modo que Δx sea pequeño en comparación con n), tiene

$$C'(n) \approx C(n + 1) - C(n)$$

Así entonces, el costo marginal de producir n unidades es aproximadamente igual al costo de elaborar una unidad más [la $(n + 1)$-ésima unidad].

A menudo, resulta apropiado representar una función de costo total con un polinomio

$$C(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

donde a representa el costo de los gastos generales (renta, calefacción, mantenimiento) y los demás términos representan el costo de las materias primas, la mano de obra y demás. (El costo de las materias primas puede ser proporcional a x, pero los costos de la mano de obra podrían depender en parte de potencias mayores de x, debido a los costos del tiempo extra y de las faltas de eficiencia relacionadas con las operaciones a gran escala.)

Por ejemplo, suponga que una compañía ha estimado que el costo (en dólares) de producir x artículos es

$$C(x) = 10\,000 + 5x + 0.01x^2$$

En tal caso la función de costo marginal es

$$C'(x) = 5 + 0.02x$$

El costo marginal en el nivel de producción de 500 artículos es

$$C'(500) = 5 + 0.02(500) = \$15/\text{artículo}$$

Esto da la cantidad a la cual se incrementan los costos con respecto al nivel de producción, cuando $x = 500$, y predice el costo del artículo 501.

El costo real de producir el artículo 501 es

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10\,000 + 5(501) + 0.01(501)^2] \\ &\qquad - [10\,000 + 5(500) + 0.01(500)^2] \\ &= \$15.01 \end{aligned}$$

Advierta que $C'(500) \approx C(501) - C(500)$. □

Los economistas también estudian la demanda, el ingreso y la utilidad marginales, que son las derivadas de las funciones de demanda, ingreso y utilidad. Éstas se consideran en el capítulo 4, después de desarrollar las técnicas para hallar los valores máximos y mínimos de funciones.

OTRAS CIENCIAS

Las razones de cambio se presentan en todas las ciencias. Un geólogo se interesa en conocer la rapidez a la cual una masa incrustada de roca fundida se enfría por conducción del calor hacia las rocas que la rodean. Un ingeniero desea conocer la proporción a la cual el agua fluye hacia adentro o hacia afuera de un depósito. Un geógrafo urbano se interesa en la razón de cambio de la densidad de población en una ciudad, al aumentar la distancia al centro de la propia ciudad. Un meteorólogo siente interés por la razón de cambio de la presión atmosférica con respecto a la altura. (Véase el ejercicio 17, de la sección 3.8.)

En psicología, quienes se interesan en la teoría del aprendizaje estudian la curva del aprendizaje, la cual presenta en forma de gráfica el rendimiento $P(t)$ de alguien que aprende de una habilidad, como función del tiempo de capacitación t. Tiene un interés particular la rapidez a la cual mejora el rendimiento a medida que pasa el tiempo; es decir, dP/dt.

En sociología, el cálculo diferencial se aplica al análisis del esparcimiento de rumores (o de innovaciones, novedades o modas). Si $p(t)$ denota la proporción de una población que conoce un rumor en el momento t, por lo tanto la derivada dp/dt denota la rapidez de esparcimiento de ese rumor. (Véase el ejercicio 82 de la sección 3.4.)

UNA SOLA IDEA, VARIAS INTERPRETACIONES

La velocidad, la densidad, la corriente, la potencia y el gradiente de temperatura, en física; la velocidad de reacción y la compresibilidad, en química; la rapidez de crecimiento y el gradiente de velocidad de la sangre, en biología; el costo marginal y la utilidad marginal, en economía; la rapidez de flujo del calor, en geología; la rapidez de mejora del rendimiento, en psicología, y la rapidez de esparcimiento de un rumor, en sociología, son casos especiales de un concepto matemático: la derivada.

Ésta es una ilustración del hecho de que parte del poder de las matemáticas descansa en su abstracción. Un solo concepto matemático abstracto (como la derivada) puede tener interpretaciones diferentes en cada ciencia. Cuando desarrolle las propiedades del concepto matemático, de una vez y por todas, podrá dar la vuelta y aplicar estos resultados a todas las ciencias. Esto es mucho más eficiente que desarrollar propiedades de conceptos especiales en cada una por separado. El matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) lo expresó de manera sucinta: "Las matemáticas comparan los fenómenos más diversos y descubren las analogías secretas que los unen."

3.7 EJERCICIOS

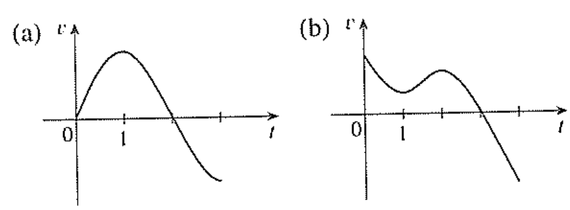
1–4 Una partícula se mueve según una ley del movimiento $s = f(t)$, $t \geq 0$, donde t se mide en segundos y s en pies.

(a) Encuentre la velocidad en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad después de 3 s?
(c) ¿Cuándo está la partícula en reposo?
(d) ¿Cuándo se mueve hacia la dirección positiva?
(e) Encuentre la distancia total recorrida durante los primeros 8 s.
(f) Dibuje un diagrama, como el de la figura 2, con el fin de ilustrar el movimiento de la partícula.
(g) Hallar la aclaración en el tiempo t y después de 3 s.
(h) Grafique las funciones de posición, velocidad, yaceleración para $0 \leq t \leq 8$.
(i) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿cuándo disminuye.

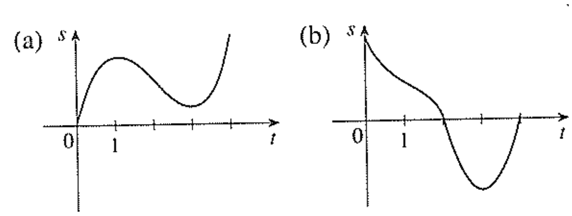
1. $f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$ **2.** $f(t) = 0.01t^4 - 0.04t^3$

3. $f(t) = \cos(\pi t/4)$, $t \leq 10$ **4.** $f(t) = te^{-t/2}$

5. Se exhiben las gráficas de los funciones *velocidad* de dos partículas, donde t se mide en segundos ¿Cuándo incrementa su rapidez cada partícula? Cuándo disminuyen su rapidez? Explique



6. Se exhiben las funciones de *posición* de dos partículas, donde t se mide en segundos ¿Cuándo incrementa su rapidez cada una de la partícula? ¿cuándo la disminuyen? Explique.



7. La función de posición de una partícula está dada por

$s = t^3 - 4.5t^2 - 7t, t \geq 0$

(a) ¿Cuándo alcanza la partícula una velocidad de 5 m/s?
(b) ¿Cuándo la aceleración es 0? ¿Cuál es el significado de ese valor de t?

8. Si se empuja una pelota de modo que alcance una velocidad inicial de 5 m/s hacia abajo a lo largo de cierto plano inclinado, en tal caso la distancia que ha rodado después de t segundos es $s = 5t + 3t^2$.
   (a) Encuentre la velocidad una vez que transcurren 2 s.
   (b) ¿Cuánto tiempo tarda para que la velocidad alcance 35 m/s?

9. Si se lanza una piedra hacia arriba verticalmente desde la superficie de la Luna, con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos es $h = 10t - 0.83t^2$.
   (a) ¿Cuál es la velocidad de la piedra después que transcurren 3 s?
   (b) ¿Cuál es la velocidad de la piedra una vez que se ha elevado 25 m?

10. Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 80 ft/s, en seguida su altura después de t segundos es $s = 80t - 16t^2$.
   (a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?
   (b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando está 96 pies arriba de la superficie de la tierra en su trayectoria hacia arriba y luego hacia abajo?

11. (a) Una compañía fabrica *chips* para computadora a partir de placas cuadradas de silicio. Se desea conservar la longitud del lado de esas placas muy próxima a 15 mm y, asimismo, saber cómo cambia el área $A(x)$ de ellas cuando cambia la longitud x del lado. Encuentre $A'(15)$ y explique su significado en esta situación.
   (b) Demuestre que la rapidez de cambio del área de uno de los cuadrados con respecto a la longitud de su lado es la mitad de su perímetro. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto, dibujando un cuadrado cuya longitud x del lado se incremente en una cantidad Δx. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δx es pequeño?

12. (a) Es fácil hacer crecer cristales de clorato de sodio en forma de cubos dejando que una solución de esta sal en agua se evapore con lentitud. Si V es el volumen de uno de esos cubos, con longitud x del lado, calcule dV/dx cuando $x = 3$ mm y explique su significado.
   (b) Demuestre que la razón de cambio del volumen de un cubo con respecto a la longitud de su arista es igual a la mitad del área superficial de ese cubo. Explique geométricamente por qué este resultado es cierto; básese en el ejercicio 11 (b) para establecer una analogía.

13. (a) Encuentre la razón de cambio promedio del área de un círculo con respecto a su radio r, cuando éste cambia de
   (i) 2 a 3 (ii) 2 a 2.5 (iii) 2 a 2.1
   (b) Encuentre la razón de cambio instantánea cuando $r = 2$.
   (c) Demuestre que la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio (a cualquier r) es igual a la circunferencia del círculo. Intente explicar geométricamente por qué esto es cierto dibujando un círculo cuyo radio se incrementa en una cantidad Δr. ¿Cómo puede obtener una aproximación del cambio resultante en el área, ΔA, si Δr es pequeño?

14. Se deja caer una piedra en un lago que crea una onda circular que viaja hacia afuera con una rapidez de 60 cm/s. Encuentre la proporción a la cual aumenta el área dentro del círculo después de (a) 1 s, (b) 3 s y (c) 5 s. ¿Qué puede concluir?

$\boxed{15.}$ Se está inflando un globo esférico. Encuentre la proporción de aumento del área superficial ($S = 4\pi r^2$) con respecto al radio r, cuando éste es de (a) 1 pie, (b) 2 pies y (c) 3 pies. ¿A qué conclusiones llega?

16. (a) El volumen de una célula esférica en crecimiento es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde el radio r se mide en micrómetros ($1\ \mu m = 10^{-6}$ m). Encuentre la razón de cambio promedio de V con respecto a r, cuando éste cambia de
   (i) 5 a 8 μm (ii) 5 a 6 μm (iii) 5 a 5.1 μm
   (b) Halle la razón de cambio instantánea de V con respecto a r, cuando $r = 5\ \mu$m.
   (c) Demuestre que la razón de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es igual a su área superficial. Explique geométricamente por qué esto es cierto. Argumente por analogía con el ejercicio 13(c).

17. La masa de parte de una varilla metálica que se encuentra entre su extremo izquierdo y un punto x metros a la derecha es $3x^2$ kg. Encuentre la densidad lineal (véase el ejemplo 2) cuando x es (a) 1 m, (b) 2 m y (c) 3 m. ¿En dónde es más alta la densidad y dónde es más baja?

18. Si un tanque contiene 5 000 galones de agua, la cual se drena desde el fondo del tanque en 40 min, en tal caso la ley de Torricelli da el volumen V de agua que queda en el tanque después de t minutos como

$$V = 5\,000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 40$$

Encuentre la cantidad de drenado después de (a) 5 min, (b) 10 min, (c) 20 min y (d) 40 min. ¿En qué momento fluye el agua más rápido hacia afuera? ¿Con mayor lentitud? Resuma sus hallazgos.

$\boxed{19.}$ La cantidad de carga, Q, en coulombs (C) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$. Encuentre la corriente cuando (a) $t = 0.5$ s y (b) $t = 1$ s. [Véase el ejemplo 3. La unidad de corriente es el ampere (1 A = 1 C/s).] ¿En qué momento la corriente es la más baja?

20. La ley de Newton de la gravitación afirma que la magnitud F de la fuerza ejercida por un cuerpo de masa m sobre otro de masa M es

$$F = \frac{GmM}{r^2}$$

donde G es la constante gravitacional y r es la distancia entre los cuerpos.
   (a) Encuentre dF/dr y explique su significado. ¿Qué indica el signo menos?
   (b) Suponga que se sabe que la Tierra atrae un objeto con una fuerza que disminuye en proporción de 2 N/km, cuando $r = 20\,000$ km. ¿Con qué rapidez cambia esta fuerza cuando $r = 10\,000$ km?

$\boxed{21.}$ La ley de Boyle expresa que cuando se comprime una muestra de gas a una temperatura constante, el producto de la presión y el volumen se mantiene constante: $PV = C$.
   (a) Encuentre la razón de cambio del volumen en relación con la presión.

(b) Una muestra de gas está en un recipiente a baja presión y se le comprime paulatinamente a temperatura constante durante 10 minutos. ¿El volumen disminuye con mayor rapidez al principio o al final de los 10 minutos? Explique.
(c) Pruebe que la compresibilidad isotérmica (véase el ejemplo 5) se expresa mediante $\beta = 1/P$.

22. Si en el ejemplo 4 se forma una molécula del producto C a partir de una molécula del reactivo A y una molécula del reactivo B y las concentraciones iniciales de A y B tienen un valor común $[A] = [B] = a$ moles/L, después

$$[C] = a^2kt/(akt + 1)$$

donde k es una constante.
(a) Halle la velocidad de reacción en el instante t.
(b) Demuestre que si $x = [C]$, en seguida

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)^2$$

(c) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?
(d) ¿Qué ocurre con la velocidad de reacción cuando $t \to \infty$?
(e) ¿Qué significan en términos prácticos los resultados de los incisos (c) y (d)?

23. En el ejemplo 6 consideró una población de bacterias que se duplican cada hora. Considere que otra población de bacterias se triplica cada hora y se inicia con 400 bacterias. Hallar una expresión para el número n de bacterias después de t horas y aplique para estimar la rapidez de crecimiento de la población después de 2.5 horas

24. El número de células de levadura en un cultivo de laboratorio se incrementa rapidamente al principio pero los niveles con el tiempo terminan. La población se modela por la función

$$n = f(t) = \frac{a}{1 + be^{-0.7t}}$$

donde t se mide en horas. En el tiempo $t = 0$ la población es de 20 células y se incrementa en una proporción de 12 células/hora. Hallar los valores de a y b. De acuerdo a este modelo, ¿finalmente que sucede a la población de levadura?

25. La tabla proporciona la población del mundo en el siglo XX.

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

(a) Estime la rapidez de crecimiento de la población en 1920 y 1980 promediando las pendientes de dos rectas secantes.
(b) Use un dispositivo graficador o una computadora para encontrar una función cúbica (un polinomio de tercer grado) que modele los datos.
(c) Aplique su modelo del inciso (b) para encontrar un modelo para la rapidez de crecimiento de la población en el siglo XX.
(d) Use el inciso (c) para estimar las rapidez de crecimiento en 1920 y 1980. Compare sus estimados con los del inciso (a).
(e) Estime la rapidez de crecimiento en 1985.

26. La tabla muestra cómo varió la edad promedio en que las mujeres japonesas contraen matrimonio por primera vez a lo largo de la segunda mitad del siglo XX.

t	$A(t)$	t	$A(t)$
1950	23.0	1980	25.2
1955	23.8	1985	25.5
1960	24.4	1990	25.9
1965	24.5	1995	26.3
1970	24.2	2000	27.0
1975	24.7		

(a) Use una calculadora graficadora o una computadora para modelar estos datos con un polinomio de cuarto grado.
(b) Recurra al inciso (a) para encontrar un modelo para $A'(t)$.
(c) Estime la razón de cambio de la edad en que contraen matrimonio las mujeres durante la década de 1990.
(d) Dibuje los puntos correspondientes a datos así como los modelos para A y A'.

27. Remítase a la ley de flujo laminar que se da en el ejemplo 7. Considere un vaso sanguíneo con radio 0.01 cm, longitud 3 cm, diferencia de presión 3 000 dinas/cm^2, y viscosidad $\eta = 0.027$.
(a) Halle la velocidad de la sangre a lo largo de la línea central $r = 0$, en el radio $r = 0.005$ cm, y en la pared $r = R = 0.01$ cm.
(b) Encuentre el gradiente de velocidad en $r = 0$, $r = 0.005$, y $r = 0.01$.
(c) ¿Adónde es máxima la velocidad? ¿Adónde cambia en mayor medida?

28. La frecuencia de las vibraciones de una cuerda vibrante de un violín se expresa por medio de

$$f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

donde L es la longitud de la cuerda, T es su tensión y ρ es su densidad lineal. [Véase el capítulo 11 en D. E. Hall, *Musical Acoustics*, 3a. ed. (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2002).]
(a) Encuentre la rapidez de cambio de la frecuencia con respecto a
  (i) La longitud (cuando T y ρ son constantes).
  (ii) La tensión (cuando L y ρ son constantes).
  (iii) La densidad lineal (cuando L y T son constantes).
(b) El tono de una nota (qué tan alto o bajo suena) está determinado por la frecuencia f (entre más alta es la frecuencia más alto es el tono). Use los signos de las derivadas del inciso (a) para hallar qué sucede en el tono de una nota
  (i) cuando se disminuye la longitud efectiva de una cuerda colocando un dedo sobre ésta de modo que vibre una parte más corta de la misma,
  (ii) cuando se aumenta la tensión haciendo girar una de las clavijas,
  (iii) cuando se incrementa la densidad lineal al cambiar hacia otra cuerda,

29. El costo, en dolares, de producir x yardas de una cierta tela es

$$C(x) = 1200 + 12x - 0.1x^2 + 0.0005x^3$$

(a) Hallar la función costo marginal.
(b) Hallar $C'(200)$ y explique su significado. ¿Qué predice?
(c) Compare $C'(200)$ con el costo de fabricación de la yarda 201 de tela.

30. La función de costo para la producción de una mercancia es

$$C(x) = 339 + 25x - 0.09x^2 + 0.0004x^3$$

(a) Hallar e interpretar $C'(100)$.
(b) Comparar $C'(100)$ con el costo de producir el artículo 101.

