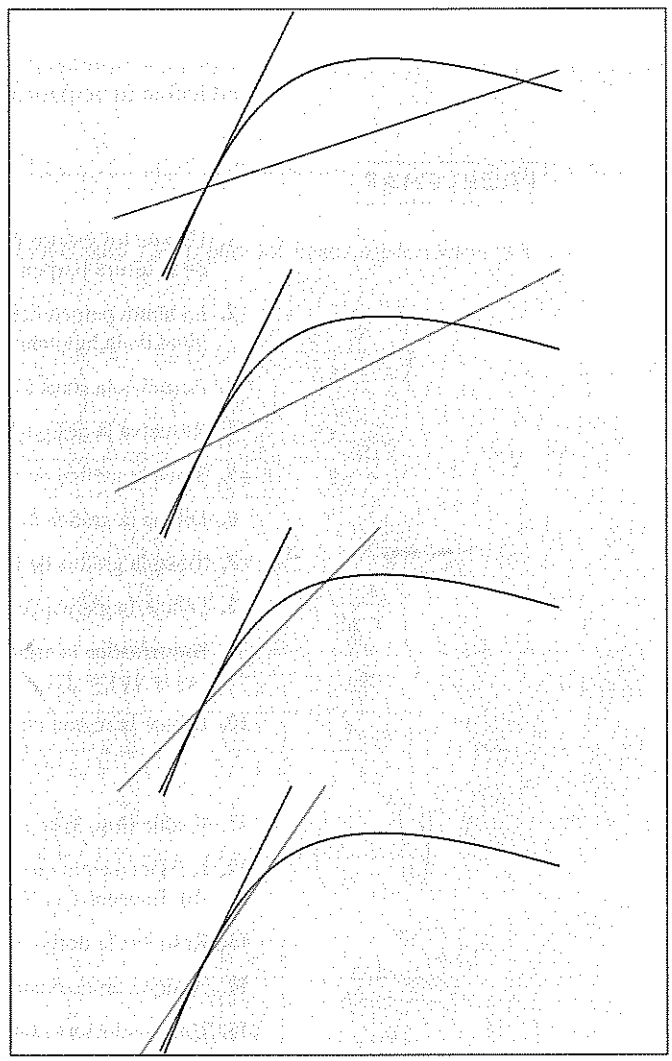
http://libreria-universitaria.blogspot.com

2

LÍMITES Y DERIVADAS

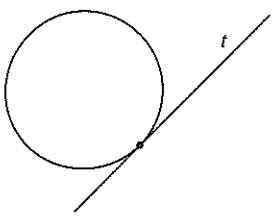


La idea de un límite se ilustra mediante líneas secantes que se aproximan a una línea tangente.

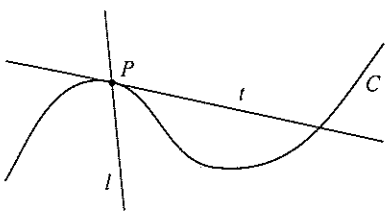
En la *Presentación preliminar del cálculo* (página 2) vio de qué manera la idea de límite sustenta las diversas ramas del cálculo. Por lo tanto, resulta adecuado empezar nuestro estudio de cálculo investigando los límites y sus propiedades. Clase especial de límite que se usa para hallar tangentes y velocidades, da lugar a la idea central del cálculo diferencial: la derivada.

2.1 LA TANGENTE Y LOS PROBLEMAS DE LA VELOCIDAD

En esta sección se analiza cómo surgen los límites cuando intenta hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto.



(a)



(b)

FIGURA 1

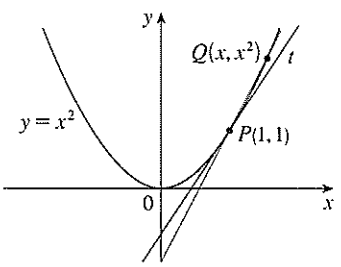


FIGURA 2

x	m_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001

x	m_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999

PROBLEMA DE LA TANGENTE

La palabra *tangente* se deriva de la palabra latina *tangens*, la cual significa "tocar". De este modo, una tangente a una curva es una línea que toca la curva. ¿De qué manera se puede precisar esta idea?

Para un círculo, podría seguir la idea de Euclides y decir que una tangente es una línea que pasa a través de ese círculo una vez y sólo una vez como en la figura 1(a). Para curvas más complicadas, esta definición es inadecuada. En la figura 1(b), se muestran dos rectas, l y t, que cruzan por un punto P de una curva C. La recta l interseca C sólo una vez, pero es evidente que no se parece a lo que consideramos una tangente. Por otra parte, la recta t parece una tangente pero interseca C dos veces.

Para ser específicos, considere el problema de intentar hallar una recta tangente t a la parábola $y = x^2$ en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la línea tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN Tan pronto conozca su pendiente m podra hallar la ecuación de la recta tangente t. La dificultad es que conoce sólo un punto P, de t, en tanto que necesita dos puntos para calcular la pendiente. Pero puede calcular una aproximación para m si elige un punto cercano $Q(x, x^2)$ de la parábola (como en la figura 2) y calcula la pendiente m_{PQ} de la línea secante PQ.

Elija $x \neq 1$, de modo que $Q \neq P$. Por lo tanto

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Por ejemplo, para el punto $Q(1.5, 2.25)$

$$m_{PQ} = \frac{2.25 - 1}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

Las tablas en el margen muestran los valores de m_{PQ} para varios valores de x cercanos a 1. Entre más cerca está Q de P, más lo está x de 1 y, por lo que se ve en las tablas, m_{PQ} está más próxima a 2. Esto sugiere que la pendiente de la recta tangente t debe ser $m = 2$.

Se dice que la pendiente de la recta tangente es el *límite* de las pendientes de las rectas secantes y, simbólicamente, expresamos esto al escribir

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Si supone que, en efecto, la pendiente de la recta tangente es 2, use la forma punto-pendiente de la ecuación de una línea (véase el apéndice B) para escribir la ecuación de la recta tangente que pasa por (1, 1) como

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

En la figura 3 se ilustra el proceso de tender hacia el límite que se presenta en este ejemplo. Conforme Q se aproxima a P a lo largo de la parábola, las rectas secantes correspondientes giran en torno a P y se acercan a la recta tangente t.

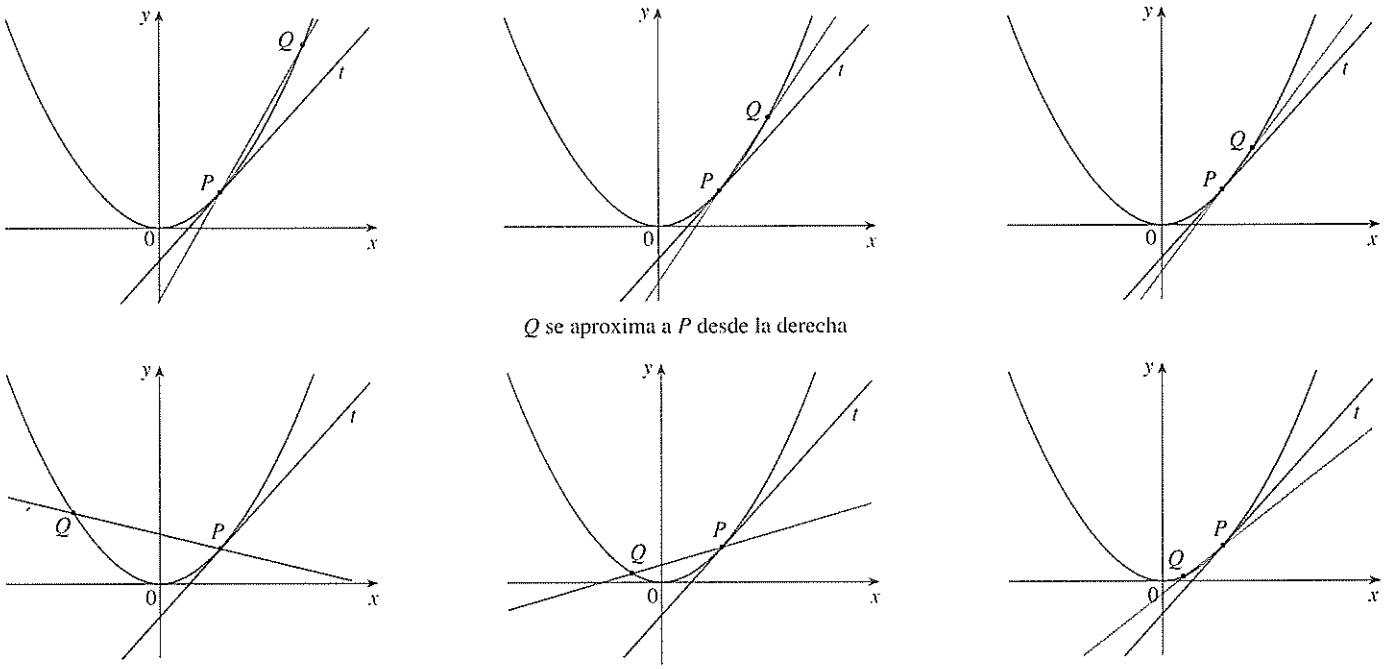


FIGURA 3 □

TEC En Visual 2.1 puede ver cómo funciona el proceso en la figura 3 para funciones adicionales.

Muchas funciones que se encuentran en las ciencias no se describen mediante una ecuación explícita; se definen por medio de información experimental. En el ejemplo siguiente se indica cómo estimar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de ese tipo de funciones.

t	Q
0.00	100.00
0.02	81.87
0.04	67.03
0.06	54.88
0.08	44.93
0.10	36.76

EJEMPLO 2 La unidad de destello (*flash*) de una cámara funciona por el almacenamiento de carga en un capacitor y su liberación repentina al disparar la unidad. Los datos que se muestran al margen describen la carga Q que resta en el capacitor (medida en microcoulombs) en el tiempo t (medido en segundos después de que la unidad de destello ha sido apagada). Use los datos para dibujar la gráfica de esta función y estime la pendiente de la recta tangente en el punto donde $t = 0.04$. [Nota: la pendiente de la recta tangente representa la corriente eléctrica que circula del capacitor al bulbo del flash (medida en microamperes).]