31. Si $p(x)$ es el valor total de la producción cuando se tienen x trabajadores en una planta, por lo tanto la *productividad promedio* de la fuerza de trabajo en la planta es

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

(a) Encuentre $A'(x)$. ¿Por qué la compañía desea contratar más trabajadores si $A'(x) > 0$?
(b) Demuestre que $A'(x) > 0$ si $p'(x)$ es mayor que la productividad promedio.

32. Si R denota la reacción del cuerpo ante cierto estímulo de intensidad x, la *sensibilidad* S se define como la razón de cambio de la reacción con respecto a x. Un ejemplo específico es cuando aumenta el brillo x de una fuente de luz, el ojo reacciona disminuyendo el área R de la pupila. La fórmula experimental

$$R = \frac{40 + 24x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}$$

se ha utilizado para modelar la dependencia de R con respecto a x cuando R se mide en milímetros cuadrados y x se mide en unidades de brillo adecuadas.
(a) Encuentre la sensibilidad.
(b) Ilustre el inciso (a) dibujando tanto R como S como función de x. Comente acerca de los valores de R y S en los niveles de brillo más bajos. ¿Es esto lo que esperaba?

33. La ley de los gases para un gas ideal a la temperatura absoluta T (en kelvin), la presión P (en atmósferas) y el volumen V (en litros) es $PV = nRT$, donde n es el número de moles del gas y $R = 0.0821$ es la constante del gas. Suponga que, en cierto instante, $P = 8.0$ atm y aumenta en una de 0.10 atm/min y $V = 10$ L y disminuyen proporción de 0.15 L/min. Encuentre la razón de cambio de T con respecto al tiempo en ese instante si $n = 10$ mol.

34. En una granja piscícola se introduce una población de peces en un estanque y se cosechan con regularidad. Un modelo para la razón de cambio de la población se expresa con la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = r_0\left(1 - \frac{P(t)}{P_c}\right)P(t) - \beta P(t)$$

donde r_0 es la rapidez de nacimientos, P_c es la población máxima que el estanque puede sostener (llamada *capacidad de contención*) y β es el porcentaje de la población que se cosecha.
(a) ¿Cuál valor de dP/dt corresponde a una población estable?
(b) Si el estanque puede sostener 10 000 peces, la rapidez de nacimiento es del 5% y la cantidad de cosecha es del 4%, encuentre el nivel estable de la población.
(c) ¿Qué sucede si β se eleva hasta el 5%?

35. En el estudio de los ecosistemas, a menudo se usan los modelos *depredador-presa* para estudiar la interacción entre las especies. Considere una población de lobos de la tundra, dada por $W(t)$, y de caribúes, dada por $C(t)$, en el norte de Canadá. La interacción se ha modelado mediante las ecuaciones

$$\frac{dC}{dt} = aC - bCW \qquad \frac{dW}{dt} = -cW + dCW$$

(a) ¿Cuáles valores de dC/dt y dW/dt corresponden a poblaciones estables?
(b) ¿Cómo se representaría matemáticamente la afirmación "los caribúes van hacia la extinción"?
(c) Suponga que $a = 0.05$, $b = 0.001$, $c = 0.05$ y $d = 0.0001$. Encuentre todas las parejas de poblaciones (C, W) que conducen a poblaciones estables. De acuerdo con este modelo, ¿es posible que las especies vivan en armonía o una de ellas, o ambas, se extinguirán?

3.8 CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIAL

En muchos fenómenos naturales, las cantidades crecen o decaen en una cantidad proporcional a su tamaño. Por ejemplo, si $y = f(t)$ es el número de individuos en una población de animales o bacterias en el tiempo t, por lo tanto, parece razonable esperar que la rapidez de crecimiento $f'(t)$ es proporcional a la población $f(t)$; es decir, $f'(t) = kf(t)$ por alguna constante k. A propósito, bajo condiciones ideales (ambientes sin límite, nutrición adecuada, inmunidad a las enfermedades) el modelo matemático conocido por la ecuación $f'(t) = kf(t)$ sin duda predice lo que realmente sucede con precisión. Otro ejemplo sucede en física nuclear donde la masa de una sustancia radiactiva decae en una cantidad proporcional a su masa. En química la velocidad de una reacción de primer orden unimolecular es proporcional a la concentración de la sustancia. En finanzas, el valor de una cuenta de ahorros con interés compuesto se incrementa de manera continua en una cantidad proporcional a ese valor.

En general, si $y(t)$ es el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la razón de cambio de y con respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, en tal caso

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{dy}{dt} = ky}$$

donde k es una constante. Algunas veces la ecuación 1 se le llama **ley de crecimiento natural** (si $k > 0$) o la **ley de decaimiento natural** (si $k < 0$). Se le denomina una ecuación diferencial porque involucra una función desconocida y y su derivada dy/dt.

No es difícil pensar una solución de la ecuación 1. Esta ecuación pregunta hallar una función cuya derivada es un múltiplo constante de sí mismo. Conocerá tales funciones en este capítulo. Cualquier función exponencial de la forma $y(t) = Ce^{kt}$, donde C es una constante, que satisface

$$y'(t) = C(ke^{kt}) = k(Ce^{kt}) = ky(t)$$

Verá en la sección 9.4 que *cualquier* función que satisface $dy/dt = ky$ es de la forma $Y = Ce^{kt}$. Para ver el significado de la constante C, observe que

$$y(0) = Ce^{k\cdot 0} = C$$

En consecuencia C es el valor inicial de la función

> $\boxed{2}$ **TEOREMA** Las únicas soluciones de la ecuación diferencial y $dy/dt = ky$ son las funciones exponenciales
>
> $$y(t) = y(0)e^{kt}$$

CRECIMIENTO DE POBLACIÓN

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad k? En el panorama del crecimiento de la población, cuando $P(t)$ es el tamaño de una población en el tiempo t, escriba

$$\boxed{3} \qquad \frac{dP}{dt} = kP \quad \text{o} \quad \frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = k$$

La cantidad

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$$

es la rapidez de crecimiento dividido entre el tamaño de la población; a esto se le denomina la **rapidez de crecimiento relativo**. De acuerdo a (3), en lugar de decir "la rapidez de crecimiento es proporcional al tamaño de la población" podría decir "la rapidez de crecimiento relativo es constante." Por lo tanto, de acuerdo a (2) dice que la población con rapidez de crecimiento relativo k aparece como el coeficiente de t en la función exponencial Ce^{kt}. Por ejemplo, si

$$\frac{dP}{dt} = 0.02P$$

t se mide en años, en tal caso la rapidez de crecimiento relativo es $k = 0.02$ y el crecimiento de población relativa de 2% por cada año

$$P(t) = P_0e^{0.02t}$$

EJEMPLO 1 Use el hecho de que la población mundial fue 2 560 millones en 1950 y 3 040 millones en 1960 para modelar la población del mundo en la segunda mitad del siglo XX. (Suponga que la razón de crecimiento es proporcional al tamaño de la población. ¿Cuál es la razón de crecimiento relativo? Aplique el modelo para estimar la población mundial en 1993 y del mismo modo predecir la población en el año 2020.

SOLUCIÓN Mida el tiempo t en años y sea que $t = 0$ en el año 1950. Mida la población $P(t)$ en millones de personas. Por lo tanto, $P(0) = 2\,560$ y $P(10) = 3\,040$. Ya que está suponiendo que $dP/dt = kP$, del teorema 2 proporciona

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 2560e^{kt}$$

$$P(10) = 2560e^{10k} = 3040$$

$$k = \frac{1}{10}\ln\frac{3040}{2560} \approx 0.017185$$

La rapidez de crecimiento relativo es casi 1.7% por cada año y el modelo es

$$P(t) = 2560e^{0.017185t}$$

Se estima que en 1993 la población mundial fue

$$P(43) = 2560e^{0.017185(43)} \approx 5360 \text{ millones}$$

El modelo predice que en 2020 la población será

$$P(70) = 2560e^{0.017185(70)} \approx 8524 \text{ millones}$$

La gráfica en la figura 1 muestra que el modelo ya es exacto para finales del siglo XX (los puntos representan la población actual), de esta manera la estimación para 1993 es completamente confiable. Pero la predicción para 2020 es aventurado.

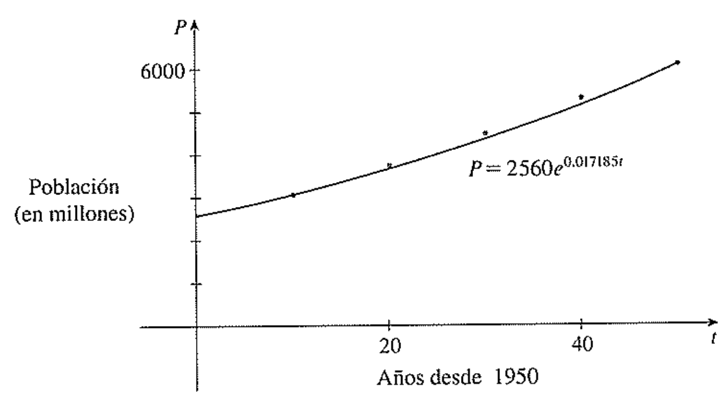


FIGURA 1
Un modelo del crecimiento de la población mundial en la segunda mitad del siglo XX

□

DECAIMIENTO RADIACTIVO

Una sustancia radiactiva decae emitiendo radiación de manera espontánea. Si $m(t)$ es la masa que queda a partir de una masa inicial m_0 de la sustancia después de tiempo t, por lo tanto, se ha encontrado de manera experimental que la rapidez de decaimiento

$$-\frac{1}{m}\frac{dm}{dt}$$

relativa es constante. (Ya que dm/dt es negativo, la rapidez de desintegración relativa es pósitiva.) Lo que permite que

$$\frac{dm}{dt} = km$$

donde k es una constante negativa. En otras palabras, las sustancias radiactivas decaen en una cantidad proporcional a la masa restante. Esto significa que puede usar (2) para demostrar que la masa decae de manera exponencial:

$$m(t) = m_0 e^{kt}$$

Los fisicos expresan la relación de decaimiento en términos del **tiempo de vida media**, el tiempo que se requiere para que la mitad de cualquier cantidad conocida se desintegre.

EJEMPLO 2 El tiempo de vida media del radio-226 es 1 590 años.
(a) Una muestra de radio-226 tiene una masa de 100 mg. Hallar una formula para la masa de la muestra que permanece después de t años.
(b) Hallar la masa después de 100 años exacto a lo más cercano de los miligramos.
(c) ¿Cuándo se ha reducido la masa a 30 mg?

SOLUCIÓN
(a) Sea $m(t)$ la masa de radio-226 (en miligramos) que permanece después de t años. En tal caso $dm/dt = km$ y $y(0) = 100$, de tal manera que (2) proporciona

$$m(t) = m(0)e^{kt} = 100e^{kt}$$

Con la finalidad de establecer el valor de k, aplique el hecho de de que $y(1\,590) = \frac{1}{2}(100)$.
En estos términos,

$$100e^{1590k} = 50 \qquad \text{o} \qquad e^{1590k} = \tfrac{1}{2}$$

y

$$1590k = \ln \tfrac{1}{2} = -\ln 2$$

$$k = -\frac{\ln 2}{1590}$$

En consecuencia

$$m(t) = 100e^{-(\ln 2)t/1590}$$

Podría aplicar el hecho de que $e^{\ln 2} = 2$ y escribir la expresión para $m(t)$ de forma alterna

$$m(t) = 100 \times 2^{-t/1590}$$

(b) La masa después de 100 años es

$$m(1000) = 100e^{-(\ln 2)1000/1590} \approx 65 \text{ mg}$$

(c) Busque el valor de t tal que $m(t) = 30$, es decir,

$$100e^{-(\ln 2)t/1590} = 30 \qquad \text{o bien} \qquad e^{-(\ln 2)t/1590} = 0.3$$

Resuelva esta ecuación para t tomando el logaritmo natural de ambos lados:

$$-\frac{\ln 2}{1590}t = \ln 0.3$$

Por esto

$$t = -1590\frac{\ln 0.3}{\ln 2} \approx 2762 \text{ años}$$

□

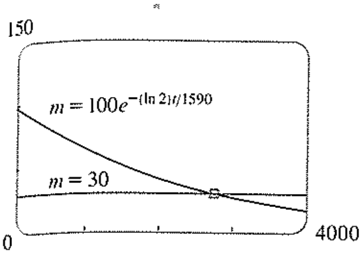


FIGURA 2

Para una verificación del ejemplo 2, aplique un dispositivo gráfico para dibujar la gráfica de $m(t)$ en la figura 2 junto con la línea horizontal $m = 30$. Estas curvas cruzan cuando $t \approx 2800$, y está de acuerdo con la respuesta del inciso (c).

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

La ley de enfriamiento de Newton establece que la rapidez de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y sus alrededores, siempre que esta diferncia no sea muy grande (además esta ley se aplica al calentamiento.) Si permite que $T(t)$ sea la temperatura del objeto en el tiempo t y T_s la temperatura de los alrededores. En seguida, puede formular la ley de enfriamiento de Newton como una ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_s)$$

Donde k es una constante. Esta ecuación no es completamente la misma que la ecuación 1, de tal manera que el cambio de variable $y(t) = T(t) - T_s$. Ya que T_s, es constante, $y'(t) = T'(t)$ y de este modo la ecuación se convierte en

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

Por lo tanto puede usar (2) para hallar una expresión para y, de la que puede encontrar T.

EJEMPLO 3 Un recipiente con una bebida gasificada a temperatura ambiente (72°F) se coloca dentro de un refrigerador donde la temperatura es 44°F. Después de media hora la bebida se ha enfriado hasta 61°F.
(a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida después de la otra media hora?
(b) ¿Cuánto tardará la bebida en enfriarse a 50°F?

SOLUCIÓN
(a) Sea $T(t)$ la temperatura de la bebida después de t minutos. La temperatura de los alrededores es $T_s = 44$°F, por consiguiente la ley de enfriamiento de Newton establece que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 44)$$

Si permite que $y = T - 44$, en seguida $y(0) = T(0) - 44 = 72 - 44 = 28$, de este modo y satisface que

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad y(0) = 28$$

y mediante (2) tiene

$$y(t) = y(0)e^{kt} = 28e^{kt}$$

Entonces $T(30) = 61$, igualmente $y(30) = 61 - 44 = 17$ y

$$28e^{30k} = 17 \qquad e^{30k} = \tfrac{17}{28}$$

Tomando logaritmos, tiene

$$k = \frac{\ln\left(\frac{17}{28}\right)}{30} \approx -0.01663$$

Por esto

$$y(t) = 28e^{-0.01663t}$$

$$T(t) = 44 + 28e^{-0.01663t}$$

$$T(60) = 44 + 28e^{-0.01663(60)} \approx 54.3$$

Así después de la otra mitad de la hora, la bebida se ha enfriado a casi 54°F.
(b) Tiene $T(t) = 50$ cuando

$$44 + 28e^{-0.01663t} = 50$$

$$e^{-0.01663t} = \tfrac{6}{28}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{6}{28}\right)}{-0.01663} \approx 92.6$$

La bebida se enfría a 50°F después de casi 1 hora 33 minutos.

Observe que en el ejemplo 3

$$\lim_{t\to\infty} T(t) = \lim_{t\to\infty} (44 + 28e^{-0.01663t}) = 44 + 28 \cdot 0 = 44$$

lo que se esperaba. La gráfica de la función temperatura se muestra en la figura 3.

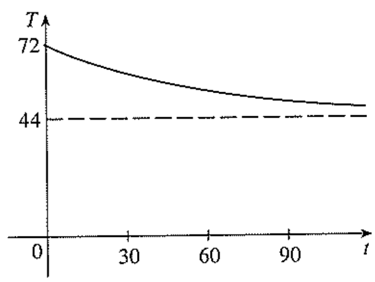


FIGURA 3

INTERÉS COMPUESTO CONTINUAMENTE

EJEMPLO 4 Si se inverten 1000 dólares al 6% de interés anual compuesto, entonces, después de 1 año la inversión es valorada en 1000(1.06) = 1060 dólares, después de 2 años su valor es [1000(1.06)] 1.06 = 1123.60 dólares y después de t años su valor es 1000(1.06) t dólares. En general, si se invierte una cantidad A_0 con una tasa de interés $r(r = 0.06$, en este ejemplo), entonces después de t años su valor es de $A_0(1 + r)^t$. No obstante, por lo general con más frecuencia el interés es compuesto, se dice, n veces el año. Por lo tanto en cada periodo combinado la tasa de interés es r/n y existe nt periodos combinados en t años, de este modo el valor de la inversión es

$$A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

Por ejemplo, una inversión de 1000 dólares después de 3 años al 6% de interés estará valorados en

$$\$1000(1.06)^3 = \$1191.02 \text{ con combinación anual}$$

$$\$1000(1.03)^6 = \$1194.05 \text{ con combinación semestral}$$

$$\$1000(1.015)^{12} = \$1195.62 \text{ con combinación trimestral}$$

$$\$1000(1.005)^{36} = \$1196.68 \text{ con combinación mensual}$$

$$\$1000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365 \cdot 3} = \$1197.20 \text{ con combinación diaria}$$

Puede ver que el pago del interés se incrementa cuando el número de periodos combinados (n) se incrementa. Si permite que $n \to \infty$ en consecuencia, estará combinando el interés de **manera continua** y el valor de la inversión será

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{n\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} \\ &= A_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \qquad \text{(donde } m = n/r\text{)} \end{aligned}$$

Pero el límite en esta expresión es igual al número e. (Véase la ecuación 3.6.6). Así, con la combinación continua del interés en la tasa de interés r, la cantidad después de t años es

$$A(t) = A_0e^{rt}$$

Si deriva esta función, obtiene

$$\frac{dA}{dt} = rA_0e^{rt} = rA(t)$$

la cual dice que, con combinación continua de interés, la proporción de incremento de una inversión es proporcional a su tamaño.