SOLUCIÓN En la figura 4 está la información que se proporcionó y se usa para dibujar una curva que se aproxime a la gráfica de la función.

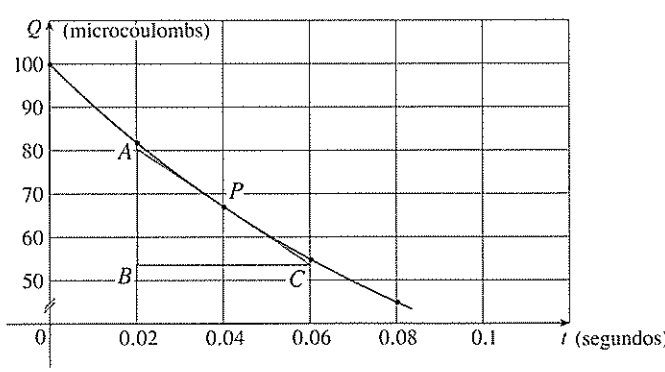


FIGURA 4

A partir de los puntos $P(0.04, 67.03)$ y $R(0.00, 100.00)$ de la gráfica la pendiente de la recta secante es

$$m_{PR} = \frac{100.00 - 67.03}{0.00 - 0.04} = -824.25$$

R	m_{PR}
(0.00, 100.00)	−824.25
(0.02, 81.87)	−742.00
(0.06, 54.88)	−607.50
(0.08, 44.93)	−552.50
(0.10, 36.76)	−504.50

En la tabla que aparece a la izquierda se muestran los resultados de cálculos similares para las pendientes de otras rectas secantes. Con base en esa tabla cabe esperar que la pendiente de la recta tangente en $t = 0.04$ se encuentre en algún valor entre -742 y -607.5. De hecho, el promedio de las pendientes de las dos rectas secantes más próximas es

$$\tfrac{1}{2}(-742 - 607.5) = -674.75$$

De esa manera, mediante este método estima la pendiente de la recta tangente como -675.

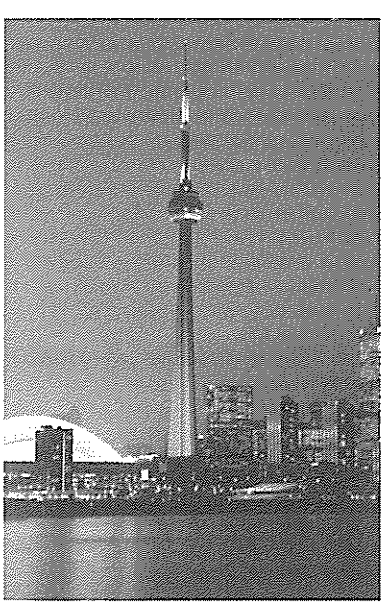
Otro método es trazar una aproximación a la recta tangente en P y medir los lados del triángulo ABC como en la figura 4. Esto da una estimación de la pendiente de la recta tangente como

$$-\frac{|AB|}{|BC|} \approx -\frac{80.4 - 53.6}{0.06 - 0.02} = -670$$ □

■ El significado físico de la respuesta del ejemplo 2 es que la corriente eléctrica que fluye del capacitor al foco del *flash* después de 0.04 de segundo es de casi de −670 microamperes.

EL PROBLEMA DE LA VELOCIDAD

Si observa el velocímetro de un automóvil al viajar en el tráfico de la ciudad, puede ver que la aguja no permanece inmóvil mucho tiempo; es decir, la velocidad del auto no es constante. Al observar el velocímetro, supone que el vehículo tiene una velocidad definida en cada momento, ¿pero cómo se define la velocidad "instantánea"? Investigue el ejemplo de una pelota que cae.


© 2003 Brand X Pictures

La Torre CN en Toronto es el edificio autoestable más alto del mundo en la actualidad.

EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma de observación de la Torre CN en Toronto, 450 m por encima del nivel del suelo. Encuentre la velocidad de la pelota una vez que transcurren 5 segundos.

SOLUCIÓN A través de experimentos que se llevaron a cabo cuatro siglos atrás, Galileo descubrió que la distancia que recorre cualquier cuerpo que cae libremente es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo. (En este modelo de caída libre no se considera la resistencia del aire.) Si la distancia recorrida después de t segundos se denota mediante $s(t)$ y se mide en metros, en tal caso la ley de Galileo se expresa con la ecuación

$$s(t) = 4.9t^2$$

La dificultad para hallar la velocidad después de 5 s es que trata con un solo instante ($t = 5$), de modo que no interviene un intervalo. Sin embargo, puede tener una aproximación de la cantidad deseada calculando la velocidad promedio durante el breve intervalo de una décima de segundo, desde $t = 5$ hasta $t = 5.1$:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{cambio en la posición}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1}$$

$$= \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 \text{ m/s}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En la tabla siguiente se muestran los resultados de cálculos similares de la velocidad promedio durante periodos sucesivamente cada vez más pequeños

Intervalo de tiempo	Velocidad promedio (m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53.9
$5 \leq t \leq 5.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5.05$	49.245
$5 \leq t \leq 5.01$	49.049
$5 \leq t \leq 5.001$	49.0049

Parece que conforme acorta el periodo, la velocidad promedio se aproxima a 49 m/s. La **velocidad instantánea**, cuando $t = 5$, se define como el valor límite de estas velocidades promedio, durante periodos cada vez más cortos que se inician en $t = 5$. En estos términos, la velocidad (instantánea) después de 5 s es

$$v = 49 \text{ m/s}$$ □

Quizá sienta que los cálculos que se utilizan en la solución de este problema son muy semejantes a los que se aplicaron con anterioridad en esta sección para hallar tangentes. De hecho, existe una relación íntima entre el problema de la tangente y el de hallar velocidades. Si dibuja la gráfica de la función distancia de la pelota (como en la figura 5) y considera los puntos $P(a, 4.9a^2)$ y $Q(a + h, 4.9(a + h)^2)$ de la gráfica, en tonces la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}$$

lo cual es lo mismo que la velocidad promedio durante el periodo $[a, a + h]$. Por lo tanto, la velocidad en el instante $t = a$ (el límite de estas velocidades promedio a medida que h tiende a 0) debe ser igual a la pendiente de la recta tangente en P (el límite de las pendientes de las rectas secantes).

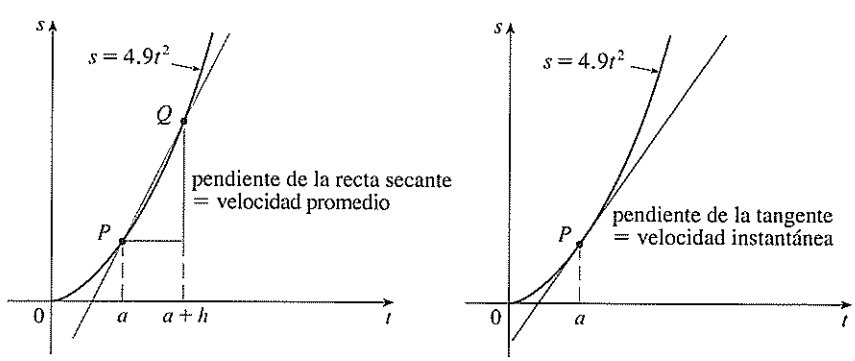


FIGURA 5

Los ejemplos 1 y 3 hacen ver que para resolver problemas de tangentes y de velocidades, debe ser capaz de hallar límites. Después de estudiar los métodos para calcular límites en las cinco secciones siguientes, en la sección 2.7 regresará a los problemas de hallar tangentes y velocidades.

2.1 EJERCICIOS

1. Un depósito contiene 1 000 galones de agua que se drenan desde la parte inferior en media hora. Los valores que aparecen en la tabla muestran el volumen V de agua que resta en el tanque (en galones) una vez que transcurren t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

(a) Si P es el punto (15, 250) en la gráfica de V, encuentre las pendientes de las rectas secantes PQ cuando Q es el punto en la gráfica con $t = 5$, 10, 20, 25 y 30.

(b) Estime la pendiente de la recta tangente en P promediando las pendientes de dos rectas secantes.

(c) Use una gráfica de la función para estimar la pendiente de la recta tangente en P. (Esta pendiente representa la cantidad a la que fluye el agua desde el tanque después de 15 minutos.)

2. Se usa un monitor cardiaco para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. Éste recopila el número de latidos cardiacos después de t minutos. Cuando se sitúan los datos de la tabla en una gráfica, la pendiente de la recta tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Latidos cardiacos	2530	2661	2806	2948	3080

El monitor estima este valor calculando la pendiente de una recta secante. Use los datos para estimar la frecuencia cardiaca del paciente, después de 42 minutos, usando la recta secante entre los puntos

(a) $t = 36$ y $t = 42$ (b) $t = 38$ y $t = 42$

(c) $t = 40$ y $t = 42$ (d) $t = 42$ y $t = 44$

¿Cuáles son sus conclusiones?

3. El punto $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ está sobre la curva $y = x/(1 + x)$.

(a) Si Q es el punto $(x, x/(1 + x))$, use su calculadora para hallar la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta seis cifras decimales) para los valores de x que se enumeran a continuación:

(i) 0.5 (ii) 0.9 (iii) 0.99 (iv) 0.999

(v) 1.5 (vi) 1.1 (vii) 1.01 (viii) 1.001

(b) Mediante los resultados del inciso (a) conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

(c) Usando la pendiente del inciso (b) encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

4. El punto $P(3, 1)$ se encuentra sobre la curva $y = \sqrt{x - 2}$

(a) Si Q es el punto $\left(x, \sqrt{x - 2}\right)$, mediante una calculadora determine la pendiente de la secante PQ (con seis cifras decimales) para los valores siguientes de x:

(i) 2.5 (ii) 2.9 (iii) 2.99 (iv) 2.999

(v) 3.5 (vi) 3.1 (vii) 3.01 (viii) 3.001

(b) Por medio de los resultados del inciso (a), conjeture el valor de la pendiente de la recta tangente en $P(3, 1)$.

(c) Mediante la pendiente del inciso (b), halle una ecuación de la recta tangente a la curva en $P(3, 1)$.

(d) Trace la curva, dos de las rectas secantes y la recta tangente.

5. Si se lanza una pelota en el aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura en pies, después de t segundos, se expresa por $y = 40t - 16t^2$.

(a) Encuentre la velocidad promedio para el periodo que se inicia cuando $t = 2$ y dura:

(i) 0.5 seg (ii) 0.1 seg

(iii) 0.05 seg (iv) 0.01 seg

(b) Estime la velocidad instantánea cuando $t = 2$.

6. Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura en metros t segundos después se proporciona mediante $y = 10t - 1.86t^2$.

(a) Hallar la velocidad promedio en los intervalos de tiempo que se proporcionan:

(i) [1, 2] (ii) [1, 1.5] (iii) [1, 1.1]

(iv) [1, 1.01] (v) [1, 1.001]

(b) Estimar la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

7. La tabla exhibe la posición de un ciclista.

t (segundos)	0	1	2	3	4	5
s (metros)	0	1.4	5.1	10.7	17.7	25.8

(a) Hallar la velocidad promedio para cada periodo:

(i) [1, 3] (ii) [2, 3] (iii) [3, 5] (iv) [3, 4]

(b) Use la gráfica de s como una función de t para estimar la velocidad instantánea cuando $t = 3$.

8. El desplazamiento (en centímetros) de una partícula de atrás hacia adelante en una línea recta se conoce por la ecuación de movimiento $s = 2 \operatorname{sen} \pi t + 3 \cos \pi t$, donde t se mide en segundos.

(a) Encuentre la velocidad promedio durante cada periodo:

(i) [1, 2] (ii) [1, 1.1]

(iii) [1, 1.01] (iv) [1, 1.001]

(b) Estimar la velocidad instantánea de la partícula cuando $t = 1$.

9. El punto $P(1, 0)$ está sobre la curva $y = \operatorname{sen}(10\pi/x)$.

(a) Si Q es el punto $(x, \operatorname{sen}(10\pi/x))$, encuentre la pendiente de la recta secante PQ (correcta hasta cuatro cifras decimales) para $s = 2$, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 y 0.9. ¿Parece que las pendientes tienden a un límite?

(b) Use una gráfica de la curva para explicar por qué las pendientes de las rectas secantes del inciso (a) no están cercanas a la pendiente de la recta tangente en P.

(c) Mediante la selección de rectas secantes apropiadas, estime la pendiente de la recta tangente en P.

2.2 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Luego de ver en la sección anterior cómo surgen los límites cuando desea hallar la tangente a una curva o la velocidad de un objeto, dirija su atención hacia los límites en general y los métodos numéricos y gráficos para calcularlos.

Investigue el comportamiento de la función f definida por $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2, pero no iguales a 2.

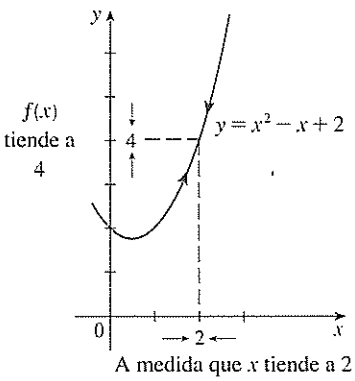


FIGURA 1

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

A partir de la tabla y de la gráfica de f (una parábola) que se ilustra en la figura 1, es claro cuando x está cercana a 2 (por cualquiera de los dos lados de 2), $f(x)$ lo está a 4. De hecho, parece posible acercar los valores de $f(x)$ a 4 tanto como desee si toma una x lo suficientemente cerca de 2. Expresa este hecho al decir: "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$, cuando x tiende a 2, es igual a 4". La notación para esta expresión es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación

1 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

que se expresa como: "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, es igual a L"

si puede acercar arbitrariamente los valores de $f(x)$ a L (tanto como desee) escogiendo una x lo bastante cerca de a, pero no igual a a.

En términos generales, esto afirma que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más al número L cuando x se acerca a a (desde cualquiera de los dos lados de a) pero $x \neq a$. (En la sección 2.4 se proporciona una definición más exacta.)

Una notación alternativa para

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

es $f(x) \to L$ cuando $x \to a$

que suele leerse "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a".

Advierta la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca consideró $x = a$. De hecho, incluso no es necesario que $f(x)$ esté definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo está definida f *cerca de* a.

En la figura 2 se muestran las gráficas de tres funciones. Observe que en la parte (c), $f(a)$ no está definida y, en la parte (b), $f(a) \neq L$. Pero en cada caso, sin importar lo que suceda en a, es verdadero que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

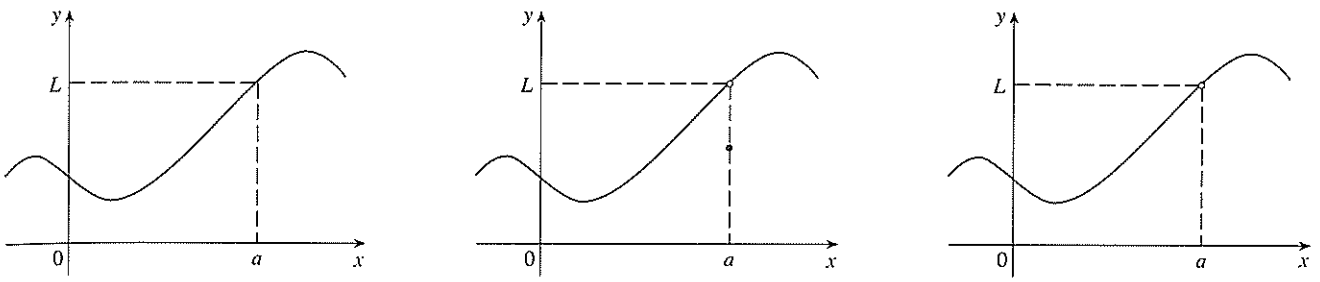


FIGURA 2 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

EJEMPLO 1 Conjeture el valor de $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

SOLUCIÓN Advierta que la función $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero eso no importa porque la definición de $\lim_{x \to a} f(x)$ dice que considere valores de x próximos a a pero diferentes de a.

En las tablas que aparecen al margen izquierdo se proporcionan los valores de $f(x)$ (correctos hasta seis cifras decimales) para valores de x que tienden a 1 (pero no son iguales a 1). Con base en los valores de las tablas, suponga que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = 0.5$$ □

El ejemplo 1 se ilustra mediante la gráfica de f de la figura 3. Cambie ahora ligeramente el valor de f, dándole un valor de 2 cuando $x = 1$ y denominando a la función resultante como g.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Esta nueva función g todavía tiene el mismo límite conforme x tiende a 1 (véase la figura 4).

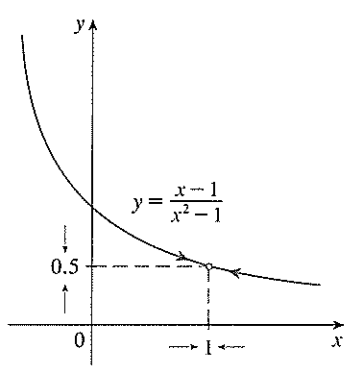


FIGURA 3

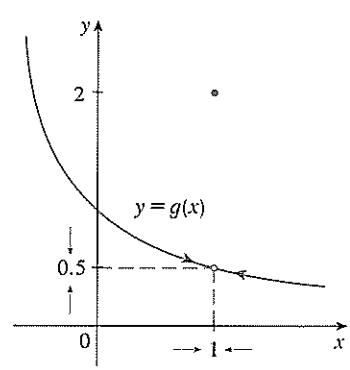


FIGURA 4

EJEMPLO 2 Estime el valor de $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN En la tabla se enumeran los valores de la función para varios valores de t cercanos a 0.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.01	0.16667

A medida que t tiende a 0, los valores de la función parecen acercarse a 0.1666666... y, por consiguiente, supone que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ □

t	$\dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$
±0.0005	0.16800
±0.0001	0.20000
±0.00005	0.00000
±0.00001	0.00000

En el ejemplo 2, ¿qué habría sucedido si hubiera tomado valores incluso más pequeños de t? En la tabla al margen se muestran los resultados que se obtuvieron con una calculadora; usted puede ver que parece suceder algo extraño.

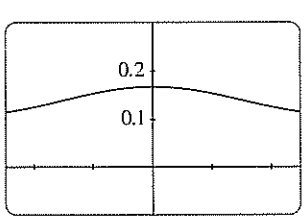
Si intenta realizar estos cálculos en su calculadora podría obtener valores diferentes, pero llegará un momento en que obtendrá el valor 0, si reduce t lo suficiente. ¿Significa esto que la respuesta en realidad es 0, en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como se demostrará en la sección siguiente. El problema es que las calculadoras dan valores falsos porque $\sqrt{t^2 + 9}$ está muy cercana a 3 cuando t es pequeño. (De hecho, cuando t es lo suficientemente pequeño, el valor para $\sqrt{t^2 + 9}$ de una calculadora es 3.000... hasta el número de dígitos que la calculadora es capaz de llevar.)

www.stewartcalculus.com
Para una explicación más detallada de por qué en ocasiones las calculadoras dan valores falsos, véase el sitio en la red.
Dé un clic en *Additional Topics* y luego en *Lies My Calculator and Computer Told Me*. En particular, refiérase a la sección llamada *The Perils of Subtraction*.

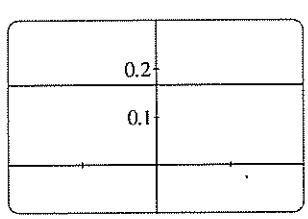
Algo similar sucede cuando intenta trazar la gráfica de la función

$$f(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$$

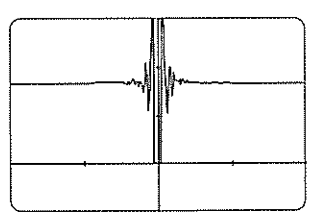
del ejemplo 2 en una calculadora graficadora o en una computadora. Las partes (a) y (b) de la figura ilustran gráficas bastante exactas de f y, cuando se usa el modo de trazo (si cuenta con él), puede estimar con facilidad que el límite es alrededor de $\frac{1}{6}$. Pero si realiza un acercamiento muy grande, como en las partes (c) y (d), obtiene gráficas inexactas, una vez más debido a problemas con la sustracción.