Regresando al ejemplo de 1000 dólares invertidos por 3 años al 6% de interés, con combinación de interés, el valor de la inversión será

$$A(3) = \$1000e^{(0.06)3} = \$1197.22$$

Observe cómo se acerca a la cantidad calculada por combinación diaria, 1197.20 dólares. Pero es más fácil calcular la cantidad si aplica combinación cóntinua. □

3.8 EJERCICIOS

1. Una población de protozoarios se desarrollan en una razón de crecimiento relativo constante de 0.7944 por miembro por cada día. En el día cero la población consiste de dos miembros. Hallar el tamaño de la población después de seis días.

2. Un habitante común del intestino humano es la bacteria *Escherichia coli*. Una célula de esta bacteria en un caldo nutriente se divide en dos células cada 20 minutos. La población inicial de un cultivo es de 60 células
   (a) Hallar la razón de crecimiento relativo.
   (b) Encontrar una expresión para el número de células después de t horas.
   (c) Calcular el número de células después de 8 horas.
   (d)Establecer la razón de crecimiento después de 8 horas.
   (e)¿Cuándo la población alcanzará 20 000 células.

3. Un cultivo de bacterias al inicio contiene 100 células y crece en una cantidad proporcional a su tamaño. Después de 1 hora la población se ha incrementado a 420.
   (a) Establecer una expresión para el número de bacterias después de t horas.
   (b) Calcular el número de bacterias después de 3 horas.
   (c) Encuentre la tasa de crecimiento después de 3 horas.
   (d) ¿Cuándo la población alcanza 10 000?

4. Un cultivo de bacterias crece con una rapidez de crecimiento relativo constante. Después de 2 horas existen 600 bacterias y después de 8 horas la cuenta es de 75 000.
   (a) Hallar la población inicial.
   (b)Establecer una expresión para la población después de t horas.

(c) Calcular el número de células después de 5 horas.
(d) Establecer la rapidez de crecimiento después de 5 horas.
(e) ¿Cuándo la población alcanzará 200 000?

5. La tabla proporciona estimados de la población mundial, en millones, desde 1750 hasta 2000.

Año	Población	Año	Población
1750	790	1900	1650
1800	980	1950	2560
1850	1260	2000	6080

(a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de población para 1750 y 1800 para predecir la población mundial en 1900 y en 1950. Compare con las cifras actuales.
(b) Utilice el modelo exponencial y las cifras de población para 1850 y 1900 para predecir la población mundial en 1950. Compare con la población actual.
(c) Emplee el modelo exponencial y las cifras de población de 1900 y 1950 para predecir la población mundial en 2000. Compare con la población actual e intente explicar la discrepancia.

6. La tabla proporciona la población de Estados Unidos, en millones, para los años 1900-2000.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	275
1950	150		

(a) Aplique el modelo exponencial y las cifras de censo para 1900 y 1910 para predecir la población en 2000. Compare con las cifras actuales e intente explicar la discrepancia.
(b) Use el modelo exponencial y las cifras del censo para 1980 y 1990 para predecir la población en 2000. Compare con la población actual. A continuación aplique este modelo para predecir la población en los años 2010 y 2020.
(c) Grafique ambas funciones exponenciales de los incisos (a) y (b) junto con una gráfica de la población actual. ¿Alguno de estos modelos es razonable?

7. Los experimentos muestran que si la reacción quimica.

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \tfrac{1}{2}O_2$$

se realiza a 45°C, la velocidad de reacción del pentóxido de dinitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0.0005[N_2O_5]$$

(a) Hallar una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.
(b) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para reducir la concentración de N_2O_5 a 90% de su valor original?

8. El bismuto-210 tiene un tiempo de vida media de 5.0 días.
(a) Una muestra tiene originalmente una masa de 800 mg. Establecer una formula para la masa que resta después de t días.
(b) Calcular la masa que esta después de 30 días.
(c) ¿Cuándo se reduce la masa a 1 mg?
(d)Bosquejar la gráfica de la función masa.

9. El tiempo de vida media del cesio-137 es de 30 años. Considere una masa de 100 mg.
(a) Establecer la masa que permanece después de t años.
(b)¿Cuánto de la masa permanece después de 100 años?
(c) ¿Después de cuanto tiempo permanece únicamente 1 mg?

10. Una muestra de tritium-3 se desintegró a 94.5% de su cantidad original después de 1 año.
(a) ¿Cuál es el tiempo de vida media del tritium-3?
(b)¿Cuánto tardaría en decaer a 20% de su cantidad original?

11. Los científicos pueden establecer la edad de objetos antiguos mediante el método del carbono. El bombardeo de la atmósfera superior por los rayos cósmicos convierte al nitrógeno en un isótopo radioactivo de carbono, ^{14}C, con un tiempo de vida media aproximado de 5 730 años. La vegetación absorbe dióxido de carbono a través de la atmósfera y la vida animal asimila ^{14}C a través de la cadena alimenticia. Cuando una planta o un animal mueren, se detiene la sustitución de su carbono y la cantidad de ^{14}C inicia su disminución a través de la desintegración radiactiva. En consecuencia el nivel de radiactividad también decae de manera exponencial.

Fue descubierto un fragmento de pergamino que tiene casi 74% de ^{14}C tanta radiactividad como el material de la planta en la tierra hoy en día. Estimar la edad del pergamino.

12. Una curva pasa a través del punto (0, 5) y tiene la propiedad de que la pendiente de la curva en cualquier punto P es dos veces la coordenada y de P. ¿Cuál es la ecuación de la curva?

13. De un horno se toma un pavo rostizado cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre una mesa en un espacio donde la temperatura es 75°F.
(a) Si la temperatura del pavo es 150°F después de media hora: ¿cuál es la temperatura 45 minutos después?
(b)¿Cuándo se enfriará el pavo a 100°F?

14. Se toma un termómetro de una habitación donde la temperatura es 5°C. Un minuto después la lectura en el termómetro es de 12°C.
(a) ¿Cuál será la lectura en el termómetro unos minutos después?
(b)¿Cuándo la lectura del termómetro será 6°C?

15. Cuando se toma una bebida fría del refrigerador, su temperatura es 5°C. Después de 25 minutos dentro de una habitación a 20°C su temperatura se incrementa a 10°C.
(a) ¿Cuál es la temperatura de la bebida 50 minutos después?
(b)¿Cuándo su temperatura será de 15°C?

16. Una taza de café recién hecha tiene 95°C de temperatura en una habitación a 20°C. Cuando la temperatura es de 70°C, se enfría en una proporción de 1°C por cada minuto. ¿Cuándo sucede esto?

17. La razón de cambio de la presión atmosférica P con respecto a la altitud h es proporcional a P, considere que la temperatura es constante. En 15°C la presión es 101.3 kPa al nivel del mar y 87.14 kPa en $h = 100$ m.

(a) ¿Cuál es la presión en una altitud de 3 000 m?

(b)¿Cuál es la presión en la cima del monte McKinly, en una altitud de 6 187 m?

18. (a) Si se prestan 1 000 dólares al 8% de interés, calcular la cantidad que se debe al final de 3 años si el interés es compuesto. (i) anual, (ii) trimestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) diario, (vi) por hora, y (vii) de manera continua.

(b) Considere que se prestan 1 000 dólares y el interés es compuesto de manera continua. Si $A(t)$ es la cantidad que se debe t años después, donde $0 \leqslant t \leqslant 3$, grafique $A(t)$ para cada una de las tasas de interés 6%, 8% y 10% en una pantalla común.

19. (a) Si invierta 3 000 dólares al 5% de interés, calcule el valor de la inversión al final de 5 años si el interés es compuesto (i) anual, (ii) semestral, (iii) mensual, (iv) semanal, (v) por día, y (vi) de manera contínua.

(b)Si $A(t)$ es la cantidad de la invesión al tiempo t para el caso de combinación continua, escriba una ecuación diferencial y una condición inicial que satisfaga $A(t)$.

20. (a) ¿Cuánto transcurrirá para que una inversión se duplique en valor si la tasa de interés es de 6% compuesto de manera continua?

(b) ¿Cuál es la tasa de interés anual equivalente?

3.9 RELACIONES AFINES

Si está inflando un globo, tanto su volumen como su radio se incrementan y sus proporciones de incremento están relacionadas entre sí. Pero es mucho más fácil medir de modo directo la proporción de aumento de volumen que la proporción de incremento del radio.

En un problema de relaciones afines, la idea es calcular la relación de cambio de una cantidad en términos de la relación de cambio de otra cantidad, la cual, además, se podría medir con más facilidad. El procedimiento es determinar una ecuación que relaciona las dos cantidades y aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros con respecto al tiempo.

EJEMPLO 1 Se infla un globo esférico y su volumen se incrementa en una proporción de 100 cm³/s. ¿Qué tan rápido aumenta el radio del globo cuando el diámetro es de 50 cm?

De acuerdo con los principios de la resolución de problemas estudiados en la página 76, el primer paso es entender el problema. Ahí está incluida la lectura cuidadosa del problema, la identificación de los datos con que se cuenta y lo que se desconoce y la introducción de una notación conveniente.

SOLUCIÓN Empiece por identificar dos aspectos:

la *información que se proporciona:*

la proporción de incremento del volumen del aire es 100 cm³/s

y lo *que se desconoce*:

la rapidez de incremento del radio cuando el diámetro es 50 cm

Con objeto de expresar estas cantidades en forma matemática, introduzca una *notación* sugerente:

Sea V el volumen del globo y r su radio.

La clave que hay que tener presente es que las razones de cambio son derivables. En este problema, tanto el volumen como el radio son funciones del tiempo t. La proporción de incremento del volumen con respecto al tiempo es la derivada dV/dt, y la rapidez del incremento del radio es dr/dt. Por lo tanto, replantee lo que conoce y lo que desconoce de la manera siguiente:

$$\textit{Conocido:} \quad \frac{dV}{dt} = 100 \text{ cm}^3\text{/s}$$

$$\textit{Desconocido:} \frac{dr}{dt} \quad \text{cuando} \quad r = 25 \text{ cm}$$

La segunda etapa de la resolución de problemas es pensar en un plan para relacionar la información conocida con la desconocida.

Con objeto de relacionar dV/dt y dr/dt, primero relacione V y r mediante la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Para utilizar la información dada, derive con respecto a t a ambos miembros de la ecuación. Para derivar el lado derecho necesita aplicar la regla de la cadena:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Ahora resuelva para la cantidad desconocida:

Observe que aunque dV/dt es constante, dr/dt *no* lo es.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

Si sustituye $r = 25$ y $dV/dt = 100$ en esta ecuación, obtiene

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi(25)^2}100 = \frac{1}{25\pi}$$

El radio del globo se incrementa en una proporción de $1/(25\pi) \approx 0.0127$ cm/s. □

EJEMPLO 2 Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra un muro vertical. Si la parte inferior de la escalera se desliza alejándose de la pared en una proporción de 1 pie/s, ¿qué tan rápido la parte superior de la escalera resbala hacia abajo por la pared cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

SOLUCIÓN Primero dibuje un esquema y ponga los datos como se muestra en la figura 1. Sea x pies la distancia desde la parte inferior de la escalera al muro y y pies la distancia desde la parte superior de la escalera al piso. Observe que x y y son funciones del tiempo t (tiempo que se mide en segundos)

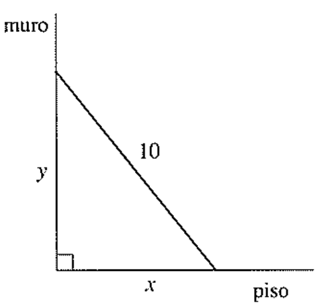


FIGURA 1

Sabe que $dx/dt = 1$ pie/s y se pide determinar dy/dt cuando $x = 6$ pies (véase figura 2). En este problema, la relación entre x y y la define el teorema de Pitágoras:

$$x^2 + y^2 = 100$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros aplicando la regla de la cadena

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

y al resolver esta ecuación para determinar la relación deseada

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

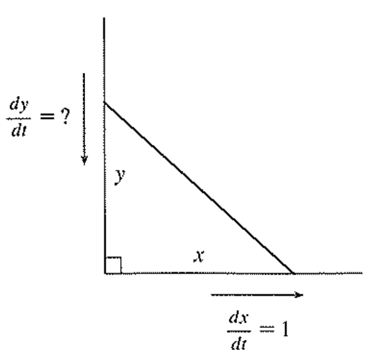


FIGURA 2

Cuando $x = 6$, el teorema de Pitágoras da $y = 8$ y al sustituir estos valores y $dx/dt = 1$, llega a

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4} \text{ pies/s}$$

El hecho de que dy/dt sea negativa quiere decir que la distancia desde la parte superior de la escalera al suelo *decrece* una proporción de $\frac{3}{4}$ pie/s. En otras palabras, la parte superior de la escalera se resbala hacia abajo de la pared una proporción de $\frac{3}{4}$ pie/s. □

EJEMPLO 3 Un depósito para agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el depósito a una razón de 2 m^3/min, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

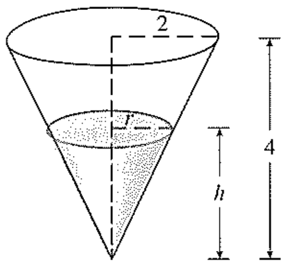


FIGURA 3

SOLUCIÓN Primero elabore un diagrama del cono y anote la información como en la figura 3. Sean V, r y h el volumen del agua, el radio de la superficie circular y la altura en el tiempo t, donde t se mide en minutos.

Sabe que $dV/dt = 2$ m^3/min y se pide determinar dh/dt cuando h es 3 m. Las cantidades V y h se relacionan mediante la ecuación

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

pero es muy útil expresar V sólo en función de h. Con objeto de eliminar r, recurra a los triángulos semejantes en la figura 3 para escribir

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{4} \qquad r = \frac{h}{2}$$

y la expresión para V se vuelve

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}h^3$$

Ahora puede derivar con respecto a t cada miembro:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}h^2\frac{dh}{dt}$$

de modo que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$$

Al sustituir $h = 3$ m y $dV/dt = 2$ m^3/min obtiene

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(3)^2}\cdot 2 = \frac{8}{9\pi}$$

El nivel del agua sube a razón de $8/(9\pi) \approx 0.28$ m/min. □

■ Reflexione. ¿Qué ha aprendido de los ejemplos 1 a 3 que le ayude a resolver problemas futuros?

ESTRATEGIA Es útil recordar algunos de los principios para resolver problemas que se encuentran en la página 76 y adaptarlos a las razones relacionadas luego de lo que aprendió en los ejemplos 1 a 3:

1. Lea con cuidado el problema.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que están en función del tiempo.
4. Exprese la información dada y la relación requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diferentes cantidades del problema. Si es necesario, aplique las propiedades geométricas de la situación para eliminar una de las variables por sustitución, como en el ejemplo 3.
6. Aplique la regla de la cadena para derivar con respecto a t ambos miembros de la ecuación.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y determine la proporción desconocida.

Los ejemplos siguientes son otras ilustraciones de la estrategia.

ADVERTENCIA: Un error común es la sustitución de la información numérica conocida (por cantidades que varían con el tiempo) muy pronto. La sustitución se efectúa sólo *después* de la derivación. (El paso 7 va después del paso 6.) Es decir, en el ejemplo 3 se tratan valores generales de h hasta que finalmente sustituye $h = 3$ en la última etapa. (Si hubiera sustituido $h = 3$ desde antes, habría obtenido $dV/dt = 0$, lo cual es evidentemente erróneo.)

EJEMPLO 4 El automóvil A se dirige hacia el oeste a 50 millas/h y el vehículo B viaja hacia el norte a 60 millas/h. Ambos se dirigen hacia la intersección de los dos caminos. ¿Con que rapidez se aproximan los vehículos entre sí cuando el automóvil A está a 0.3 millas y el vehículo B está a 0.4 millas de la intersección?

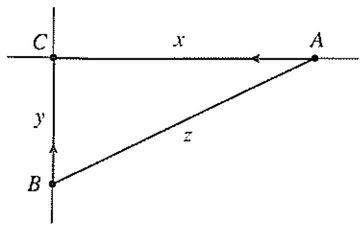


FIGURA 4

SOLUCIÓN Dibuje la figura 4 donde C es la intersección de los caminos. En un tiempo dado t, sea x la distancia entre el automóvil A y C, sea y la distancia desde el automóvil B a C, y sea z la distancia entre los vehículos, donde x, y y z se miden en millas.

Sabe que $dx/dt = -50$ millas/h y $dy/dt = -60$ millas/h. Las derivadas son negativas porque x y y son decrecientes. Se pide calcular dz/dt. La ecuación que relaciona x, y y z la proporciona el teorema de Pitágoras:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Al derivar ambos lados con respecto a t obtiene

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{z}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right)$$

Cuando $x = 0.3$ millas y $y = 0.4$ millas, el teorema de Pitágoras da $z = 0.5$ millas, de modo que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{0.5}[0.3(-50) + 0.4(-60)]$$

$$= -78 \text{ millas/h}$$

Los vehículos se aproximan entre sí a razón de 78 millas/h. □

EJEMPLO 5 Un hombre camina a lo largo de una trayectoria recta a una rapidez de 4 pies/s. Un faro está situado sobre el nivel de la tierra a 20 pies de la trayectoria y se mantiene enfocado hacia el hombre. ¿Con que rapidez el faro gira cuando el hombre está a 15 pies del punto sobre la trayectoria más cercana a la fuente de luz?

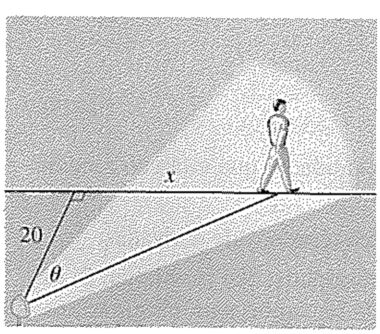


FIGURA 5

SOLUCIÓN Trace la figura 5 y haga que x sea la distancia desde el hombre hasta el punto sobre la trayectoria que esté más cercana al faro. Sea θ el ángulo entre el rayo desde el faro y la perpendicular a la trayectoria.