(a) [−5, 5] por [−0.1, 0.3]



(b) [−0.1, 0.1] por [−0.1, 0.3]


(c) [-10^{-6}, 10^{-6}] por [−0.1, 0.3]

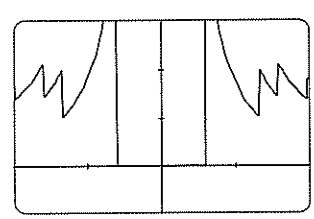

(d) [-10^{-7}, 10^{-7}] por [−0.1, 0.3]

FIGURA 5

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 3 Encuentre el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

SOLUCIÓN La función $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$ no está definida cuando $x = 0$. Con una calculadora (y recordando que si $x \in \mathbb{R}$, sen x quiere decir el seno del ángulo cuya medida en *radianes* es x), construya la tabla siguiente de valores, correcta hasta ocho cifras decimales. A partir de la tabla a la izquierda y de la gráfica de la figura 6, suponga que

x	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

De hecho, esta conjetura es correcta, como se probará en el capítulo 3 mediante la aplicación de un argumento geométrico.

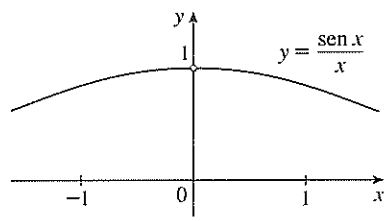


FIGURA 6

□

EJEMPLO 4 Investigue $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{x}$.

SOLUCIÓN Una vez más, la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. Si se evalúa la función para algunos valores pequeños de x, resulta

$$f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 \qquad f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0$$

De manera análoga, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información, podría sentirse tentado a presumir que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

pero en esta ocasión su conjetura es errónea. Advierta que aun cuando $f(1/n) = \operatorname{sen} n\pi = 0$, para cualquier entero n, también se cumple que $f(x) = 1$ para un número infinito de valores de x que tienden a 0. La gráfica de f se da en la figura 7.

SISTEMAS ALGEBRAICOS PARA COMPUTADORA

Los sistemas algebraicos para computadora (CAS: computer algebra systems, CAS) tienen comandos que calculan límites. En virtud de las dificultades que se demostraron en los ejemplos 2, 4 y 5, no encuentran los límites por experimentación numérica, sino que aplican técnicas más elaboradas, como el cálculo de series infinitas. Si tiene acceso a un CAS, use el comando límite, calcule los límites de los ejemplos de esta sección y compruebe sus respuestas a los ejercicios de este capítulo.

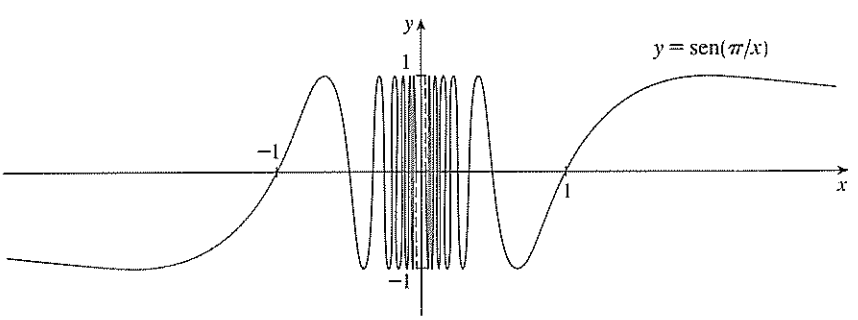


FIGURA 7

Las líneas discontinuas cerca del eje y indican que el valor de $\operatorname{sen}(\pi/x)$ oscila entre 1 y -1 a menudo infinitamente cuando x se aproxima a 0. (Véase el ejercicio 39.)

Ya que el valor de $f(x)$ no se aproxima a un número fijo cuando x se aproxima a cero.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \text{ no existe}$$

□

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

x	$x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \dfrac{\cos 5x}{10\,000} \right)$.

SOLUCIÓN Como antes construya una tabla de valores. A partir de la primera tabla que aparece en el margen

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0$$

Pero si perseveran con valores más pequeños de x, la segunda tabla sugiere que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.000100 = \frac{1}{10\,000}$$

Más adelante verá que $\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$ y en tal caso se concluye que el límite es 0.0001. □

Los ejemplos 4 y 5 ilustran algunos de los riesgos en la suposición del valor de un límite. Es fácil suponer un valor erróneo, si se usan valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo suspender el cálculo de valores. Y, como hace ver el análisis que sigue al ejemplo 2, a veces las calculadoras y las computadoras dan valores erróneos. Sin embargo, más adelante se desarrollan métodos infalibles para calcular límites.

EJEMPLO 6 La función de Heaviside H se define por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

[Esta función recibe ese nombre en honor al ingeniero electricista Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se hace circular en el instante $t = 0$.] En la figura 8 se muestra su gráfica.

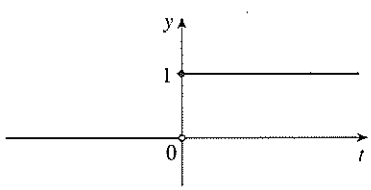


FIGURA 8

Conforme t se acerca a 0 desde la izquierda, $H(t)$ tiende a 0. Cuando t se aproxima a 0 desde la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No existe un número único al que $H(t)$ se aproxime cuando t tiende a 0. Por consiguiente, $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe. □

LÍMITES LATERALES

En el ejemplo 6 se vio que $H(t)$ tiende a 0 cuando t lo hace a 0 desde la izquierda y que esa función tiende a 1 cuando t lo hace a 0 desde la derecha. Se indica simbólicamente esta situación escribiendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que sólo se consideran valores de t menores que 0. Del mismo modo "$t \to 0^+$" indica que sólo se consideran valores de t mayores que 0.

2 DEFINICIÓN Escriba

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se lee **el límite izquierdo de $f(x)$ cuando x tiende a a** [o el **límite de $f(x)$ cuando x se acerca a a desde la izquierda**] es igual a L, si puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo una x lo bastante cerca de a pero menor que a.

Advierta que la definición de 2 difiere de la 1 sólo en que x debe ser menor que a. De manera análoga, si requiere que x sea mayor que a, obtiene: "el límite por **la derecha de $f(x)$ cuando x tiende a a** es igual a L" y escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Así, el símbolo "$x \to a^+$" significa que considere sólo $x > a$. En la figura 9 se ilustran estas definiciones

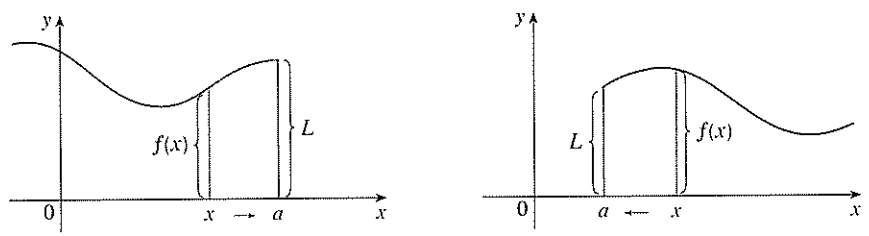


FIGURA 9 (a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Al comparar la definición 1 con las definiciones de los límites laterales, se cumple lo siguiente

3 $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

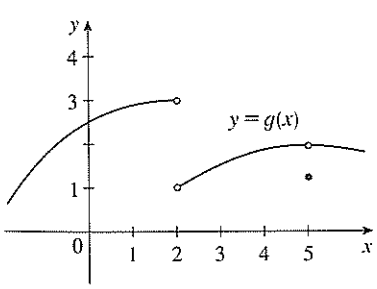


FIGURA 10

EJEMPLO 7 En la figura 10 se muestra la gráfica de una función g. Úsela para dar los valores (si existen) de los límites siguientes:

(a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (b) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (c) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(d) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$ (e) $\lim_{x \to 5^+} g(x)$ (f) $\lim_{x \to 5} g(x)$

SOLUCIÓN A partir de la gráfica es claro que los valores de $g(x)$ tienden a 3 cuando x tiende a 2 desde la izquierda, pero se acercan a 1 cuando x se aproxima a 2 desde la derecha. Por consiguiente

$$\text{(a) } \lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \quad \text{y} \quad \text{(b) } \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

(c) Como los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, con base en (3) se concluye que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe

La gráfica muestra también que

$$\text{(d) } \lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \quad \text{y} \quad \text{(e) } \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

(f) En esta ocasión los límites por la izquierda y la derecha son los mismos y, de este modo, con base en (3)

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$. □

LÍMITES INFINITOS

EJEMPLO 8 Halle $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

SOLUCIÓN Conforme x se aproxima a 0, x^2 también se aproxima a 0 y $1/x^2$ se hace muy grande. (Vea la tabla en el margen.) De hecho, al ver la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ que se muestra en la figura 11, parece que los valores de $f(x)$ se pueden aumentar en forma arbitraria, si se escoge una x lo suficientemente cerca de 0. De este modo los valores de $f(x)$ no tienden a un número, de tal manera que $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$ no existe. □

x	$\dfrac{1}{x^2}$
±1	1
±0.5	4
±0.2	25
±0.1	100
±0.05	400
±0.01	10 000
±0.001	1 000 000

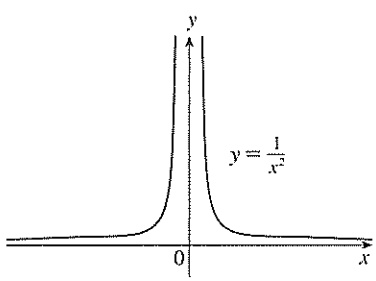


FIGURA 11

Para indicar la clase de comportamiento que se muestra en el ejemplo 8, utilice la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no quiere decir que se considere ∞ como un número. Ni siquiera significa que el límite existe. Simplemente expresa la manera particular en la cual el límite no existe: $1/x^2$ puede ser tan grande como guste llevando a x lo suficientemente cerca de 0.

En general, se escribe simbólicamente

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se vuelven más y más grandes, es decir (se "incrementan sin límite") a medida que x se acerca más y más a a.

4 DEFINICIÓN Sea f un función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

quiere decir que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (tan grandes como uno quiera) haciendo que x se acerque suficientemente a a, pero no es igual que a.

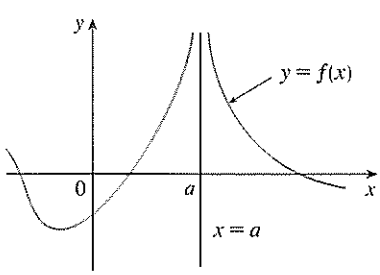


FIGURA 12
$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ es

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to a$$

Recuerde que el símbolo ∞ no es un número, pero la expresión $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ se lee con frecuencia como

"el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el infinito"

o bien, "$f(x)$ se vuelve infinita cuando x se aproxima a a"

o bien, "$f(x)$ se incrementa sin límite cuando x tiende a a"

Esta definición se ilustra en la figura 12.

Un tipo similar de límite, para el caso de funciones que manifiestan valores negativos muy grandes cuando x tiende a a, se presenta en la definición 5 y se ilustra en la figura 13.

■ Al decir que un número es "negativo muy grande" significa que es negativo pero su magnitud (valor absoluto) es considerable.

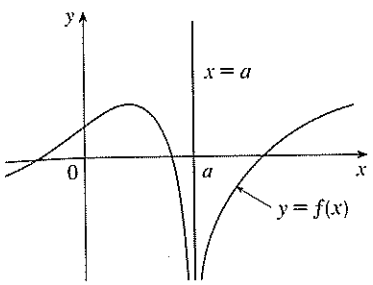


FIGURA 13
$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

5 DEFINICIÓN Sea f una función definida en ambos lados de a, excepto posiblemente en a misma. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer de manera arbitraria grandes y negativos al dar valores a x que estén muy cerca de a, pero sin que lleguen a ser iguales a a.

El símbolo $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ quiere decir "el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el infinito negativo" o bien, "$f(x)$ decrece sin límite cuando x tiende a a". Como ejemplo tiene

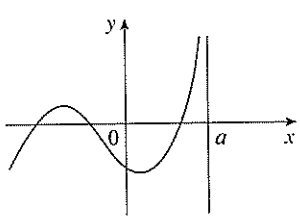
$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Definiciones similares se pueden dar para los límites infinitos laterales

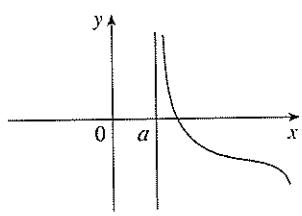
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

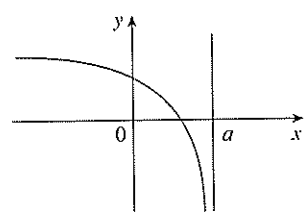
sin olvidar que "$x \to a^-$" significa que considera sólo valores de x que sean menores que a y, de igual manera, "$x \to a^+$" quiere decir que considera sólo $x > a$. Ejemplos de estos cuatro casos se presentan en la figura 14.



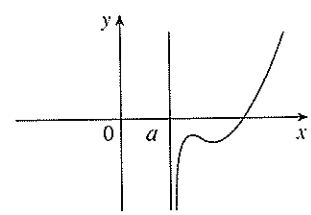
(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

FIGURA 14

6 DEFINICIÓN La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si por lo menos uno de los siguientes enunciados es verdadero

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Por ejemplo, el eje y es una asíntota vertical de la curva $y = 1/x^2$ porque $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. En la figura 14, la recta $x = a$ es una asíntota vertical en cada uno de los cuatro casos mostrados. En general, es muy útil conocer las asíntotas verticales para trazar las gráficas.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

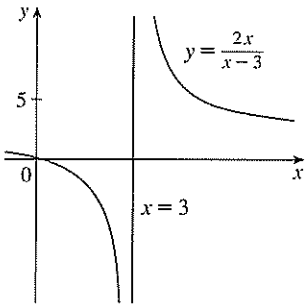


FIGURA 15

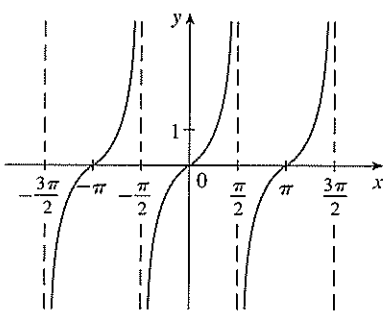


FIGURA 16
$y = \tan x$

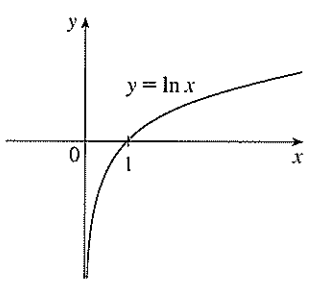


FIGURA 17
El eje y es una asíntota vertical de la función logaritmo natural.

EJEMPLO 9 Determine $\lim_{x \to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ y $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

SOLUCIÓN Si x está en la vecindad de 3, pero es mayor que 3, entonces el denominador $x - 3$ es un número positivo pequeño y $2x$ está cercano a 6. Así, el cociente $2x/(x - 3)$ es un número *positivo* grande. En estos términos, ve intuitivamente que

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

De manera similar, si x está cerca de 3 pero es más pequeña que 3, entonces $x - 3$ es un número negativo pequeño, pero $2x$ es aún un número positivo, cercano a 6. De esa manera, $2x/(x - 3)$ es desde el punto de vista numérico un número *negativo* grande. Por esto,

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

La gráfica de la curva $y = 2x/(x - 3)$ se ilustra en la figura 15. La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. □

EJEMPLO 10 Determine las asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$.

SOLUCIÓN Puesto que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

hay asíntotas verticales potenciales donde $\cos x = 0$. En efecto, como $\cos x \to 0^+$ cuando $x \to (\pi/2)^-$ y $\cos x \to 0^-$ cuando $x \to (\pi/2)^+$, en vista de que sen x es positiva cuando x está cerca de $\pi/2$,

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Esto demuestra que la recta $x = \pi/2$ es una asíntota vertical. Un razonamiento similar muestra que las rectas $x = (2n + 1)\pi/2$, donde n es un entero, son asíntotas verticales de $f(x) = \tan x$. La gráfica de la figura 16 lo confirma. □

Otro ejemplo de una función cuya gráfica tiene una asíntota vertical es la función logaritmo natural $y = \ln x$. A partir de la figura 17

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$$

y de este modo la recta $x = 0$, el eje y, es una asíntota vertical. En efecto, lo mismo se cumple para $y = \log_a x$ siempre que $a > 1$. (Véase figuras 11 y 12 de la sección 1.6.)

2.2 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras qué se quiere dar a entender mediante la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que se cumpla esta proposición y todavía $f(2) = 3$? Dé una explicación.

2. Explique qué se quiere dar a entender con

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Dé una explicación.

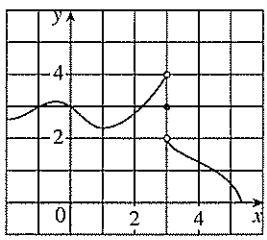
3. Explique el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim_{x \to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Para la función f cuya gráfica se proporciona, establezca el valor de cada cantidad, si existe. Si no la hay, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

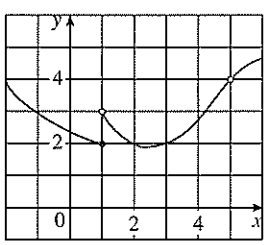
(d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



5. Use la gráfica de f que se proporciona para establecer el valor de cada cantidad, si existe. Si no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 1} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ (e) $f(5)$



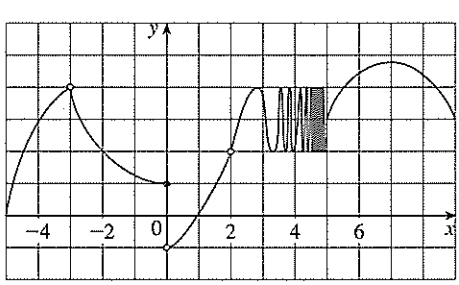
6. Para la función h, cuya gráfica se da, determine el valor de cada cantidad, si existe. En caso que no exista explique por qué.

(a) $\lim_{x \to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x \to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x \to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x \to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x \to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x \to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x \to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x \to 5^-} h(x)$

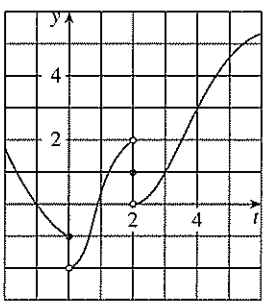


7. Para la función g cuya gráfica se proporciona, establezca el valor de cada cantidad, si acaso existe. Si no existe, explique la razón.

(a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t \to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{x \to 0^+} g(t)$ (f) $\lim_{t \to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t \to 4} g(t)$

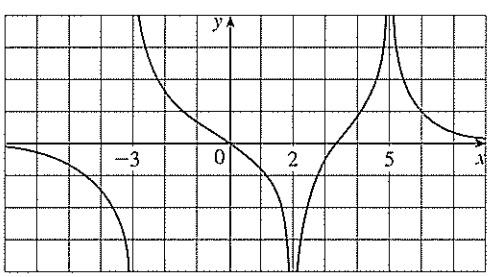


8. En el caso de la función R cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim_{x \to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x \to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x \to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x \to -3^+} R(x)$

(e) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

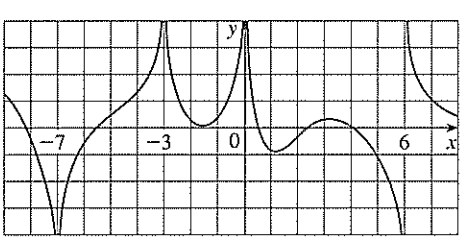


9. En el caso de la función f cuya gráfica se muestra, establezca lo siguiente.

(a) $\lim_{x \to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x \to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x \to 6^+} f(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas verticales.

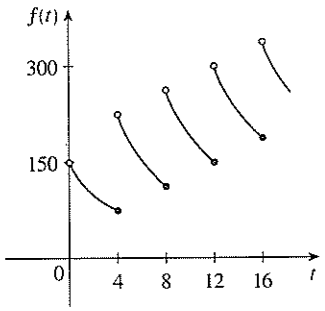


10. Un paciente recibe una inyección de 150 mg de un medicamento cada 4 horas. La gráfica muestra la cantidad $f(t)$ del

medicamento en el torrente sanguíneo, después de t horas.