Sabe que $dx/dt = 4$ pies/s y se pide calcular $d\theta/dt$ cuando $x = 15$. La ecuación que relaciona x y θ se puede escribir a partir de la figura 5:

$$\frac{x}{20} = \tan\theta \qquad x = 20\tan\theta$$

Al derivar con respecto a t ambos miembros obtiene

$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt}$$

por lo que $$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2\theta\,(4) = \frac{1}{5}\cos^2\theta$$

Cuando $x = 15$, la longitud del rayo es 25, por eso $\cos\theta = \frac{4}{5}$ y

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128$$

El faro gira con una rapidez de 0.128 rad/s. □

3.9 EJERCICIOS

1. Si V es el volumen de un cubo que mide por lado x y, además, el cubo se expande a medida que transcurre el tiempo, calcule dV/dt en términos de dx/dt.

2. (a) Si A es el área de un círculo cuyo radio es r y el círculo se amplía a medida que pasa el tiempo, determine dA/dt en términos de dr/dt.
   (b) Suponga que el aceite se derrama de un depósito agrietado y que se extiende según un patrón circular. Si el radio del derrame de aceite se incrementa a una proporción constante de 1 m/s, ¿qué tan rápido se incrementa el área del derrame cuado el radio es de 30 m?

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de 6 cm/s. ¿En que proporción se incrementa el área del cuadrado cuando el área del cuadrado es de 16 cm^2?

4. El largo de un rectángulo se incrementa a razón de 8 cm/s y el ancho en 3 cm/s. Cuando la longitud es 20 cm y el ancho es 10 cm, ¿qué tan rápido se incrementa el área del rectángulo?

5. Un tanque cilíndrico con 5 m de diámetro se está llenando con agua a razón de 3 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de agua'?

6. El radio de una esfera se incrementa a razón de 4 mm/s. ¿Qué tan rápido se incrementa el volumen cuando el diámetro es de 80 mm?

7. Si $y = x^3 + 2x$ y $dx/dt = 5$, determine dy/dt cuando $x = 2$.

8. Si $x^2 + y^2 = 25$ y $dy/dt = 6$, determine dx/dt cuando $y = 4$.

9. Si $z^2 = x^2 + y^2$, $dx/dt = 2$, y $dy/dt = 3$, encuentre dz/dt cuando $x = 5$ y $y = 12$.

10. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = \sqrt{1 + x^3}$. Cuando alcanza el punto (2, 3), la coordenada y se incrementa a una rapidez de 4 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la coordenada x del punto variable en ese instante?

11–14

(a) ¿Qué cantidades se proporcionan en el problema?
(b) ¿Qué se desconoce?
(c) Trace un diagrama de la situación en cualquier tiempo t.
(d) Plantee una ecuación que relacione las cantidades.
(e) Termine de resolver el problema.

11. Un avión que vuela horizontalmente a una altitud de 1 milla y a una rapidez de 500 millas/h pasa directamente sobre una estación de radar. Calcule la rapidez a la cual la distancia desde el avión a la estación se incrementa cuando está a 2 millas de la estación.

12. Si una bola de nieve se funde de tal modo que el área superficial disminuye a razón de 1 cm^2/min, calcule la rapidez a la cual disminuye el diámetro cuando éste es 10 cm.

13. Una lámpara está instalada en lo alto de un poste de 15 pies de altura. Un hombre de 6 pies de estatura se aleja caminando desde el poste con una rapidez de 5 pies/s a lo largo de una trayectoria rectilínea. ¿Qué tan rápido la punta de su sombra se desplaza cuando está a 40 pies del poste?

14. A mediodía, un barco A está a 150 km al oeste del barco B. El barco A navega hacia el este a 35 km/h y el barco B navega hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los barcos a las 4:00 PM?

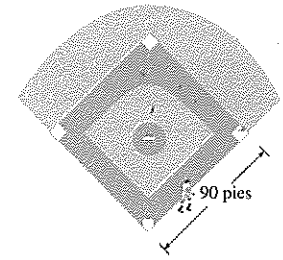
---

15. Dos vehículos parten desde el mismo punto. Uno se dirige hacia el sur a 60 millas/h y el otro hacia el oeste a 25 millas/h. ¿En que proporción se incrementa la distancia entre los vehículos dos horas después?

16. Una luminaria sobre el piso ilumina una pared a 12 m de distancia. Si un hombre de 2 m de estatura camina desde la luminaria hacia el edificio a una rapidez de 1.6 m/s, ¿qué tan rápido disminuye la longitud de su sombra sobre el muro cuando está a 4 m del edificio?

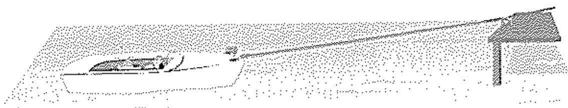
17. Un hombre empieza a caminar hacia el norte a 4 pies/s desde el punto P. Cinco minutos más tarde, una mujer empieza a caminar hacia el sur a 5 pies/s desde un punto a 500 pies directo al este de P. ¿Con qué rapidez se están separando las personas 15 min después de que la mujer empezó a caminar?

18. Un diamante de béisbol es un cuadrado de 90 pies por lado. Un bateador golpea la pelota y corre hacia la primera base con una rapidez de 24 pies/s.
   (a) ¿En qué proporción su distancia desde la segunda base decrece cuando está a medio camino de la primera base?
   (b) ¿En qué proporción su distancia desde la tercera base se incrementa en el mismo momento?



19. La altitud de un triángulo se incrementa a razón de 1 cm/min mientras que el área del triángulo aumenta en una proporción de 2 cm^2/min. ¿En qué proporción cambia la base del triángulo cuando la altitud es de 10 cm y el área es de 100 cm^2?

20. Una embarcación se jala hacia un muelle mediante una soga unida a la proa del bote y pasa por una polea que se encuentra instalada en el muelle a 1 m más arriba que la proa del bote. Si la soga se jala a una rapidez de 1 m/s, ¿qué tan rápido se aproxima al muelle cuando está a 8 m de éste?



21. A mediodía, el barco A está a 100 km al oeste del barco B. El barco A se dirige hacia el sur a 35 km/h y el barco B va hacia el norte a 25 km/h. ¿Qué tan rápido se modifica la distancia entre los barcos a las 4:00 PM?

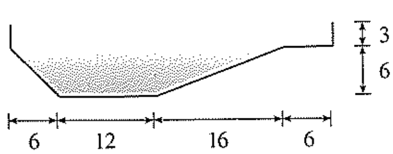
22. Una partícula se desplaza a lo largo de la curva $y = \sqrt{x}$. Cuando pasa por el punto (4, 2), su coordenada x se incrementa en una proporción de 3 cm/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la partícula al origen en ese instante?

23. El agua sale de un depósito en forma de cono invertido a una relación de 10 000 cm^3/min al mismo tiempo que se bombea agua al depósito a una proporción constante. El depósito mide 6 m de alto y el diámetro en la parte superior es de 4 m. Si el nivel del agua se eleva a una relación de 20 cm/min cuando la altura del agua es de 2 m, calcule la proporción a la cual el agua está siendo bombeada hacia el tanque.

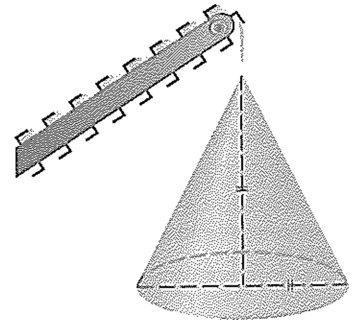
24. Un canalón mide 10 pies de largo y sus extremos tienen la forma de un triángulo isósceles; el ancho del canalón es de 3 pies, lo que sería la base del triángulo, y la altura es de 1 pie. Si el canalón se llena con agua a razón de 12 pies cúbicos por minuto, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene una profundidad de 6 pulg?

25. Un canal de agua mide 10 pies de largo y su sección transversal tiene la forma de un trapezoide isósceles que tiene 30 cm de ancho en el fondo, 80 cm de ancho en la parte superior y mide 50 cm de alto. Si el canal se está llenando con agua a razón de 0.2 m^3/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene 30 cm de profundidad?

26. Una piscina mide 20 pies de ancho, 40 pies de largo y 3 pies en el extremo polo profundo, y tiene 9 pies de fondo en la parte más profunda. En la figura se ilustra una sección transversal de la piscina. Si ésta se llena a razón de 0.8 pies cúbicos/min, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando la altura del agua en el punto más profundo es de 5 pies?



27. Se entrega grava por medio de una cinta transportadora a razón de 30 pies cúbicos por minuto; las dimensiones de sus fragmentos permiten formar una pila en forma de cono cuyo diámetro y altura son siempre iguales. ¿Qué tan rápido se incrementa la altura de la pila cuando ésta mide 10 pies de alto?



28. Un papalote que está a 100 pies por arriba de la superficie de la tierra se desplaza en forma horizontal a una rapidez de 8 pies/s. ¿En que proporción disminuye el ángulo entre la cuerda y la horizontal cuando se han soltado 200 pies de cuerda?

29. Dos lados de un triángulo miden 4 y 5 m, y el ángulo entre ellos se incrementa a razón de 0.06 rad/s. Calcule la proporción a la cual el área del triángulo se incrementa cuando el ángulo entre los lados de longitud constante es de $\pi/3$.

30. ¿Con qué rapidez cambia el ángulo entre el muro y la escalera cuando la parte inferior de la escalera está a 6 pies del muro?

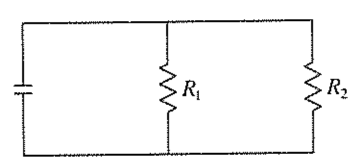
31. La ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a temperatura constante, la presión P y el volumen V cumplen la ecuación $PV = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es de 600 cm^3, la presión es de 150 kPa y que la presión se incrementa una cantidad de 20 kPa/min. ¿En que proporción disminuye el volumen en este instante?

32. Cuando el aire se expande en forma adiabática, es decir, no gana ni pierde calor, su presión P y su volumen V se relacionan mediante la ecuación $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. Suponga que en un cierto instante el volumen es 400 cm^3 y que la presión es 80 kPa y está disminuyendo en una cantidad de 10 kPa/min. ¿En que proporción se incrementa el volumen en este instante?

33. Si se conectan dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, como se ilustra en la figura, por lo tanto la resistencia total R, medida en ohms (Ω) es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

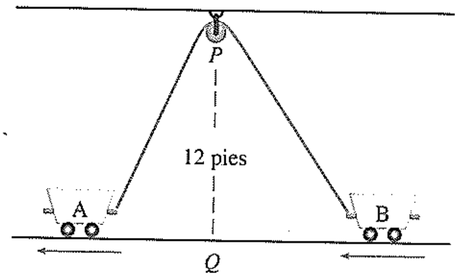
Si R_1 y R_2 se incrementan en proporción de 0.3 Ω/s y 0.2 Ω/s, respectivamente, ¿qué tan rápido cambia R cuando $R_1 = 80\ \Omega$ y $R_2 = 100\ \Omega$?



34. El peso B del cerebro en función del peso del cuerpo W en los peces ha sido modelado mediante la función potencia $B = 0.007W^{2/3}$, donde B y W se dan en gramos. Un modelo para el peso corporal en función de la longitud del cuerpo L en centímetros, es $W = 0.12L^{2.53}$. Si en 10 millones de años la longitud promedio de ciertas especies de peces evolucionaron desde 15 cm a 20 cm a una proporción constante, ¿qué tan rápido creció el cerebro de estas especies cuando la longitud promedio era de 18 cm?

35. Los lados de un triángulo tienen longitudes de 12 m y 15 m. El ángulo entre ellos se incrementa a razón de 2°/min ¿Qué tan rápido se incrementa la longitud del tercer lado cuando el ángulo entre los lados de longitud fija es de 60°?

36. Dos carros A y B están conectados por medio de una soga de 39 pies de longitud que pasa por una polea P (véase la figura). El punto O está en el suelo a 12 pies directamente abajo de P y entre los carros. El carro A es jalado a partir de O a una rapidez de 2 pies/s. ¿Qué tan rápido se mueve el carro B hacia O en el instante en que el carro A está a 5 pies de O?



37. Se instala una cámara de televisión a 4 000 pies de la base de una plataforma de lanzamiento de cohetes. El ángulo de elevación de la cámara tiene que cambiar con la proporción correcta con el objeto de tener siempre a la vista al cohete. Asimismo, el mecanismo de enfoque de la cámara tiene que tomar en cuenta la distancia creciente de la cámara al cohete que se eleva. Suponga que el cohete se eleva verticalmente y que su rapidez es 600 pies/s cuando se ha elevado 3 000 pies.

(a) ¿Qué tan rápido cambia la distancia de la cámara de televisión al cohete en ese momento?

(b) Si la cámara de televisión se mantiene dirigida hacia el cohete, ¿qué tan rápido cambia el ángulo de elevación de la cámara en ese momento?

38. Un faro se localiza en una pequeña isla a 3 km del punto más cercano P que se encuentra en una playa recta; la lámpara del faro da cuatro revoluciones por minuto. ¿Qué tan rápido se mueve el haz de luz a lo largo de la playa cuando está a 1 km de P?

39. Un avión vuela horizontalmente en una altitud de 5 km y pasa directamente sobre un telescopio de seguimiento en la superficie de la tierra. Cuando el ángulo de elevación es $\pi/3$, este ángulo está disminuyendo en una prororción de $\pi/6$ rad/min. ¿En ese instante con que rapidez está viajando el avión?

40. Una rueda de la fortuna de 10 m de radio está girando con una proporción de una revolución cada 2 minutos. ¿Qué tan rápido se está elevando un pasajero cuando su silla está a 16 m arriba del nivel de la superficie de la tierra?

41. Un avión que vuela con rapidez constante de 300 km/h pasa sobre una estación terrestre de radar a una altitud de 1 km y se eleva con un ángulo de 30°. ¿En que proporción se incrementa la distancia del avión a la estación de radar un minuto más tarde?

42. Dos personas parten del mismo punto. Una camina hacia el este a 3 millas/h y la otra camina hacia el noreste a 2 millas/h. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las personas después de 15 minutos?

43. Un individuo corre por una pista circular de 100 m de radio a una rapidez constante de 7 m/s. Un amigo del corredor está parado a una distancia de 200 m del centro de la pista. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre los amigos cuando la distancia entre ellos es de 200 m?

44. La manecilla de los minutos de un reloj mide 18 mm de largo y la manecilla de las horas mide 4 mm de largo. ¿Qué tan rápido cambia la distancia entre las puntas de las manecillas cuando es la 1 de la tarde?

3.10 APROXIMACIONES LINEALES Y DIFERENCIALES

Ya vio que una curva se encuentra muy cerca de su recta tangente cerca del punto de tangencia. De hecho, al realizar un acercamiento hacia el punto en la gráfica de una función derivable, advirtio que la gráfica se parece cada vez más a su recta tangente. (Véase la figura 2 en la sección 2.7.) Esta observación es la base de un método para hallar valores aproximados de funciones.

La idea es que puede resultar fácil calcular un valor $f(a)$ de una función, pero difícil (si no es que imposible) calcular valores cercanos de f. Por lo tanto, recurra a los valores calculados fácilmente de la función lineal L cuya gráfica es la recta tangente de f en $(a, f(a))$. (Véase la figura 1.)

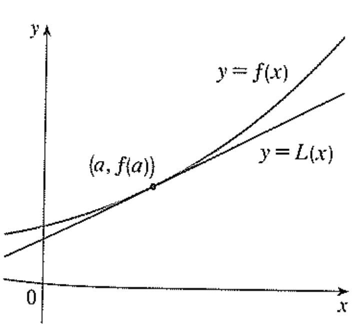


FIGURA 1

En otras palabras, use la recta tangente en $(a, f(a))$ como una aproximación a la curva $y = f(x)$ cuando x está cerca de a. Una ecuación para la recta tangente es

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

y la aproximación

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \qquad \boxed{1}$$

se conoce con el nombre de **aproximación lineal** o **aproximación de la recta tangente** de f en a. A la función lineal cuya gráfica es su recta tangente, es decir,

$$\boxed{2} \qquad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

se le llama **linealización** de f en a.

EJEMPLO 1 Encuentre la linealización de la función $f(x) = \sqrt{x+3}$ en $a = 1$ y úsela para obtener una aproximación de los números $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$. ¿Estas aproximaciones son sobrestimaciones o subestimaciones?

SOLUCIÓN La derivada de $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ es

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(x+3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

y, de este modo se tiene $f(1) = 2$ y $f'(1) = \frac{1}{4}$. Si se ponen estos valores en la ecuación (2) la linealización es

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \tfrac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

La aproximación lineal correspondiente (1) es

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4} \qquad \text{(cuando } x \text{ está cerca de 1)}$$

En particular, tiene

$$\sqrt{3.98} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{0.98}{4} = 1.995 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4.05} \approx \tfrac{7}{4} + \tfrac{1.05}{4} = 2.0125$$

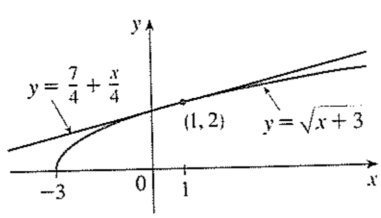


FIGURA 2

En la figura 2 se ilustra la aproximación lineal. En efecto, la aproximación de la recta tangente funciona para la función dada cuando x está cerca de 1. También que las aproximaciones son sobrestimaciones porque la recta tangente se encuentra por arriba de la curva.

Por supuesto, una calculadora podría dar aproximaciones para $\sqrt{3.98}$ y $\sqrt{4.05}$, pero la aproximación lineal da esa aproximación *sobre un intervalo completo.*

En la tabla siguiente se compara las estimaciones de la aproximación lineal del ejemplo con los valores reales. Advierta en esta tabla, y asimismo en la figura 2, que la aproximación de la recta tangente da buenas estimaciones cuando x está cerca de 1 pero la precisión de la aproximación disminuye cuando x está más lejos de 1.

	x	A partir de $L(x)$	Valor real
$\sqrt{3.9}$	0.9	1.975	1.97484176 . . .
$\sqrt{3.98}$	0.98	1.995	1.99499373 . . .
$\sqrt{4}$	1	2	2.00000000 . . .
$\sqrt{4.05}$	1.05	2.0125	2.01246117 . . .
$\sqrt{4.1}$	1.1	2.025	2.02484567 . . .
$\sqrt{5}$	2	2.25	2.23606797 . . .
$\sqrt{6}$	3	2.5	2.44948974 . . .

¿Qué tan buena es la aproximación obtenida en el ejemplo 2? El ejemplo siguiente muestra que usando una calculadora graficadora o una computadora es posible determinar un intervalo a lo largo del cual una aproximación lineal proporciona una precisión especificada.

EJEMPLO 1 ¿Para cuáles valores de x la aproximación lineal

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5? ¿Qué puede decir de una exactitud con una diferencia menor que 0.1?

SOLUCIÓN Una exactitud con una diferencia menor que 0.5 significa que las funciones deben diferir en menos de 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4} \right) \right| < 0.5$$

De modo equivalente podría escribir

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

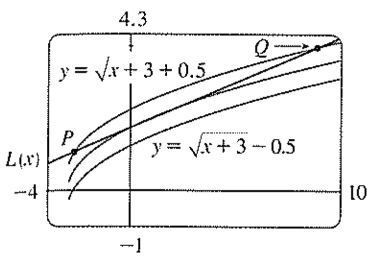


FIGURA 3

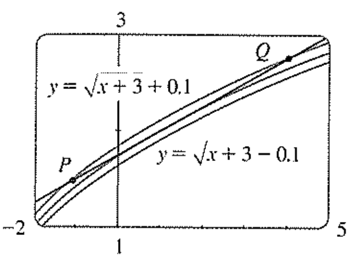


FIGURA 4

Con esto se expresa que la aproximación lineal debe encontrarse entre las curvas que se obtienen al desplazar la curva $y = \sqrt{x+3}$ hacia arriba y hacia abajo en una cantidad de 0.5. En la figura 3 se muestra la recta tangente $y = (7 + x)/4$ que interseca la curva superior $y = \sqrt{x+3} + 0.5$ en P y en Q. Al hacer un acercamiento y usar el cursor, estima que la coordenada x de P se aproxima a -2.66 y la coordenada x de Q es más o menos 8.66. Por esto, con base en la gráfica, la aproximación

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

es exacta con una diferencia menor que 0.5, cuando $-2.6 < x < 8.6$. (Se ha redondeado para quedar dentro del margen de seguridad.)

De manera análoga, en la figura 5 la aproximación es exacta con una diferencia menor que 0.1 cuando $-1.1 < x < 3.9$. □

APLICACIONES EN LA FÍSICA

Las aproximaciones lineales se usan con frecuencia en la física. Al analizar las consecuencias de una ecuación, a veces un físico necesita simplificar una función sustituyéndola con una aproximación lineal. Por ejemplo, al derivar una fórmula para el periodo de un péndulo, los libros de texto de física obtienen la expresión $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para la aceleración tangencial y luego sustituyen sen θ por θ haciendo la observación de que sen θ está muy cerca de θ si θ no es demasiado grande. [Véase, por ejemplo, *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), p. 431.] Puede comprobar que la linealización de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en $a = 0$ es $L(x) = x$ y así la aproximación lineal en 0 es

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

(véase el ejercicio 42). Por consiguiente, en efecto, la derivación de la fórmula para el periodo de un péndulo utiliza la aproximación a la recta tangente para la función seno.

Otro ejemplo se presenta en la teoría de la óptica donde los rayos de luz que llegan con ángulos bajos con relación al eje óptico se llaman *rayos paraxiales*. En la óptica paraxial (o gaussiana) tanto sen θ como cos θ se sustituyen con sus linealizaciones. En otras palabras, las aproximaciones lineales

$$\operatorname{sen} \theta \approx \theta \qquad \text{y} \qquad \cos \theta \approx 1$$

se usan porque θ está cerca de 0. Los resultados de los cálculos que se efectúan con estas aproximaciones se convierten en la herramienta teórica básica que se utiliza para diseñar lentes. [Véase *Optics*, 4a. edición, por Eugene Hecht (San Francisco: Addison Wesley, 2002), p. 154]

En la sección 11.11 aparecen varias aplicaciones de la idea de las aproximaciones lineales a la física.

DIFERENCIALES

Las ideas detrás de las aproximaciones lineales en ocasiones se formulan en la terminología y la notación de *diferenciales*. Si $y = f(x)$, donde f es una función derivable, entonces la **diferencial** dx es una variable independiente; esto es, dx es cualquier número real. La **diferencial** dy se define por lo tanto en términos de dx mediante la ecuación

Si $dx \neq 0$, puede dividir ambos lados de la ecuación 3 entre dx para obtener

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Antes ha visto ecuaciones similares, pero ahora el lado izquierdo puede interpretarse en forma genuina como una relación de diferenciales.

$$\boxed{3} \qquad dy = f'(x)\,dx$$

De modo que dy es una variable dependiente; depende de los valores de x y dx. Si a dx se le da un valor específico y x se considera como algún número específico en el dominio de f, en seguida se determina el valor numérico de dy.

En la figura 5 se muestra el significado geométrico de los diferenciales. Sean $P(x, f(x))$ y $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ puntos sobre la gráfica de f y sea $dx = \Delta x$. El cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

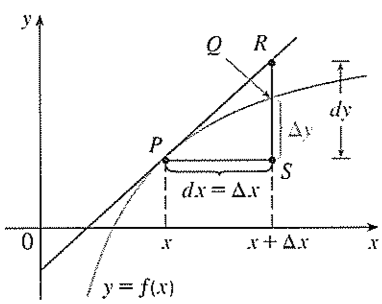


FIGURA 5

La pendiente de la recta tangente PR es la derivada $f'(x)$. Por esto, la distancia dirigida de S a R es $f'(x)\,dx = dy$. Por consiguiente, dy representa la cantidad que la recta tangente se levanta o cae (el cambio en la linealización), en tanto que Δy representa la cantidad que la curva $y = f(x)$ se levanta o cae cuando x cambia en una cantidad dx.

EJEMPLO 3 Compare los valores de Δy y dy si $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ y x cambia (a) de 2 a 2.05 y (b) de 2 a 2.01.

SOLUCIÓN

(a) Tiene

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$$

$$f(2.05) = (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625$$

$$\Delta y = f(2.05) - f(2) = 0.717625$$

En la figura 6 se ilustra la función del ejemplo 3 y una comparación de dy y Δy cuando $a = 2$. El rectángulo de visión es $[1.8, 2.5]$ por $[6, 18]$.

En general, $\qquad dy = f'(x)\,dx = (3x^2 + 2x - 2)\,dx$

Cuando $x = 2$ y $dx = \Delta x = 0.05$, esto se transforma en

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

(b) $$f(2.01) = (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701$$

$$\Delta y = f(2.01) - f(2) = 0.140701$$

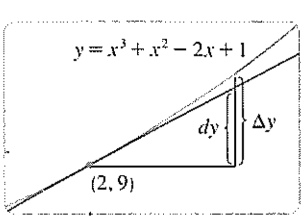


FIGURA 6

Cuando $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.01 = 0.14$$

Advierta, en el ejemplo 3, que la aproximación $\Delta y \approx dy$ mejora a medida que Δx se hace más pequeña. Observe también que es más fácil de calcular dy que Δy. En el caso de funciones más complicadas sería imposible calcular exactamente Δy. En estos casos, la aproximación mediante diferenciales es especialmente útil.

En la notación de diferenciales, la aproximación lineal (1) se puede escribir como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por ejemplo, para la función $f(x) = \sqrt{x + 3}$ del ejemplo 2, tiene

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Si $a = 1$ y $dx = \Delta x = 0.05$, después

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0.0125$$

y

$$\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$$

igual a lo que halló en el ejemplo 1.

El ejemplo final ilustra el uso de diferenciales al estimar los errores que ocurren debido a las mediciones aproximadas.

EJEMPLO 4 Se midió el radio de una esfera y se encontró que es 21 cm con un posible error en medición de cuanto mucho 0.05 cm. ¿Cuál es el error máximo al usar este valor del radio para calcular el volumen de la esfera?

SOLUCIÓN Si el radio de la esfera es r, por lo tanto el volumen es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Si el error en el valor medido de r se denota por medio de $dr = \Delta r$, luego el error correspondiente en el valor calculado de V es ΔV, el cual puede aproximarse mediante el diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Cuando $r = 21$ y $dr = 0.05$, esto se convierte en

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 \approx 277$$

El error máximo en el volumen calculado es de alrededor de 277 cm^3 □

NOTA Si bien el posible error en el ejemplo 4 puede parecer bastante grande, el **error relativo** ofrece un mejor panorama del error; se calcula dividiendo el error entre el volumen total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Por esto el error relativo en el volumen es aproximadamente tres veces el error relativo en el radio. En el ejemplo 4, el error relativo en el radio es $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ y produce un error relativo de alrededor de 0.007 en el volumen. Los errores pueden expresarse asimismo como **errores de porcentaje** de 0.24% en el radio y 0.7% en el volumen.

3.10 EJERCICIOS

1–4 Encuentre la linealización $L(x)$ de la función en a.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2, a = -1$
2. $f(x) = \ln x, \ a = 1$
3. $f(x) = \cos x, \quad a = \pi/2$
4. $f(x) = x^{3/4}, \ a = 16$

5. Encuentre la aproximación lineal a la función $f(x) = \sqrt{1-x}$ en $a = 0$ y úsela para hacer una aproximación a los números $\sqrt{0.9}$ y $\sqrt{0.99}$. Ilustre dibujando f y la recta tangente.

6. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $a = 0$ y aplíquela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0.95}$ y $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustre dibujando g y la recta tangente.

7–10 Compruebe la aproximación lineal dada en $a = 0$. A continuación determine los valores de x para los cuales la aproximación lineal es exacta hasta un valor menor que 0.1.

7. $\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x$
8. $\tan x \approx x$
9. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$
10. $e^x \approx 1 + x$

11–14 Calcule la diferencial de las funciones.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1+t^2}$
12. (a) $y = s/(1+2s)$ (b) $y = e^{-u}\cos u$
13. (a) $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ (b) $y = (1+r^3)^{-2}$
14. (a) $y = e^{\tan \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15–18 (a) Calcule la diferencial de dy y (b) evalúe dy para los valores dados de x y dx.

15. $y = e^{x/10}, \quad x = 0, \quad dx = 0.1$
16. $y = 1/(x+1), \quad x = 1, \quad dx = -0.01$
17. $y = \tan x, \quad x = \pi/4, \quad dx = -0.1$
18. $y = \cos x, \quad x = \pi/3, \quad dx = 0.05$

19–22 Calcule Δy y dy para los valores dados de x y $dx = \Delta x$. Luego elabore un esquema como el de la figura 5 en el que se muestren los segmentos lineales con longitudes dx, dy y Δy.

19. $y = 2x - x^2, \quad x = 2, \quad \Delta x = -0.4$
20. $y = \sqrt{x}, \quad x = 1, \quad \Delta x = 1$
21. $y = 2/x, \quad x = 4, \quad \Delta x = 1$
22. $y = e^x, \quad x = 0, \quad \Delta x = 0.5$

23–28 Aplique la aproximación lineal o bien las diferenciales para estimar el número dado.

23. $(2.001)^5$
24. $e^{-0.015}$
25. $(8.06)^{2/3}$
26. $1/1002$
27. $\tan 44°$
28. $\sqrt{99.8}$

29–31 Explique, en términos de aproximaciones lineales o diferenciales, por qué es razonable la aproximación.

29. $\sec 0.08 \approx 1$
30. $(1.01)^6 \approx 1.06$
31. $\ln 1.05 \approx 0.05$

32. Sean $f(x) = (x-1)^2 \qquad g(x) = e^{-2x}$

y $h(x) = 1 + \ln(1-2x)$

(a) Encuentre la linealización de f, g y h en $a = 0$. ¿Qué advierte? ¿Cómo explica lo que sucedió?

(b) Dibuje f, g y h y su aproximación lineal. ¿Para cuál función es mejor la aproximación lineal? Explique.

33. Se encontró que la arista de un cubo es 30 cm, con un error posible en la medición de 0.1 cm. Utilice diferenciales para estimar el error posible máximo, error relativo, y el porciento de error al calcular (a) el volumen del cubo y (b) el área superficial del cubo.

34. Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0.2 cm.
(a) Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.
(b) ¿Cuál es el error relativo? ¿Cuál es el error en porcentaje?

35. La circunferencia de una esfera se midió como 84 cm, con un error posible de 0.5 cm.
(a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?
(b) Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

36. Utilice diferenciales para estimar la cantidad de pintura necesaria para aplicar una mano de 0.05 cm de espesor a un domo hemisférico que tiene un diámetro de 50 m.

37. (a) Aplique diferenciales para determinar una fórmula para el volumen aproximado de un cascarón cilíndrico de altura h, radio interno r y espesor Δr.
(b) ¿Cuál es el error que hay al utilizar la fórmula del inciso (a)?

38. Se conocen un lado de un triángulo rectángulo de 20 cm de longitud y se mide el ángulo opuesto de 30°, con un error posible de $\pm 1°$.
(a) Use diferenciales para estimar el error máximo en el área superficial calculada. ¿Cuál es el error relativo?
(b) Use diferenciales para estimar el error máximo en el volumen calculado. ¿Cuál es el error relativo?

39. Si una corriente I pasa através de un resistor con resistencia R la ley de Ohm establece que la caida de voltaje es $V = RI$. Si V es constante y R se mide con un cierto error, aplique diferenciales para mostrar que el cálculo de I es aproximadamente el mismo (en magnitud) que el error relativo en R.

40. Cuando la sangre fluye por un vaso sanguíneo, el flujo F (el volumen de sangre por unidad de tiempo que corre por un punto dado) es proporcional a la cuarta potencia del radio R de ese vaso:

$$F = kR^4$$

(Ésta se conoce como ley de Poiseuille; en la sección 8.4 se muestra por qué es verdadera.) Una arteria parcialmente obstruida se puede expandir por medio de una operación llamada angioplastia, en la cual un catéter provisto de un globo en la punta se infla dentro del vaso con el fin de ensancharlo y restituir el flujo sanguíneo normal.

Demuestre que el cambio relativo en F es alrededor de cuatro veces el cambio relativo en R. ¿Cómo afectará un aumento del 5% en el radio al flujo de sangre?

41. Deduzca las reglas siguientes para trabajar con diferenciales, donde c es una constante y u y v son funciones de x).

(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$

(b) $d(u + v) = du + dv$ (b) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

(c) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (b) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. En la página 431 de *Physics: Calculus*, 2a. edición, por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2000), mientras se deriva la fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para el periodo de un péndulo de duración L, el autor obtiene la ecuación $a_T = -g\,\text{sen}\,\theta$ para la aceleración tangencial del breve movimiento del péndulo. Luego dice "para ángulos pequeños, el valor de θ en radianes está muy cerca del valor de sen θ; difieren menos que 2% hasta alrededor de 20°".

(a) Compruebe la aproximación lineal en 0 para la función seno:

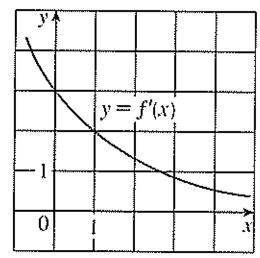
$$\text{sen}\,x \approx x$$

(b) Use un dispositivo graficador para determinar los valores de x para los cuales sen x y x difieren menos de 2%. Enseguida compruebe la afirmación de Hecht convirtiendo de radianes a grados.

43. Suponga que la única información acerca de una función f es que $f(1) = 5$ y la gráfica de su *derivada* es como se ilustra.

(a) Use una aproximación lineal para estimar $f(0.9)$ y $f(1.1)$.

(b) ¿Sus estimaciones para el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.



44. Suponga que no tiene una fórmula para $g(x)$ pero sabe que $g(2) = -4$ y $g'(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ para toda x.

(a) Use una aproximación lineal para estimar $g(1.95)$ y $g(2.05)$.

(b) ¿Sus estimaciones para el inciso (a) son demasiado grandes o demasiado pequeñas? Explique.

PROYECTO DE LABORATORIO — POLINOMIOS DE TAYLOR

La aproximación de la recta tangente $L(x)$ es la mejor aproximación de primer grado (lineal) a $f(x)$, cerca de $x = a$, porque $f(x)$ y $L(x)$ tienen la misma relación de cambio (derivada) en a. Para tener una aproximación mejor que una lineal, intente una aproximación de segundo grado (cuadrática) $P(x)$. En otras palabras, aproxime una curva mediante una parábola en lugar de por una recta. Para tener la seguridad de que la aproximación es buena, estipule lo siguiente:

(i) $P(a) = f(a)$ (P y f deben tener el mismo valor en a.)

(ii) $P'(a) = f'(a)$ (P y f deben tener la misma relación de cambio en a.)

(iii) $P''(a) = f''(a)$ (Las pendientes de P y f deben tener la misma relación de cambio en a.)

1. Encuentre la aproximación cuadrática $P(x) = A + Bx + Cx^2$ para la función $f(x) = \cos x$, que satisfaga las condiciones (i), (ii) y (iii), con $a = 0$. Dibuje P, f y la aproximación lineal $L(x) = 1$, en una pantalla común. Comente cuán bien las funciones P y L se aproximan a f.

2. Determine los valores de x para los que la aproximación cuadrática $f(x) = P(x)$ del problema 1 es exacta con una diferencia menor que 0.1. [*Sugerencia*: Dibuje $y = P(x)$, $y = \cos x - 0.1$ y $y = \cos x + 0.1$ en una pantalla común.]

3. Para obtener una aproximación de una función f mediante una función cuadrática P cerca de un número a, lo mejor es escribir P en la forma

$$P(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2$$

Demuestre que la función cuadrática que satisface las condiciones (i), (ii) y (iii) es

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x - a)^2$$

4. Encuentre la aproximación cuadrática para $f(x) = \sqrt{x + 3}$, cerca de $a = 1$. Trace las gráficas de f, la aproximación cuadrática y la aproximación lineal del ejemplo 2 de la sección 3.10 en una pantalla común. ¿Qué podría concluir?