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \qquad \text{y} \qquad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

y explique el significado de estos límites laterales.



11. Use la gráfica de la función $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ para establecer el valor de cada límite, si es que existe. Si no existe dé la razón.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

12. Trace la gráfica de la función siguiente y úsela para determinar los valores de a para los cuales existe $\lim_{x\to a} f(x)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

13–16 Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que cumpla con todas las condiciones dadas.

13. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2$, $f(1) = 2$

14. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$, $f(2) = 1$, $f(0)$ no está definida

15. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to -2} f(x) = 2$, $f(3) = 3$, $f(-2) = 1$

16. $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 3$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -3$, $f(1) = 1$, $f(4) = -1$

17–20 Suponga el valor del límite (siempre y cuando exista) evaluando la función en los números dados (con seis cifras decimales).

17. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001, 1.9, 1.95, 1.99, 1.995, 1.999$

18. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$, $x = 0, -0.5, -0.9, -0.95, -0.99, -0.999, -2, -1.5, -1.1, -1.01, -1.001$

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$, $x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01$

20. $\lim_{x\to 0^+} x \ln(x + x^2)$, $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$

21–24 Mediante una tabla de valores estime el valor del límite. Si dispone de una calculadora o de una computadora para graficar, úsela para confirmar gráficamente sus resultados.

21. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

22. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

23. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$

24. $\lim_{x\to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

25–32 Determine el límite infinito.

25. $\lim_{x\to -3^+} \dfrac{x+2}{x+3}$

26. $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{x+2}{x+3}$

27. $\lim_{x\to 1} \dfrac{2-x}{(x-1)^2}$

28. $\lim_{x\to 5^-} \dfrac{e^x}{(x-5)^3}$

29. $\lim_{x\to 3^+} \ln(x^2 - 9)$

30. $\lim_{x\to \pi^-} \cot x$

31. $\lim_{x\to 2\pi^-} x \csc x$

32. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

---

33. Determine $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ y $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$

(a) evaluando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para encontrar valores de x que se aproximen a 1 desde la izquierda y desde la derecha.

(b) planteando un razonamiento como en el ejemplo 9 y

(c) a partir de la gráfica de f.

34. (a) Determine las asíntotas verticales de la función

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme su respuesta del inciso (a) graficando la función.

35. (a) Estime el valor del límite $\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$ hasta cinco cifras decimales. ¿Le resulta familiar este número?

(b) Ilustre el inciso (a) dibujando la función $y = (1 + x)^{1/x}$.

36. (a) Grafique la función $f(x) = (\tan 4x)/x$ y realice un acercamiento hacia el punto donde la gráfica cruza el eje y, estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Verificar su respuesta del inciso (a) evaluando $f(x)$ para valores de x que se aproximan a cero.

37. (a) Evalúe la función $f(x) = x^2 - (2^x/1000)$ para $x = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2, 0.1$ y 0.05 y conjeture el valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1000} \right)$$

(b) Evalúe $f(x)$ para $x = 0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.003$ y 0.001. Conjeture de nuevo.

38. (a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.05

(b) Conjeture el valor de $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

(c) Evalúe $h(x)$ para valores cada vez más pequeños de x hasta que finalmente llegue a valores 0 para $h(x)$. ¿Aún está seguro de que lo que conjeturó en el inciso (b) es correcto? Explique por qué obtuvo valores 0 en algún momento. (En la sección 4.4 se explicará un método para evaluar el límite.)

(d) Dibuje la función h en el rectángulo de visualización $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. A continuación haga un acercamiento hasta el punto en que la gráfica cruza el eje y para estimar el límite de $h(x)$ conforme x se aproxima a 0. Prosiga con el acercamiento hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con los resultados del inciso (c).

39. Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ del ejemplo 4 en el rectángulo de visión $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$. Después efectúe varias veces un acercamiento hacia el origen. Comente el comportamiento de esta función.

40. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con velocidad v es

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa de la partícula en reposo y c es la rapidez de la luz. ¿Qué sucede cuando $v \to c^-$?

41. Estime mediante una gráfica las ecuaciones de todas las asíntotas verticales de la curva

$$y = \tan(2 \operatorname{sen} x) \qquad -\pi \leq x \leq \pi$$

Luego determine las ecuaciones exactas de estas asíntotas.

42. (a) Use evidencia numérica y gráfica para conjeturar el valor del límite.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

(b) ¿Qué tan cerca de 1 tiene que estar x para asegurar que la función del inciso (a) esté dentro de una distancia 0.5 respecto de su límite?

2.3 CÁLCULO DE LÍMITES UTILIZANDO LAS LEYES DE LOS LÍMITES

En la sección 2.2 usó calculadoras y gráficas para suponer los valores de los límites, pero fue claro que esos métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección aplicará las siguientes propiedades de los límites, conocidas como *leyes de los límites*, para calcularlos.

LEYES DE LOS LÍMITES Suponga que c es una constante y que los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

existen. En tal caso

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

Estas leyes se pueden expresar en forma verbal como sigue

LEY DE LA SUMA
1. El límite de una suma es la suma de los límites.

LEY DE LA DIFERENCIA
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites.

LEY DE MÚLTIPLO CONSTANTE
3. El límite de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por el límite de la función

LEY DEL PRODUCTO
4. El límite de un producto es el producto de los límites.

LEY DEL COCIENTE
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea cero).

Es fácil creer que estas propiedades son verdaderas. Por ejemplo, si $f(x)$ está cercano a L y $g(x)$ lo está de M, resulta razonable concluir que $f(x) + g(x)$ está cercano a $L + M$. Esto da una base intuitiva para creer que la ley 1 es verdadera. En la sección 2.4 aparece una definición precisa de límite; la cual se utilizará para demostrar esta ley. Las demostraciones de las leyes restantes se proporcionan en el apéndice F.

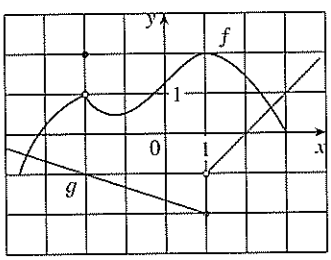


FIGURA 1

EJEMPLO 1 Use las leyes de los límites y las gráficas de f y g de la figura 1 para evaluar los límites siguientes, si existen.

(a) $\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ (c) $\lim_{x \to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

SOLUCIÓN

(a) A partir de las gráficas de f y g,

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -2} g(x) = -1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -2} [f(x) + 5g(x)] = \lim_{x \to -2} f(x) + \lim_{x \to -2} [5g(x)] \qquad \text{(por la ley 1)}$$

$$= \lim_{x \to -2} f(x) + 5 \lim_{x \to -2} g(x) \qquad \text{(por la ley 3)}$$

$$= 1 + 5(-1) = -4$$

(b) Observe que $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x \to 1} g(x)$ no existe porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes:

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 1^+} g(x) = -1$$

De suerte que no es posible usar la ley 4 para el límite deseado. Pero puede usar la ley 4 para los límites laterales:

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \qquad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

los límites izquierdo y derecho no son iguales, así $\lim_{x \to 1} [f(x)g(x)]$ no existe.

(c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

Ya que el límite del denominador es 0, no puede aplicar la ley 5. El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a cero en tanto que el numerador tiende a un número no cero. □

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Si aplica la ley del producto repetidas veces, con $g(x) = f(x)$, obtiene la ley siguiente:

LEY DE LA POTENCIA

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ en donde n es un entero positivo

En la aplicación de estas seis leyes de los límites, necesita usar dos límites especiales:

7. $\lim_{x \to a} c = c$ **8.** $\lim_{x \to a} x = a$

Estos límites son evidentes desde un punto de vista intuitivo (establézcalos verbalmente o dibuje $y = c$ y $y = x$), pero demostraciones en términos de la definición precisa se piden en los ejercicios de la sección 2.4.

Si en la ley 6 pone ahora $f(x) = x$ y aplica la Ley 8, obtiene otro límite especial útil.

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

Se cumple un límite similar para las raíces, como sigue. (En el caso de las raíces cuadradas la demostración se delinea en el ejercicio 37 de la sección 2.4.)

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo

(Si n es par, considere que $a > 0$.)

De modo más general, tiene la siguiente ley, que es verificada como una consecuencia de la ley 10 en la sección 2.5.

LEY DE LA RAÍZ

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo

[Si n es par, suponga que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

EJEMPLO 2 Evalúe los límites siguientes y justifique cada paso.

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4)$ (b) $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

SOLUCIÓN

(a) $\lim_{x \to 5} (2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x \to 5} (2x^2) - \lim_{x \to 5} (3x) + \lim_{x \to 5} 4$ (por las leyes 2 y 1)

$= 2 \lim_{x \to 5} x^2 - 3 \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 4$ (por la 3)

$= 2(5^2) - 3(5) + 4$ (por las 9, 8 y 7)

$= 39$

NEWTON Y LOS LÍMITES

Isaac Newton nació el día de Navidad, en 1642, el año en que murió Galileo. Cuando ingresó a la Universidad de Cambridge, en 1661, no sabía mucho de matemáticas, pero aprendió con rapidez leyendo a Euclides y Descartes y asistiendo a las conferencias de Isaac Barrow. Cambridge se cerró debido a la plaga de 1665 y 1666, y Newton regresó a casa a reflexionar en lo que había aprendido. Esos dos años fueron asombrosamente productivos porque hizo cuatro de sus principales descubrimientos: 1) su representación de funciones como sumas de series infinitas, incluyendo el teorema del binomio; 2) su trabajo sobre el cálculo diferencial e integral; 3) sus leyes del movimiento y la ley de la gravitación universal y 4) sus experimentos del prisma acerca de la naturaleza de la luz y del color. Debido a cierto temor a la controversia y a la crítica, se mostró renuente a publicar sus descubrimientos y no fue sino hasta 1687, a instancias del astrónomo Halley, que publicó *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton expuso su versión del cálculo y lo usó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, así como para explicar el movimiento de los planetas y de los cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en las operaciones para hallar las áreas y los volúmenes que realizaron los antiguos eruditos griegos, como Eudoxo y Arquímedes. Aun cuando los aspectos de la idea de límite se encuentran implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxo y Arquímedes nunca formularon explícitamente el concepto de límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Fermat y Barrow, los precursores inmediatos de Newton en el desarrollo del cálculo, no usaron los límites. Isaac Newton fue el primero en hablar explícitamente al respecto. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se acercan más que cualquier diferencia dada". Newton expresó que el límite era el concepto básico del cálculo, pero fue tarea de matemáticos posteriores, como Cauchy, aclarar sus ideas acerca de los límites.