5. En lugar de quedar conforme con una aproximación lineal o una cuadrática para $f(x)$, cerca de $x = a$, intente hallar mejores aproximaciones, con polinomios de grado más alto. Busque un polinomio de n-ésimo grado

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \cdots + c_n(x - a)^n$$

tal que T_n y sus n primeras derivadas tengan los mismos valores en $x = a$ como f y sus n primeras derivadas. Derive repetidas veces y haga $x = a$, para demostrar que estas condiciones se satisfacen si $c_0 = f(a)$, $c_1 = f'(a)$, $c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$ y, en general,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

donde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot k$. El polinomio resultante

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

se llama **polinomio de Taylor de n-ésimo grado, de f, con centro en a.**

6. Encuentre el polinomio de Taylor de octavo grado, con centro en $a = 0$, para la función $f(x) = \cos x$. Dibuje f y los polinomios de Taylor T_2, T_4, T_6, T_8, en rectángulos de visualización $[-5, 5]$ por $[-1.4, 1.4]$; comente cuán bien se aproximan a f.

3.11 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Ciertas combinaciones de las funciones exponenciales e^x y e^{-x} surgen tan a menudo en la matemática y sus aplicaciones que merecen recibir un nombre especial. En muchos aspectos son similares a las funciones trigonométricas y tienen la misma relación con la hipérbola que las funciones trigonométricas tienen con la circunferencia. Por esta razón se les llama en forma colectiva **funciones hiperbólicas** y de manera individual se les conoce como **seno hiperbólico**, **coseno hiperbólico** y así sucesivamente.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} \qquad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$$

Las gráficas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico se pueden delinear mediante suma gráfica como en las figuras 1 y 2.

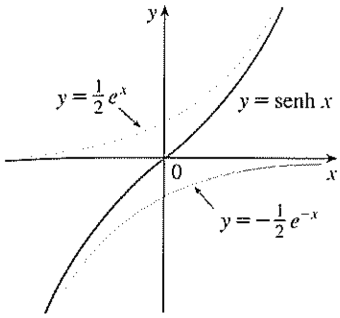


FIGURA 1
$y = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$

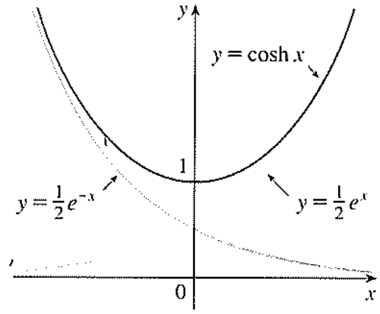


FIGURA 2
$y = \cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

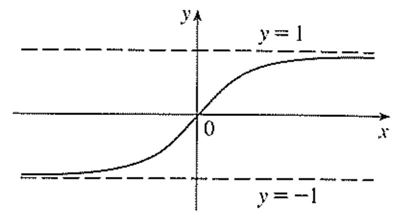


FIGURA 3
$y = \tanh x$

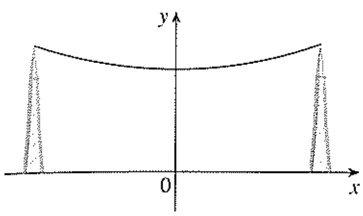


FIGURA 4
Catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$

Observe que el dominio de senh es $\mathbb{R}$ y el intervalo es $\mathbb{R}$, pero que cosh tiene por dominio $\mathbb{R}$ y intervalo $[1, \infty)$. En la figura 3 se muestra la gráfica de tanh. Ésta tiene las asíntotas horizontales $y = \pm 1$. (Véase ejercicio 23.)

Algunos de los usos matemáticos de las funciones hiperbólicas se tratan en el capítulo 7. Las aplicaciones en la ciencia y la ingeniería se tienen siempre que una entidad, como luz, velocidad, electricidad o radiactividad se absorbe o se extingue en forma gradual, puesto que el decaimiento se puede representar mediante funciones hiperbólicas. La aplicación más famosa es el uso del coseno hiperbólico para describir la forma de un cable colgante. Se puede demostrar que si un cable pesado y flexible (como los que se usan para las líneas telefónicas o eléctricas) se tiende entre dos puntos a la misma altura, en tal caso el cable toma la forma de una curva con ecuación $y = c + a\cosh(x/a)$ que se denomina *catenaria* (véase figura 4). (Esta palabra proviene de la palabra latina *catena* que significa "cadena".)

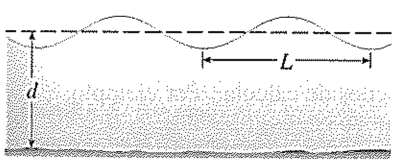


FIGURA 5
Ola en el mar idealizada

Otras aplicación de las funciones hiperbólicas suceden en la descripción de los olas del mar: La velocidad de una ola con longitud L que se traslada através de un cuerpo de agua con profundidad d se modela por la función

$$v \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

donde g es la aceleración debido a la gravedad (véase figura 5 y ejercicio 49.)

Las funciones hiperbólicas satisfacen un número de identidades que son similares a las muy bien conocidas identidades trigonométricas. A continuación se listan algunas de ellas y la mayoría de las demostraciones se deja para los ejercicios.

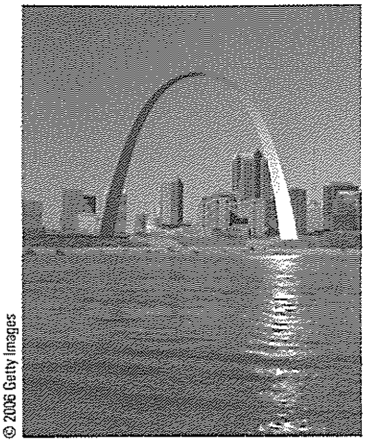
IDENTIDADES HIPERBÓLICAS

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x \qquad \cosh(-x) = \cosh x$$

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

$$\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$$



El arco Gateway en St. Louis se diseñó aplicando una función coseno hiperbólico (ejercicio 48).

V EJEMPLO 1 Demuestre (a) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ y (b) $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.

SOLUCIÓN

(a)
$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

(b) Empiece con la identidad demostrada en el inciso (a):

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

Si divide los dos lados por $\cosh^2 x$, obtiene

$$1 - \frac{\operatorname{senh}^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

o bien,
$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$ □

La identidad demostrada en el ejemplo 1(a) proporciona una pista sobre el nombre de funciones "hiperbólicas":

Si t es cualquier número real, después el punto $P(\cos t, \operatorname{sen} t)$ queda en el círculo unitario $x^2 + y^2 = 1$ porque $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$. En efecto, t se puede interpretar como la medida en radianes de $\angle POQ$ de la figura 6. Ésta es la razón por la que las funciones trigonométricas se denominan algunas veces funciones *circulares*.

De manera similar, si t es cualquier número real, en seguida el punto $P(\cosh t, \operatorname{senh} t)$ queda en la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ porque $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$ y $\cosh t \geqslant 1$. Pero ahora t no representa la medida de un ángulo. Resulta que t representa el doble del área del sector hiperbólico sombreado de la figura 7, de la misma manera como en el caso trigonométrico t representa el doble del área del sector circular sombreado en la figura 6.

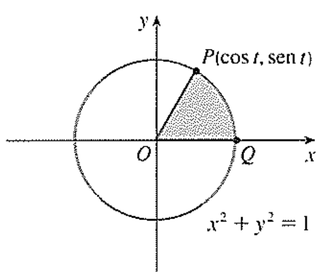


FIGURA 6

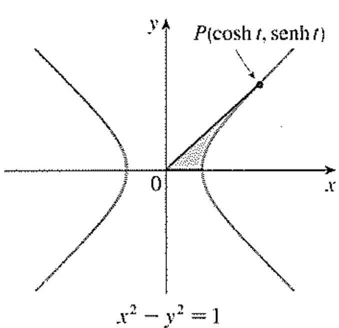


FIGURA 7

Las derivadas de las funciones hiperbólicas son fáciles de calcular. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

Se da una lista de las fórmulas de derivación de las funciones hiperbólicas en la tabla 1 siguiente. El resto de las demostraciones se dejan como ejercicios. Observe la similitud con las fórmulas de derivación de las funciones trigonométricas, pero advierta que los signos son diferentes en algunos casos.

1 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} x) = \cosh x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \operatorname{senh} x \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

EJEMPLO 2 Cualquiera de estas reglas de derivación se puede combinar con la regla de la cadena. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(\cosh\sqrt{x}) = \operatorname{senh}\sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\operatorname{senh}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$ □

FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

De acuerdo con las figuras 1 y 3, senh y tanh son funciones uno a uno por lo que tienen funciones inversas denotadas por senh^{-1} y $\tanh^{-1}$. En la figura 2 se observa que cosh no es uno a uno, sino que cuando queda restringido al dominio $[0, \infty)$ se transforma en uno a uno. La función coseno hiperbólico inversa se define como la inversa de esta función restringida.

2

$$\begin{aligned} y = \operatorname{senh}^{-1}x &\iff \operatorname{senh} y = x \\ y = \cosh^{-1}x &\iff \cosh y = x \quad \text{y} \quad y \geq 0 \\ y = \tanh^{-1}x &\iff \tanh y = x \end{aligned}$$

Las funciones hiperbólicas inversas que faltan se definen de manera similar (véase ejercicio 28).

Las funciones senh^{-1}, $\cosh^{-1}$ y $\tanh^{-1}$ se grafican en las figuras 8, 9, y 10 con ayuda de las figuras 1, 2 y 3.

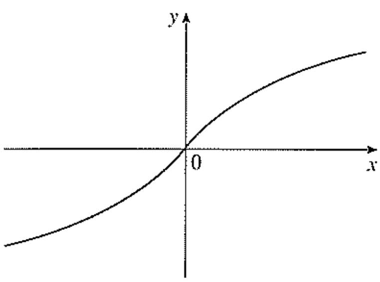


FIGURA 8 $y = \operatorname{senh}^{-1}x$
dominio $= \mathbb{R}$ rango $= \mathbb{R}$

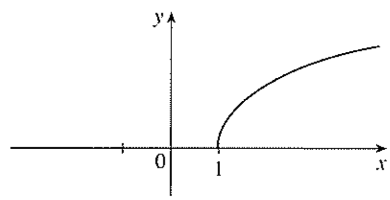


FIGURA 9 $y = \cosh^{-1}x$
dominio $= [1, \infty)$ rango $= [0, \infty)$

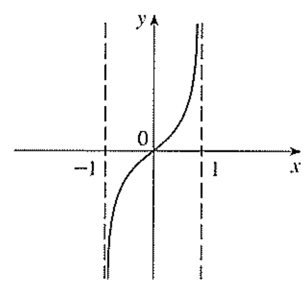


FIGURA 10 $y = \tanh^{-1}x$
dominio $= (-1, 1)$ rango $= \mathbb{R}$

Puesto que las funciones hiperbólicas se definen en términos de las funciones exponenciales, no sorprende enterarse que las funciones hiperbólicas inversas se pueden expresar en términos de logaritmos. En particular, tiene que:

■ La fórmula 3 se demuestra en el ejemplo 3. En los ejercicios 26 y 27 se piden las demostraciones de las fórmulas 4 y 5.

3 $$\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

4 $$\cosh^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad x \geq 1$$

5 $$\tanh^{-1}x = \tfrac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad -1 < x < 1$$

EJEMPLO 3 Demuestre que $\operatorname{senh}^{-1}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

SOLUCIÓN Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. En tal caso

$$x = \operatorname{senh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

por lo que $$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

o bien, si multiplica por e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Esto es ni más ni menos que una ecuación cuadrática en e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Observe que $e^y > 0$, pero $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (porque $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Por esto, el signo menos es inadmisible y

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

Por lo tanto, $$y = \ln(e^y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

(Refiérase al ejercicio 25 donde se ilustra otro método.)

[6] DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2} \qquad \frac{d}{dx}(\coth^{-1}x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Observe que, al parecer, las fórmulas para las derivadas de $\tanh^{-1}x$ y $\coth^{-1}x$ son idénticas, pero los dominios de estas funciones no tienen números comunes: $\tanh^{-1}x$ se define por $|x| < 1$, mientras que $\coth^{-1}x$ se define por $|x| > 1$.

Las funciones hiperbólicas inversas son derivables porque las funciones hiperbólicas son derivables. Las fórmulas de la tabla 6 se pueden demostrar por el método de las funciones inversas o mediante la derivación de las fórmulas 3, 4 y 5.

V EJEMPLO 4 Demuestre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \operatorname{senh}^{-1}x$. Por lo tanto $\operatorname{senh} y = x$. Si deriva esta ecuación en forma implícita con respecto a x, obtiene

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Puesto que $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ y $\cosh y \geqslant 0$, tiene $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$, de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

SOLUCIÓN 2 De acuerdo con la ecuación 3 (demostrada en el ejemplo 3) obtiene

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1}x) = \frac{d}{dx}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$ □

EJEMPLO 5 Determine $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)]$.

SOLUCIÓN Con ayuda de la tabla 6 y de la regla de la cadena obtiene

$$\frac{d}{dx}[\tanh^{-1}(\operatorname{sen} x)] = \frac{1}{1-(\operatorname{sen} x)^2}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x)$$

$$= \frac{1}{1-\operatorname{sen}^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \sec x$$ □

3.11 EJERCICIOS

1–6 Calcule el valor numérico de cada expresión.

1. (a) senh 0 (b) cosh 0

2. (a) tanh 0 (b) tanh 1

3. (a) senh(ln 2) (b) senh 2

4. (a) cosh 3 (b) cosh(ln 3)

5. (a) sech 0 (b) $\cosh^{-1} 1$

6. (a) senh 1 (b) $\operatorname{senh}^{-1} 1$

7–19 Demuestre la identidad

7. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$
(Esto demuestra que senh es una función impar.)

8. $\cosh(-x) = \cosh x$
(Esto demuestra que cosh es una función par.)

9. $\cosh x + \operatorname{senh} x = e^x$

10. $\cosh x - \operatorname{senh} x = e^{-x}$

11. $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

12. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

13. $\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

14. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

15. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

16. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

17. $\tanh(\ln x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. $\dfrac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = e^{2x}$

19. $(\cosh x + \operatorname{senh} x)^n = \cosh nx + \operatorname{senh} nx$
(n es un número real)

20. Si $\tanh x = \frac{12}{13}$, calcular los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

21. Si $\cosh x = \frac{5}{3}$ y $x > 0$, calcular los valores de las otras funciones hiperbólicas en x.

22. (a) Utilice las gráficas de senh, cosh y tanh de las figuras 1 a 3 para dibujar las gráficas de csch, sech y coth.

(b) Compruebe las gráficas que trazó en el inciso (a) mediante una calculadora graficadora o de una computadora.

23. Aplique las definiciones de las funciones hiperbólicas para determinar cada uno de los límites siguientes.

(a) $\lim_{x \to \infty} \tanh x$ (b) $\lim_{x \to -\infty} \tanh x$

(c) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{senh} x$ (d) $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{senh} x$

(e) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sech} x$ (f) $\lim_{x \to \infty} \coth x$

(g) $\lim_{x \to 0^+} \coth x$ (h) $\lim_{x \to 0^-} \coth x$

(i) $\lim_{x \to -\infty} \operatorname{csch} x$

24. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 1 para el caso de las derivadas de las funciones (a) cosh, (b) tanh, (c) csch, (d) sech y (e) coth.

25. Encuentre otra solución para el ejemplo 3 haciendo $y = \operatorname{senh}^{-1}x$ y luego usando el ejercicio 9 y el ejemplo 1(a) en donde y reemplaza a x.

26. Demuestre la ecuación 4.

27. Demuestre la ecuación 5 aplicando (a) el método del ejemplo 3 y (b) el ejercicio 18 en donde y reemplaza a x.

28. Para cada una de las funciones siguientes (i) proporcione una definición como la de (2), (ii) trace la gráfica y (iii) encuentre una fórmula similar a la ecuación 3.
(a) csch^{-1} (b) sech^{-1} (c) $\coth^{-1}$

29. Demuestre las fórmulas dadas en la tabla 6 para las derivadas de las funciones siguientes.
(a) $\cosh^{-1}$ (b) $\tanh^{-1}$ (c) csch^{-1}
(d) sech^{-1} (e) $\coth^{-1}$

30–47 Encuentre la derivada.

30. $f(x) = \tanh(1 + e^{2x})$ **31.** $f(x) = x \operatorname{senh} x - \cosh x$

32. $g(x) = \cosh(\ln x)$ **33.** $h(x) = \ln(\cosh x)$

34. $y = x \coth(1 + x^2)$ **35.** $y = e^{\cosh 3x}$

36. $f(t) = \operatorname{csch} t(1 - \ln \operatorname{csch} t)$ **37.** $f(t) = \operatorname{sech}^2(e^t)$

38. $y = \operatorname{senh}(\cosh x)$ **39.** $y = \arctan(\tanh x)$

40. $x = \sqrt[4]{\dfrac{1 + \tanh x}{1 - \tanh x}}$ **41.** $G(x) = \dfrac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}$

42. $y = x^2 \operatorname{senh}^{-1}(2x)$ **43.** $y = \tanh^{-1}\sqrt{x}$

44. $y = x \tanh^{-1}x + \ln \sqrt{1 - x^2}$

45. $y = x \operatorname{senh}^{-1}(x/3) - \sqrt{9 + x^2}$

46. $y = \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{1 - x^2}, \quad x > 0$

47. $y = \coth^{-1}\sqrt{x^2 + 1}$

---

48. El Arco Gateway en St. Louis fue diseñado por Eero Saarinen y fue construido empleando la ecuación.

$$y = 211.49 - 20.96 \cosh 0.03291765x$$

para la curva central del acrco. Donde x y y se miden en metros y $|x| \leq 91.20$.
(a) Grafique la curva central.
(b) ¿Cuál es la altura del arco en su centro?
(c) ¿En qué punto la altura es de 100 m?
(d) ¿Cuál es la pendiente del arco en el punto del inciso (c)?

49. Si las olas con longitud L se mueven con velocidad v en un cuerpo de agua con profundidad d en tal caso.

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$$

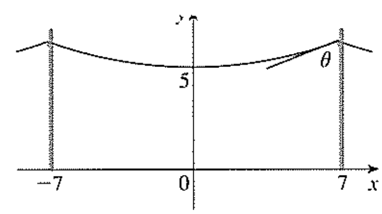
Donde g es la aceleración debida a la gravedad. (Véase figura 5.) Explique por que la aproximación

$$v \approx \sqrt{\frac{gL}{2\pi}}$$

es apropiada en aguas profundas.

50. Un cable flexible siempre forma una catenaria $y = c + a\cosh(x/a)$, donde c y a son constantes y $a > 0$ (véase figura 4 y ejercicio 50). Grafique varios miembros de la familia de las funciones $y = a\cosh(x/a)$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando a varía?

51. Un cable de teléfono cuelga entre dos postes que están separados entre sí 14 metros y forma una catenaria $y = 20\cosh(x/20) - 15$, donde x y y se miden en metros.
(a) Encuentre la pendiente de esta curva donde se encuentra con el poste derecho.
(b) Calcule el ángulo θ entre el cable y el poste.



Mediante los principios de la física se puede demostrar que lo un cable cuelga entre dos postes toma la forma de una $y = f(x)$ que cumple con la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

donde ρ es la densidad lineal del cable, g es la aceleración de la gravedad y T es la tensión del cable en su punto más bajo. El sistema coordenado se elige en forma adecuada. Compruebe que la función

$$y = f(x) = \frac{T}{\rho g}\cosh\left(\frac{\rho g x}{T}\right)$$

es una solución de esta ecuación diferencial.

53. (a) Demuestre que cualquier función de la forma

$$y = A \operatorname{senh} mx + B \cosh mx$$

cumple con la ecuación diferencial $y'' = m^2 y$.

(b) Determine $y = y(x)$ tal que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$, y $y'(0) = 6$.

54. Evalúe $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$.

55. ¿En qué punto de la curva $y = \cosh x$ la tangente tiene pendiente 1?

56. Si $x = \ln(\sec \theta + \tan \theta)$, demuestre que $\sec \theta = \cosh x$.

57. Demuestre que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces existen números α y β tales que $ae^x + be^{-x}$ es igual a $\alpha \operatorname{senh}(x + \beta)$ o a $\alpha \cosh(x + \beta)$. En otras palabras, casi toda función de la forma $f(x) = ae^x + be^{-x}$ es una función seno hiperbólico o coseno hiperbólico desplazada o estirada.

3 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Exprese cada una de las siguientes reglas de derivación, tanto en símbolos como en palabras.

(a) Regla de la potencia (b) Regla del múltiplo constante
(c) Regla de la suma (d) Regla de la diferencia
(e) Regla del producto (f) Regla del cociente
(g) Regla de la cadena

2. Proporcione las derivadas de cada función

(a) $y = x^n$ (b) $y = e^x$ (c) $y = a^x$
(d) $y = \ln x$ (e) $y = \log_a x$ (f) $y = \operatorname{sen} x$
(g) $y = \cos x$ (h) $y = \tan x$ (i) $y = \csc x$
(j) $y = \sec x$ (k) $y = \cot x$ (l) $y = \operatorname{sen}^{-1} x$
(m) $y = \cos^{-1} x$ (n) $y = \tan^{-1} x$ (o) $y = \operatorname{senh} x$
(p) $y = \cosh x$ (q) $y = \tanh x$ (r) $y = \operatorname{senh}^{-1} x$
(s) $y = \cosh^{-1} x$ (t) $y = \tanh^{-1} x$

3. (a) ¿Cómo se define el número e?
(b) Exprese e como un límite.
(c) ¿Por qué en cálculo se usa la función exponencial natural, $y = e^x$, con más frecuencia que las demás funciones exponenciales, $y = a^x$?
(d) ¿Por qué en el cálculo se usa más la función logarítmica natural, $y = \ln x$ que las demás funciones logarítmicas, $y = \log_a x$?

4. (a) Explique cómo funciona la derivación implícita.
(b) Explique cómo funciona la derivación logarítmica.

5. (a) Escriba una expresión para la linealización de f en a.
(b) Si $y = f(x)$, escriba un expresión para la diferencial dy.
(c) Si $dx = \Delta x$, dibuje un esquema para mostrar el significado geométrico de Δy y dy.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o mencione un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f y g son derivables, por lo tanto

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

2. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g'(x)$$

3. Si f y g son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

4. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

5. Si f es derivable, entonces $\dfrac{d}{dx} f(\sqrt{x}) = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{x}}$.

6. Si $y = e^2$, entonces $y' = 2e$.

7. $\dfrac{d}{dx}(10^x) = x10^{x-1}$

8. $\dfrac{d}{dx}(\ln 10) = \dfrac{1}{10}$

9. $\dfrac{d}{dx}(\tan^2 x) = \dfrac{d}{dx}(\sec^2 x)$

10. $\dfrac{d}{dx}|x^2 + x| = |2x + 1|$

11. Si $g(x) = x^5$, entonces $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = 80$.

12. Una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en $(-2, 4)$ es $y - 4 = 2x(x + 2)$.

EJERCICIOS

1–50 Calcule y'.

1. $y = (x^4 - 3x^2 + 5)^3$

2. $y = \cos(\tan x)$

3. $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$

4. $y = \dfrac{3x - 2}{\sqrt{2x + 1}}$

5. $y = 2x\sqrt{x^2 + 1}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x^2}$

7. $y = e^{\operatorname{sen} 2\theta}$

8. $y = e^{-t}(t^2 - 2t + 2)$

9. $y = \dfrac{t}{1 - t^2}$

10. $y = e^{mx} \cos nx$

11. $y = \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$

12. $y = (\operatorname{arcsen} 2x)^2$

13. $y = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

14. $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

15. $xy^4 + x^2y = x + 3y$

16. $y = \ln(\csc 5x)$

17. $y = \dfrac{\sec 2\theta}{1 + \tan 2\theta}$

18. $x^2 \cos y + \operatorname{sen} 2y = xy$

19. $y = e^{cx}(c \operatorname{sen} x - \cos x)$

20. $y = \ln(x^2 e^x)$

21. $y = e^{e^x}$

22. $y = \sec(1 + x^2)$

23. $y = (1 - x^{-1})^{-1}$

24. $y = 1/\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}$

25. $\operatorname{sen}(xy) = x^2 - y$

26. $y = \sqrt{\operatorname{sen} \sqrt{x}}$

27. $y = \log_5(1 + 2x)$

28. $y = (\cos x)^x$

29. $y = \ln \operatorname{sen} x - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x$

30. $y = \dfrac{(x^2 + 1)^4}{(2x + 1)^3(3x - 1)^5}$

31. $y = x \tan^{-1}(4x)$

32. $y = e^{\cos x} + \cos(e^x)$

33. $y = \ln|\sec 5x + \tan 5x|$

34. $y = 10^{\tan \pi\theta}$

35. $y = \cot(3x^2 + 5)$

36. $y = \sqrt{t \ln(t^4)}$

37. $y = \operatorname{sen}\left(\tan \sqrt{1 + x^3}\right)$

38. $y = \arctan\left(\operatorname{arcsen} \sqrt{x}\right)$

39. $y = \tan^2(\operatorname{sen} \theta)$

40. $xe^y = y - 1$

41. $y = \dfrac{\sqrt{x + 1}\,(2 - x)^5}{(x + 3)^7}$

42. $y = \dfrac{(x + \lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$

43. $y = x \operatorname{senh}(x^2)$

44. $y = \dfrac{\operatorname{sen} mx}{x}$

45. $y = \ln(\cosh 3x)$

46. $y = \ln\left|\dfrac{x^2 - 4}{2x + 5}\right|$

47. $y = \cosh^{-1}(\operatorname{senh} x)$

48. $y = x \tanh^{-1}\sqrt{x}$

49. $y = \cos\left(e^{\sqrt{\tan 3x}}\right)$

50. $y = \operatorname{sen}^2\left(\cos\sqrt{\operatorname{sen} \pi x}\right)$

---

51. Si $f(t) = \sqrt{4t + 1}$, encuentre $f''(2)$.

52. Si $g(\theta) = \theta \operatorname{sen} \theta$, halle $g''(\pi/6)$.

53. Encuentre y'' si $x^6 + y^6 = 1$.

54. Determine $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = 1/(2 - x)$.

55. Aplique la inducción matemática (página 77) para demostrar que si $f(x) = xe^x$, entonces $f^{(n)}(x) = (x + n)e^x$.

56. Evalúe $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t^3}{\tan^3(2t)}$.

57–59 Encuentre ecuaciones de la recta tangente a la curva en el punto dado.

57. $y = 4 \operatorname{sen}^2 x$, $(\pi/6, 1)$

58. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, $(0, -1)$

59. $y = \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen} x}$, $(0, 1)$

60–61 Hallar ecuaciones de línea tangente y normal a la curva en el punto que se especifica.

60. $x^2 + 4xy + y^2 = 13$, $(2, 1)$

61. $y = (2 + x)e^{-x}$, $(0, 2)$

---

62. Si $f(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$, halle $f'(x)$. Dibuje f y f' en la misma pantalla y haga comentarios.

63. (a) Si $f(x) = x\sqrt{5 - x}$, halle $f'(x)$.
(b) Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x\sqrt{5 - x}$ en los puntos $(1, 2)$ y $(4, 4)$.
(c) Ilustre el inciso (b) dibujando la curva y las rectas tangentes en la misma pantalla.
(d) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y f'.

64. (a) Si $f(x) = 4x - \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$, encuentre f' y f''.
(b) Verifique si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f, f' y f''.

65. ¿En qué puntos de la curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, la tangente es una recta horizontal?

66. Encuentre los puntos sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ donde la recta tangente tiene pendiente 1.

67. Si $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$, demuestre que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x - c}$$

68. (a) Al derivar la fórmula del coseno del ángulo doble

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

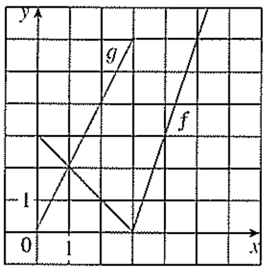
obtenga la fórmula correspondiente para la función seno.
(b) Al derivar la fórmula de la adición

$$\operatorname{sen}(x + a) = \operatorname{sen} x \cos a + \cos x \operatorname{sen} a$$

obtenga la fórmula de la adición para la función coseno.

69. Suponga que $h(x) = f(g)g(x)$ y $F(x) = f(g(x))$, donde $f(2) = 3$, $g(2) = 5$, $g'(2) = 4$, $f'(2) = -2$ y $f'(5) = 11$. Encuentre (a) $h'(2)$ y (b) $F'(2)$.

70. Si f y g son las funciones cuyas gráficas se muestran, sea $P(x) = f(x)g(x)$, $Q(x) = f(x)/g(x)$ y $C(x) = f(g(x))$. Encuentre (a) $P'(2)$, (b) $Q'(2)$ y (c) $C'(2)$.



71–78 Encuentre f' en términos de g'.

71. $f(x) = x^2g(x)$

72. $f(x) = g(x^2)$

73. $f(x) = [g(x)]^2$

74. $f(x) = g(g(x))$

75. $f(x) = g(e^x)$

76. $f(x) = e^{g(x)}$

77. $f(x) = \ln|g(x)|$

78. $f(x) = g(\ln x)$

79–81 Halle h' en términos de f' y g'.

79. $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x) + g(x)}$

80. $h(x) = \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$

81. $h(x) = f(g(\text{sen } 4x))$

---

82. (a) Dibuje la función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ en el rectángulo de visualización $[0, 8]$ por $[-2, 8]$.
(b) ¿En qué intervalo es más grande la razón de cambio promedio: $[1, 2]$ o $[2, 3]$?
(c) ¿En qué valor de x es más grande la razón de cambio instantánea: $x = 2$ o $x = 5$?
(d) Compruebe sus estimaciones visuales del inciso (c) calculando $f'(x)$ y comparando los valores numéricos de $f'(2)$ y $f'(5)$.

83. ¿En qué punto sobre la curva $y = [\ln(x + 4)]^2$ es la tangente horizontal?

84. (a) Encuentre una ecuación de la tangente a la curva $y = e^x$ que sea paralela a la recta $x - 4y = 1$.
(b) Encuentre una ecuación para la tangente de la curva $y = e^x$ que pase a través del origen.

85. Halle una parábola $y = ax^2 + bx + c$ que pase por el punto $(1, 4)$ y cuyas rectas tangentes en $x = -1$ y $x = 5$ tengan pendientes 6 y -2 respectivamente.

86. La función $C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$, donde a, b y K son constantes positivas y $b > a$, se usa para modelar la concentración en el instante t de un medicamento que se inyecta en el torrente sanguíneo.
(a) Demuestre que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.
(b) Encuentre $C'(t)$, la rapidez con que el medicamento se disipa en la circulación.
(c) ¿Cuándo es esta rapidez igual a 0?

87. Una ecuación de movimiento de la forma $s = Ae^{-ct}\cos(\omega t + \delta)$ representa oscilación amortiguada de un objeto. Encuentre la velocidad y la aceleración del objeto.

88. Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de modo que su coordenada en el instante t es $x = \sqrt{b^2 + c^2t^2}$, $t \geq 0$, donde b y c son constantes positivas.
(a) Encuentre las funciones de aceleración y de velocidad.
(b) Demuestre que la partícula siempre se desplaza en dirección positiva.

89. Una partícula se desplaza sobre una recta vertical de manera que su ordenada en el instante t es $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.
(a) Encuentre las funciones de aceleración y de velocidad.
(b) ¿Cuándo se mueve hacia arriba la partícula y cuándo hacia abajo?
(c) Halle la distancia a lo largo de la cual se desplaza la partícula en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 3$.
(d) Grafique las funciones posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 3$.
(e) ¿Cuándo aumenta su rapidez la partícula? ¿Cuándo disminuye su rapidez $0 \leq t \leq 3$?

90. El volumen de un cono circular recto es $V = \pi r^2h/3$, en donde r es el radio de la base y h es la altura.
(a) Halle la proporción de cambio del volumen con respecto a la altura, si el radio es constante.
(b) Encuentre la proporción de cambio del volumen con respecto al radio, si la altura es constante.

91. La masa de una parte de un alambre es $x(1 + \sqrt{x})$ kilogramos, donde x se mide en metros desde uno de los extremos del alambre. Encuentre la densidad lineal del alambre cuando $x = 4$ m.

92. El costo, en dólares, de producir x unidades de un artículo es

$$C(x) = 920 + 2x - 0.02x^2 + 0.00007x^3$$

(a) Encuentre la función de costo marginal.
(b) Halle $C'(100)$ y explique su significado.
(c) Compare $C'(100)$ con el costo para producir el artículo 101.

93. Inicialmente un cultivo de bacterias contiene 200 células y crecen con una razón porporcional a su tamaño. Después de media hora la población se ha incrementado a 360 células
(a) Establecer el número de bacterias después de t horas.
(b) Calcular el número de bacterias después de 4 horas.
(c) Encontrar la rapidez de crecimiento después de 4 horas.
(d) ¿Cuándo la población alcanzá 10 000?

94. El cobalto-60 tiene una vida media de 5.24 años.
(a) Hallar la masa que queda de una muestra de 100 mg después de 20 años.
(b) ¿Cuánto tardaría la masa en decaer a 1 mg?

95. Sea $C(t)$ la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. Cuando el cuerpo elimina el medicamento, $C(t)$ disminuye con una rapidez que es proporcional a la cantidad de medicamento que está presente en el tiempo t. En estos términos $C'(t) = -kC(t)$, donde k es un número positivo o denominado *constante de eliminación* del medicamento.
(a) Si C_0 es la concentración en el tiempo $t = 0$, hallar la concentración en el tiempo t.
(b) Si el cuerpo elimina la mitad del medicamento en 30 horas, ¿cuánto tiempo transcurre para eliminar el 90% de medicamento.

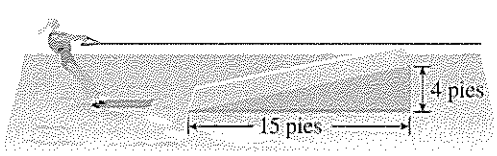
96. Una taza con chocolate caliente tiene una temperatura de 80°C en una habitación que se mantiene en 20°C. Después de media hora el chocolate caliente se enfría a 60°C.
(a) ¿Cuál es la temperatura del chocolate después de otra media hora.
(b) ¿Cuándo se enfriará el chocolate a 40°C?

97. El volumen de un cubo se incrementa a razón de 10 cm^3/min. ¿Qué tan rápido se incrementa el área superficial cuando la longitud de un lado es de 30 cm?

98. Un vaso de papel tiene la forma de un cono de altura igual a 10 cm y radio de 3 cm, en la parte superior. Si el agua se vierte en el vaso a razón de 2 cm^3/s, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando ésta tiene 5 cm de profundidad?

99. Un globo sube con rapidez constante de 5 pies/s. Un niño va en bicicleta por un camino recto a una rapidez de 15 pies/s. Cuando pasa bajo el globo, éste está a 45 pies arriba de él. ¿Qué tan rápido se incrementa la distancia entre el niño y el globo 3 s más tarde?

100. Una esquiadora pasa por la rampa que se ilustra en la figura con una rapidez de 30 pies/s. ¿Qué tan rápido se eleva cuando deja la rampa?



101. El ángulo de elevación del Sol decrece a razón de 0.25 rad/h. ¿Qué tan rápido se incrementa la sombra de un edificio de 400 pies de altura cuando el ángulo de elevación del Sol es $\pi/6$?

102. (a) Encuentre la aproximación lineal de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ cerca de 3.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando f y la aproximación lineal.
(c) ¿Para qué valores de x es exacta la aproximación lineal dentro de 0.1?