(b) Empiece con la ley 5, pero su aplicación sólo se justifica plenamente en la etapa final, cuando los límites del numerador y del denominador existen, y este último no es 0.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5-3x)} \qquad \text{(por la ley 5)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -2}x^3+2\lim\limits_{x\to -2}x^2-\lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}5-3\lim\limits_{x\to -2}x} \qquad \text{(por las 1, 2 y 3)}$$

$$=\frac{(-2)^3+2(-2)^2-1}{5-3(-2)} \qquad \text{(por las 9, 8 y 7)}$$

$$=-\frac{1}{11}$$

□

NOTA Si $f(x)=2x^2-3x+4$, entonces $f(5)=39$. En otras palabras, habría obtenido la respuesta correcta del ejemplo 2(a) sustituyendo x con 5. De manera análoga, la sustitución directa da la respuesta correcta en el inciso (b). Las funciones del ejemplo 2 son un polinomio y una función racional, respectivamente y el uso semejante de las leyes de los límites prueba que la sustitución directa siempre funciona para este tipo de funciones (vea los ejercicios 53 y 54). Este hecho se expresa del modo siguiente:

PROPIEDAD DE SUSTITUCIÓN DIRECTA Si f es un polinomio o una función racional y a está en el dominio de f, en consecuencia

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman *continuas en a* y se estudian en la sección 2.5. Sin embargo, no todos los límites se pueden evaluar por sustitución directa, como los ejemplos siguientes hacen ver.

EJEMPLO 3 Encuentre $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

SOLUCIÓN Sea $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$. No puede hallar el límite al sustituir $x=1$ porque $f(1)$ no está definido. tampoco puede aplicar la ley del cociente porque el límite del denominador es 0. En lugar de ello, necesita algo de álgebra preliminar. Factorice el numerador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x-1$. Cuando toma el límite a medida que x tiende a 1, tiene $x\neq 1$ y, por lo tanto, $x-1\neq 0$. Por consiguiente, cancele el factor común y calcule el límite como sigue:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

El límite de este ejemplo surgió en la sección 2.1, cuando trató de hallar la tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto $(1, 1)$. □

NOTA En el ejemplo 3 fue capaz de calcular el límite sustituyendo la función dada $f(x)=(x^2-1)/(x-1)$ por una función más sencilla, $g(x)=x+1$, con el mismo límite.

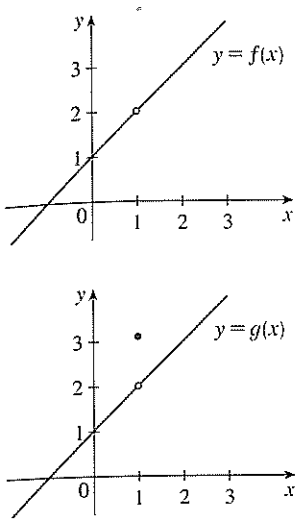


FIGURA 2
Las gráficas de las funciones f (del ejemplo 3) y g (del ejemplo 4)

Esto es válido porque $f(x) = g(x)$ excepto cuando $x = 1$, y al calcular un límite conforme x se aproxima a 1 no se considera qué sucede cuando x es en realidad *igual* a 1. En general tiene el hecho útil siguiente.

> Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$, en caso de que exista el límite.

EJEMPLO 4 Encuentre $\lim_{x \to 1} g(x)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ \pi & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN En este caso, g está definida en $x = 1$ y $g(1) = \pi$, pero el valor de un límite cuando x tiende a 1 no depende del valor de la función en 1. Como $g(x) = x + 1$ para $x \neq 1$,

$$\lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$ □

Advierta que los valores de las funciones de los ejemplos 3 y 4 son idénticos, excepto cuando $x = 1$ (véase la figura 2), de modo que tienen el mismo límite cuando x tiende a 1.

EJEMPLO 5 Evalúe $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^2 - 9}{h}$.

SOLUCIÓN Si define

$$F(h) = \frac{(3 + h)^2 - 9}{h}$$

en tal caso, como en el ejemplo 3, no puede calcular $\lim_{h \to 0} F(h)$ haciendo $h = 0$, ya que $F(0)$ no está definido. Pero si simplifica $F(h)$ algebraicamente, encuentra que

$$F(h) = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

(Recuerde que sólo se considera $h \neq 0$ cuando se hace que h tienda a 0.) De este modo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{(3 + h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \to 0} (6 + h) = 6$$ □

EJEMPLO 6 Encuentre $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

SOLUCIÓN No puede aplicar la ley del cociente de inmediato, puesto que el límite del denominador es 0. En el presente caso, el álgebra preliminar consiste en la racionalización del numerador:

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} &= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2 + 9} + 3\right)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \to 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Este cálculo confirma lo que se conjeturó en el ejemplo 2 de la sección 2.2. □

Lo mejor para calcular algunos límites es hallar en primer lugar los límites por la izquierda y por la derecha. El teorema siguiente es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 2.2. Afirma que existe un límite bilateral si y sólo si los dos límites laterales existen y son iguales.

1 TEOREMA $\lim_{x \to a} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Cuando calculamos un límite lateral aplicamos el hecho de que las Leyes de los Límites también se cumplen para los límites de este tipo.

EJEMPLO 7 Demuestre que $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Como $|x| = x$ para $x > 0$, tiene

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, tiene $|x| = -x$ y, por consiguiente,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

En consecuencia, por el teorema 1,

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0$$

□

Según la figura 3, el resultado del ejemplo 7 parece plausible.

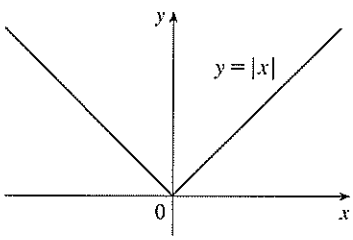


FIGURA 3

EJEMPLO 8 Compruebe que $\lim_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

SOLUCIÓN

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Como los límites por la derecha y por la izquierda son diferentes, por el teorema 1 se concluye que $\lim_{x \to 0} |x|/x$ no existe. La figura 4 muestra la gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ y apoya los límites laterales que encontró. □

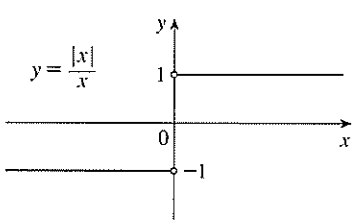


FIGURA 4

EJEMPLO 9 Si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - 4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

determine si existe $\lim_{x \to 4} f(x)$.

SOLUCIÓN Puesto que $f(x) = \sqrt{x - 4}$ para $x > 4$, tiene

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \sqrt{4 - 4} = 0$$

Se demuestra en el ejemplo 3 de la sección 2.4 que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

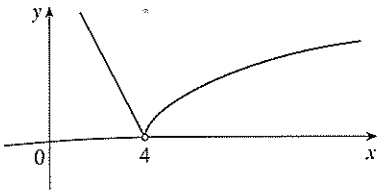


FIGURA 5

Puesto que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, tiene

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0$$

Los límites del lado derecho y del lado izquierdo son iguales. Por lo tanto, el límite existe y

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de f se ilustra en la figura 5. □

■ Otras expresiones para $[\![x]\!]$ son $[x]$ y $\lfloor x \rfloor$. A la función entero máximo algunas veces se le llama la *función piso*.

EJEMPLO 10 La **función entero máximo** se define como $[\![x]\!]$ = el entero más grande que es menor o igual que x. (Por ejemplo, $[\![4]\!] = 4$, $[\![4.8]\!] = 4$, $[\![\pi]\!] = 3$, $\left[\!\left[\sqrt{2}\right]\!\right] = 1$, $\left[\!\left[-\frac{1}{2}\right]\!\right] = -1$.) Demuestre que $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe.

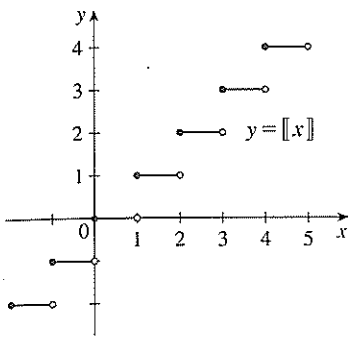


FIGURA 6
Función máximo entero

SOLUCIÓN En la figura 6 se muestra la gráfica de la función entero máximo. Puesto que $[\![x]\!] = 3$ para $3 \leq x < 4$, tiene

$$\lim_{x \to 3^+} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3$$

Dado que $[\![x]\!] = 2$ para $2 \leq x < 3$, tiene

$$\lim_{x \to 3^-} [\![x]\!] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2$$

En virtud de que estos límites unilaterales no son iguales, por el teorema 1, $\lim_{x \to 3} [\![x]\!]$ no existe. □

En los dos teoremas siguientes se dan dos propiedades adicionales de los límites. Sus demostraciones se proporcionan en el apéndice F.