103. (a) Halle la linealización de $f(x) = \sqrt[3]{1 + 3x}$ en $a = 0$. Enuncie la aproximación lineal correspondiente y úsela para proporcionar un valor aproximado de $\sqrt[3]{1.03}$.
(b) Determine los valores de x para los que la aproximación lineal dada en el inciso (a) sea exacta con una diferencia menor que 0.1.

104. Evalúe dy si $y = x^3 - 2x^2 + 1$, $x = 2$ y $dx = 0.2$.

105. Una ventana tiene la forma de un cuadrado coronado por un semicírculo. La base de la ventana se mide como si tuviera un ancho de 60 cm, con un error posible en la medición de 0.1 cm. Use diferenciales para estimar el error posible máximo al calcular el área de la ventana.

106–108 Exprese el límite como una derivada y evalúelo.

106. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^{17} - 1}{x - 1}$

107. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

108. $\displaystyle\lim_{\theta \to \pi/3} \frac{\cos\theta - 0.5}{\theta - \pi/3}$

---

109. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}{x^3}$

110. Suponga que f es una función derivable tal que $f(g(x)) = x$ y $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$. Demuestre que $g'(x) = 1/(1 + x^2)$.

111. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que

$$\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$$

112. Demuestre que la longitud de la parte de cualquier recta tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ limitada por los ejes de coordenadas es constante.

Antes de trabajar en el ejemplo, cubra la solución e intente resolverlo primero

EJEMPLO 1 ¿Cuántas rectas son tangentes a las dos parábolas $y = -1 - x^2$ y $y = 1 + x^2$? Calcule las coordenadas de los puntos en los cuales estas tangentes tocan a las parábolas.

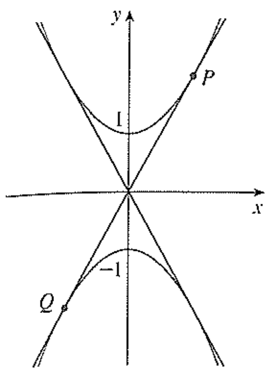


FIGURA 1

SOLUCIÓN Para entender este problema es esencial elaborar un esquema en donde estén las parábolas $y = 1 + x^2$ (que es la parábola estándar $y = x^2$ desplazada una unidad hacia arriba) y $y = -1 - x^2$ (la cual se obtiene al reflejar la primera parábola con respecto al eje x). Si trata de dibujar una tangente para ambas parábolas, pronto descubrirá que sólo hay dos posibilidades, que se ilustran en la figura 1.

Sea P un punto en el cual una de estas tangentes toca la parábola superior y sea a su coordenada x. (Es muy importante escoger la notación para la incógnita. Muy bien podía haber escogido b o c o x_0 o x_1 en lugar de a. Sin embargo, no se recomienda utilizar x en lugar de a porque se podría confundir con la variable x de la ecuación de la parábola.) Después, como P está en la parábola $y = 1 + x^2$, su coordenada y debe ser $1 + a^2$. Debido a la simetría mostrada en la figura 1, las coordenadas del punto Q donde la tangente toca a la parábola inferior debe ser $(-a, -(1 + a^2))$.

Para usar la información de que la recta es una tangente, iguale la pendiente de la recta PQ con la pendiente de la tangente en P. Así tiene que

$$m_{PQ} = \frac{1 + a^2 - (-1 - a^2)}{a - (-a)} = \frac{1 + a^2}{a}$$

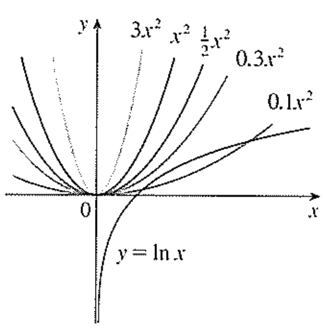


FIGURA 2

Si $f(x) = 1 + x^2$, en tal caso la pendiente de la tangente en P es $f'(a) = 2a$. Por consiguiente, la condición que necesita aplicar es

$$\frac{1 + a^2}{a} = 2a$$

Al resolver esta ecuación tiene $1 + a^2 = 2a^2$, por lo que $a^2 = 1$ y $a = \pm 1$. Por lo tanto, los puntos son $(1, 2)$ y $(-1, -2)$. Por simetría, los dos puntos restantes son $(-1, 2)$ y $(1, -2)$. □

EJEMPLO 2 ¿Para cuáles valores de c la ecuación $\ln x = cx^2$ tiene exactamente una solución?

SOLUCIÓN Uno de los principios más importantes de la solución de problemas es dibujar un diagrama, incluso si el problema, según se enuncia, no menciona en forma explícita una situación geométrica. Este problema se puede formular de nuevo en términos geométricos, como sigue: ¿Para cuáles valores de c la curva $y = \ln x$ interseca la curva $y = cx^2$ exactamente en un punto?

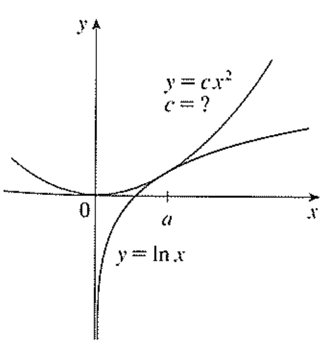


FIGURA 3

Empiece por trazar las gráficas de $y = \ln x$ y $y = cx^2$ para diversos valores de c. Sabe que, para $c \neq 0$, $y = cx^2$ es una parábola que se abre hacia arriba si $c > 0$ y, hacia abajo, si $c < 0$. En la figura 2 se muestran las parábolas $y = cx^2$ para varios valores positivos de c. La mayor parte no se cruzan con $y = \ln x$ y una la corta dos veces. Se tiene la sensación de que debe haber un valor de c (en alguna parte entre 0.1 y 0.3) para el cual las curvas se cruzan exactamente una vez, como en la figura 3.

Para hallar ese valor de c en particular, denote con a la coordenada x del punto único de intersección. En otras palabras, $\ln a = ca^2$, de modo que a sea la solución única de la ecuación dada. En la figura 2 las curvas sólo se tocan, de modo que tienen una tangente común cuando $x = a$. Esto significa que las curvas $y = \ln x$ y tienen la misma pendiente cuando $x = a$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{a} = 2ca$$

Si se resuelven las ecuaciones $\ln a = ca^2$ y $1/a = 2ca$, se obtiene

$$\ln a = ca^2 = c \cdot \frac{1}{2c} = \frac{1}{2}$$

De donde, $a = e^{1/2}$ y

$$c = \frac{\ln a}{a^2} = \frac{\ln e^{1/2}}{e} = \frac{1}{2e}$$

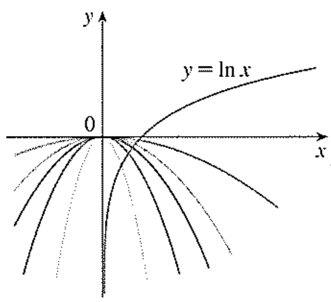


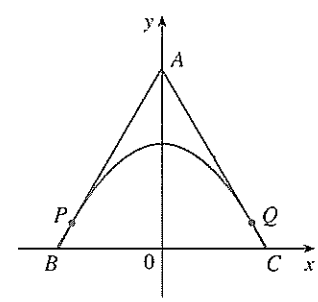
FIGURA 4

Para los valores negativos de c, la situación que se ilustra en la figura 4: todas las parábolas $y = cx^2$ con valores negativos de c cruzan $y = \ln x$ exactamente una vez. Y no olvide lo referente a $c = 0$. La curva $y = 0x^2 = 0$ es el eje x, el cual cruza $y = \ln x$ exactamente una vez.

Para resumir, los valores requeridos de c son $c = 1/(2e)$ y $c \leqslant 0$. □

PROBLEMAS

1. Determine los puntos P y Q sobre la parábola $y = 1 - x^2$ de modo que el triángulo ABC formado por el eje x y las tangentes en P y Q sea un triángulo equilátero.



2. Determine el punto donde las curvas $y = x^3 - 3x + 4$ y $y = 3(x^2 - x)$ son tangentes entre sí, es decir, tienen una tangente común. Ilustre mediante la representación gráfica de ambas curvas y la tangente común.

3. Demuestre que las líneas tangente a la parábola $y = ax^3 + bx + c$ en dos puntos cualesquiera con coordenadas-x p y q se cruzan en un punto cuya coordenada-x está a la mitad entre p y q.

4. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \cot x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \tan x}\right) = -\cos 2x$$

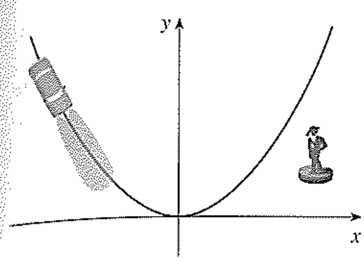


FIGURA PARA EL PROBLEMA 6

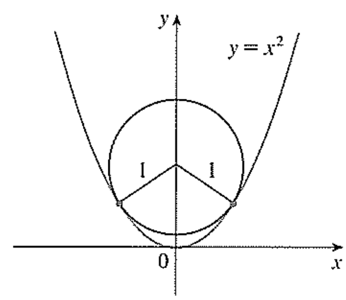
5. Demuestre que $\operatorname{sen}^{-1}(\tanh x) = \tan^{-1}(\operatorname{senh} x)$.

6. Un automóvil viaja por la noche por una carretera que tiene la forma de parábola con vértice en el origen (véase figura). El automóvil parte del punto 100 m al oeste y 100 m al norte del origen, y se desplaza en una dirección hacia el este. Hay una estatua localizada 100 m al este y 50 m al norte del origen. ¿En qué punto de la carretera los faros del vehículo iluminarán a la estatua?

7. Demuestre que $\dfrac{d^n}{dx^n}(\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x) = 4^{n-1}\cos(4x + n\pi/2)$.

8. Determine la n-ésima derivada de la función $f(x) = x^n/(1 - x)$

9. En la figura se muestra un círculo con radio 1 inscrito en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro del círculo.



10. Si f es derivable en a, donde $a > 0$, evalúe el siguiente límite en términos de $f'(a)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

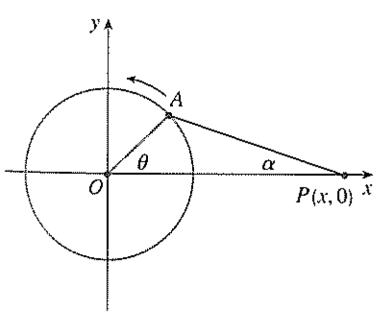


FIGURA PARA EL PROBLEMA 11

11. En la figura se muestra una rueda giratoria, con radio de 40 cm y una leva AP de longitud 1.2 m. El pasador P se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x, conforme la rueda gira en sentido contrario a las manecillas de un reloj con una rapidez de 360 revoluciones por minuto.
(a) Encuentre la velocidad angular de la leva, $d\alpha/dt$, en radianes por cada segundo, cuando $\theta = \pi/3$.
(b) Exprese la distancia $x = |OP|$, en términos de θ.
(c) Halle una expresión para la velocidad del pasador P, en términos de θ.

12. Se trazan las rectas tangentes T_1 y T_2 en los dos puntos P_1 y P_2 sobre la parábola $y = x^2$ y se cruzan en un punto P. Se traza otra recta tangente T en un punto entre P_1 y P_2; ésta cruza T_1 en Q_1 y T_2 en Q_2. Demuestre que

$$\frac{|PQ_1|}{|PP_1|} + \frac{|PQ_2|}{|PP_2|} = 1$$

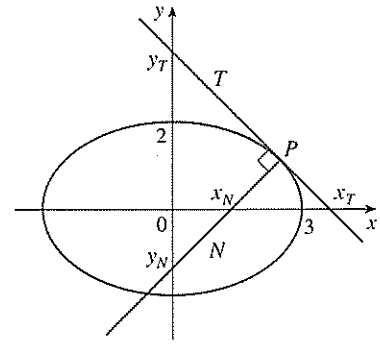
13. Demuestre que

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{ax}\operatorname{sen} bx) = r^n e^{ax}\operatorname{sen}(bx + n\theta)$$

en donde a y b son números positivos, $r^2 = a^2 + b^2$ y $\theta = \tan^{-1}(b/a)$.

14. Evalúe $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{x - \pi}$.

15. Sean T y N las rectas tangente y normal a la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$, en cualquier punto P de ésta en el primer cuadrante. Sean x_T y y_T las intersecciones de T con los ejes x y y, y x_N y y_N las intersecciones de N. Conforme P se mueve a lo largo de la elipse en el primer cuadrante (pero no sobre los ejes), ¿qué valores pueden adoptar x_T, y_T, x_N y y_N? En primer lugar, intente inferir las respuestas con sólo mirar la figura. A continuación, aplique el cálculo para resolver el problema y vea qué tan buena es su intuición.



16. Evalúe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

17. (a) Use la identidad para $\tan(x - y)$ (véase la ecuación 14 (b) del apéndice D) para demostrar que si dos rectas L_1 y L_2 se intersecan en un ángulo α, después

$$\tan \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

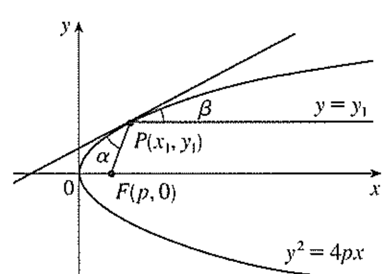
donde m_1 y m_2 son las pendientes de L_1 y L_2, respectivamente.

(b) El **ángulo entre las curvas** C_1 y C_2 en un punto de intersección se define como el ángulo entre las rectas tangentes a C_1 y C_2 en P (si estas rectas tangentes existen). Use el inciso (a) para hallar, correcto hasta el grado más cercano, el ángulo entre cada par de curvas en cada punto de intersección.

(i) $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$

(ii) $x^2 - y^2 = 3$ y $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$

18. Sea $P(x_1, y_1)$ un punto sobre la parábola $y^2 = 4px$ con foco $F(p, 0)$. Sea α el ángulo entre la parábola y el segmento rectilíneo FP y sea β el ángulo entre la recta horizontal $y = y_1$ y la parábola como en la figura. Demuestre que $\alpha = \beta$. (De modo que, por un principio de óptica geométrica, la luz proveniente de una fuente colocada en F se reflejará a lo largo de una recta paralela al eje x. Esto explica por qué las *paraboloides*, las superficies que se obtienen al hacer girar las parábolas sobre sus ejes, se emplean como la forma de algunos faros delanteros de automóviles y espejos para telescopios.)



PROBLEMAS ADICIONALES

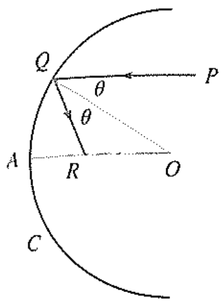


FIGURA PARA EL PROBLEMA 19

19. Suponga que reemplaza el espejo parabólico que aparece en el problema 18 con un espejo esférico. Aunque el espejo no tiene foco, puede demostrar la existencia de un foco *aproximado*. En la figura, C es un semicírculo con centro O. Un rayo de luz que llega hacia el espejo paralelo al eje a lo largo de la recta PQ, se reflejará hacia el punto R sobre el eje, de modo que $\angle PQO = \angle OQR$ (el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión). ¿Qué sucede con el punto R a medida que P se lleva cada vez más cerca al eje?

20. Si f y g son funciones derivables donde $f(0) = g(0) = 0$ y $g'(0) \neq 0$, demuestre que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$$

21. Evalúe $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(a + 2x) - 2\operatorname{sen}(a + x) + \operatorname{sen} a}{x^2}$.

CAS **22.** (a) La función cúbica $f(x) = x(x - 2)(x - 6)$ tiene tres ceros distintos: 0, 2 y 6. Dibuje f y su rectas tangentes en el *promedio* de cada par de ceros. ¿Qué advierte?

(b) Suponga que la función cúbica $f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ tiene tres ceros diferentes: a, b y c. Compruebe, con ayuda de un sistema algebraico para computadora, que una recta tangente dibujada en el promedio de los ceros a y b interseca la gráfica de f en el tercer cero.

23. ¿Para qué valor de k la ecuación $e^{2x} = k\sqrt{x}$ tiene exactamente una solución?

24. ¿Para qué números positivos a se cumple que $a^x \geqslant 1 + x$ para toda x?

25. Si

$$y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - 1}} - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 1}} \arctan \frac{\operatorname{sen} x}{a + \sqrt{a^2 - 1} + \cos x}$$

demuestre que $y' = \dfrac{1}{a + \cos x}$.

26. Dada una elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, donde $a \neq b$, encuentre la ecuación de todo el conjunto de puntos a partir de los cuales hay dos tangentes a la curva cuyas pendientes son (a) recíprocos y (b) recíprocos negativos.

27. Encuentre los dos puntos sobre la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ que tienen una recta tangente en común.

28. Suponga que tres puntos sobre la parábola $y = x^2$ tienen la propiedad de que sus rectas normales se cruzan en un punto común. Demuestre que la suma de sus coordenadas x es cero.

29. Un *punto de reticulado* sobre el plano es un punto con coordenadas enteras. Suponga que se dibujan círculos con radio r usando todos los puntos reticulados como centros. Encuentre el valor más pequeño de r tal que cualquier recta con pendiente $\frac{2}{5}$ cruce alguno de estos círculos.

30. Un cono de radio r centímetros y altura h centímetros se introduce por la punta con una rapidez de 1 cm/s en un cilindro alto de radio R centímetros que contiene una parte de agua. ¿Qué tan rápido sube el nivel del agua en el instante en que el cono está totalmente sumergido?

31. Un recipiente en forma de un cono invertido tiene una altura de 16 cm y su radio mide 5 cm en la parte superior. Está lleno en parte con un líquido que escurre por los lados con una rapidez proporcional al área del recipiente que está en contacto con el líquido. [El área superficial de un cono es $\pi r l$, donde r es el radio y l es la altura inclinada.] Si vierte líquido en el recipiente a razón de 2 cm³/min, entonces la altura del líquido disminuye a razón de 0.3 cm/min cuando la altura es de 10 cm. Si el objetivo es mantener el líquido a una altura constante de 10 cm, ¿en que proporción debe verter líquido al recipiente?