2 TEOREMA Si $f(x) \leq g(x)$, cuando x está cerca de a (excepto posiblemente en a), y los límites de f y g existen cuando x tiende a a, por lo tanto

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

3 TEOREMA DE LA COMPRESIÓN Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, cuando x está cerca de a (excepto quizá en a) y

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

en tal caso

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

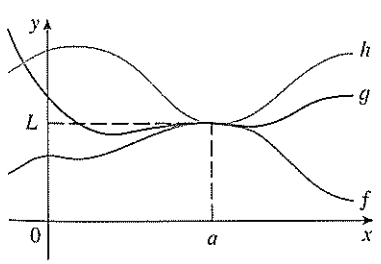


FIGURA 7

En la figura 7 se ilustra el teorema de la compresión, a veces conocido como teorema del emparedado o del apretón. Afirma que si $g(x)$ se comprime entre $f(x)$ y $h(x)$, cerca de a, y si f y h tienen el mismo límite L en a, por lo tanto es forzoso que g tenga el mismo límite L en a

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 11 Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN En primer lugar, note que **no puede** aplicar

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

porque $\lim_{x \to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ no existe (véase el ejemplo 4, en la sección 2.2). Sin embargo, como

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant 1$$

tiene, como se ilustra mediante la figura 8,

$$-x^2 \leqslant x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} \leqslant x^2$$

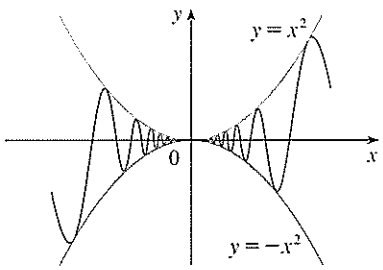


FIGURA 8
$y = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$

Sabe que

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0} (-x^2) = 0$$

Al tomar $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ y $h(x) = x^2$ en el teorema de la compresión, obtiene

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$$ □

2.3 EJERCICIOS

1. Dado que

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x \to 2} h(x) = 0$$

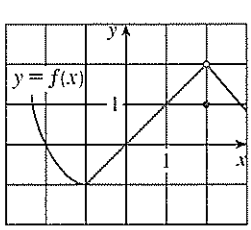
encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

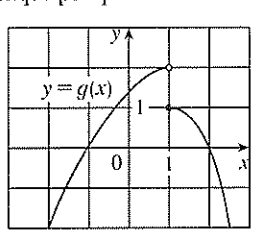
(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x \to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x \to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Se dan las gráficas de f y g. Úselas para evaluar cada límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.





(a) $\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x \to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x \to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x \to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x \to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Evalúe el límite y justifique cada etapa indicando la(s) ley(es) de los límites apropiada(s).

3. $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$ **4.** $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$

5. $\lim_{x \to 8} \left(1 + \sqrt[3]{x}\right)(2 - 6x^2 + x^3)$ **6.** $\lim_{t \to -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5$

7. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4} \right)^3$ **8.** $\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9. $\lim_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

10. (a) ¿Qué está incorrecto en la ecuación siguiente?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) En vista del inciso (a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

11–30 Evalúe el límite, si existe.

11. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t \to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

17. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

18. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

19. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

21. $\lim_{t \to 9} \dfrac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

22. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

23. $\lim_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

24. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

26. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t} \right)$

27. $\lim_{x \to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

30. $\lim_{x \to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

dibujando la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

(b) Haga una tabla de valores de $f(x)$ para x cerca de 0 e intente el valor del límite.

(c) Use las leyes de los límites para probar que su conjetura es correcta.

32. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$ hasta dos cifras decimales.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

(c) Utilice las leyes de los límites para hallar el valor exacto del límite.

33. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que $\lim_{x \to 0} x^2 \cos 20\pi x = 0$. Ilustre dibujando las funciones $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ y $h(x) = x^2$ en la misma pantalla.

34. Aplique el teorema de la compresión para demostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0$$

Ilustre dibujando las funciones f, g y h (en la notación de ese teorema) en la misma pantalla.

35. Si $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ para $x \geq 0$, hallar el $\lim_{x \to 4} f(x)$.

36. Si $2x \leq g(x) \leq x^4 - x^2 + 2$ para toda x, valorar el $\lim_{x \to 1} g(x)$.

37. Demuestre que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

38. Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

39–44 Determine el límite, si acaso existe. Si el límite no existe explique la razón.

39. $\lim_{x \to 3} (2x + |x - 3|)$

40. $\lim_{x \to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

41. $\lim_{x \to -0.5} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

42. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

43. $\lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

44. $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

45. La *función signum* o *signo* se denota mediante sgn y se define como

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Trace la gráfica de esta función.

(b) Calcule cada uno de los límites siguientes o explique por qué no existe.

(i) $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$

(iii) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x|$

46. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

(b) ¿Existe $\lim_{x \to 2} f(x)$?

(c) Trace la gráfica de f.

47. Sea $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$.

(a) Encuentre

(i) $\lim_{x \to 1^+} F(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1^-} F(x)$

(b) ¿Existe $\lim_{x\to 1} F(x)$?

(c) Trace la gráfica de F.

48. Sea

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada uno de los límites siguientes, si es que existe.

(i) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x\to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$

(iv) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x\to 2} g(x)$

(b) Trace la gráfica de g.

49. (a) Si el símbolo $[\![\ ]\!]$ denota la función entero máximo definida en el ejemplo 10, evalúe

(i) $\lim_{x\to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x\to -2.4} [\![x]\!]$

(b) Si n es un entero, evalúe

(i) $\lim_{x\to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x\to n^+} [\![x]\!]$

(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\lim_{x\to a} [\![x]\!]$?

50. Sea $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Trace la gráfica de f

(b) Evalúe cada límite, si es que existe.

(i) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x\to (\pi/2)^-} f(x)$

(iii) $\lim_{x\to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$

(c) ¿Para cuáles valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$?

51. Si $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, demuestre que $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe pero no es igual a $f(2)$.

52. En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como función de su velocidad v respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la rapidez de la luz. Encuentre $\lim_{v\to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué se necesita un límite por la izquierda?

53. Si p es un polinomio, demuestre que $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.

54. Si r es una función racional, aplique el resultado del ejercicio 53 para demostrar que $\lim_{x\to a} r(x) = r(a)$, para todo número a en el dominio de r.

55. Si $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, hallar $\lim_{x\to 1} f(x)$.

56. Si $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, hallar los límites que siguen.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

57. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

58. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque no existan ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

59. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x\to a} [f(x)g(x)]$ puede existir aunque no existan ni $\lim_{x\to a} f(x)$ ni $\lim_{x\to a} g(x)$.

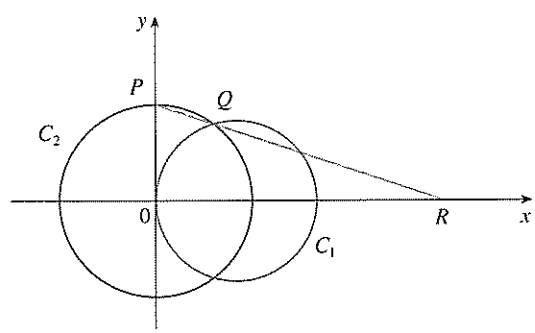
60. Evalúe $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

61. ¿Hay un número a tal que

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Si es así, encuentre los valores de a y del límite.

62. En la figura se muestra un círculo fijo C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y un círculo C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x. ¿Qué le sucede a R al contraerse C_2; es decir, cuando $r \to 0^+$?



2.4 DEFINICIÓN EXACTA DE UN LÍMITE

La definición intuitiva de un límite que se presenta en la sección 2.2 es inaceptable en algunos casos porque son vagas frases como "x se acerca a 2" y "$f(x)$ se acerca más y más a L". Con objeto de ser capaz de demostrar en forma concluyente que

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10\,000} \right) = 0.0001 \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

tiene que definir un límite en forma precisa.

Para impulsar la definición precisa de un límite considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

De manera intuitiva es evidente que cuando x se acerca a 3 pero $x \neq 3$, en tal caso $f(x)$ está cerca de 5 y así $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Con el fin de obtener más detalles con respecto a cómo varía $f(x)$ cuando x se acerca a 3, se plantean las cuestiones siguientes:

¿Qué tan cerca de 3 tiene que estar x para que $f(x)$ difiera de 5 en menos de 0.1?

▪ El uso de la letra griega δ (delta) ya es una costumbre en esta situación.

La distancia de x a 3 es $|x - 3|$ y la distancia desde $f(x)$ a 5 es $|f(x) - 5|$, de modo que el problema es encontrar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad |x - 3| < \delta \quad \text{pero } x \neq 3$$

Si $|x - 3| > 0$, por lo tanto $x \neq 3$, de modo que una formulación equivalente del problema es determinar un número δ tal que

$$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < \delta$$

Observe que si $0 < |x - 3| < (0.1)/2 = 0.05$, entonces

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 0.1$$

es decir, $$|f(x) - 5| < 0.1 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.05$$

De este modo, una respuesta al problema lo da $\delta = 0.05$; es decir, si x está dentro de una distancia de 0.05 desde 3, después $f(x)$ estará dentro de una distancia de 0.1 desde 5.

Si cambia la cantidad 0.1 del problema por una cantidad menor 0.01, luego de aplicar el mismo método se encuentra que $f(x)$ diferirá de 5 por menos de 0.01 siempre que x difiera de 3 en menos de $(0.01)/2 = 0.005$:

$$|f(x) - 5| < 0.01 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.005$$

De manera igual,

$$|f(x) - 5| < 0.001 \qquad \text{si} \qquad 0 < |x - 3| < 0.0005$$

Las cantidades 0.1, 0.01 y 0.001 consideradas como *tolerancias de error* que podría permitir. Para que 5 sea el límite exacto de $f(x)$ cuando x tiende a 3, tiene no sólo que ser capaz de llevar la diferencia entre $f(x)$ y 5 por abajo de cada una de estas tres cantidades; tiene que

conservar abajo a *cualquier* número positivo. Y de acuerdo con el mismo razonamiento, ¡claro que es posible! Si escribe ε (la letra griega épsilon) para que represente un número positivo arbitrario, después se encuentra al igual que antes que

$$\boxed{1} \qquad |f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

Ésta es una forma exacta de decir que $f(x)$ está cerca de 5 cuando x se acerca a 3 porque (1) establece que es posible hacer que los valores de $f(x)$ queden dentro de una distancia arbitraria ε a partir de 5 conservando los valores de x dentro de una distancia $\varepsilon/2$ a partir de 3 (pero $x \neq 3$).

Observe que otra forma de (1) es:

$$\text{si} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta \quad (x \neq 3) \quad \text{en tal caso} \quad 5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$$

lo cual se ilustra en la figura 1. Al hacer que los valores de x ($\neq 3$) queden en el intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$ es posible hacer que los valores de $f(x)$ se ubiquen en el intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Si utiliza (1) como modelo da una definición exacta de un límite.

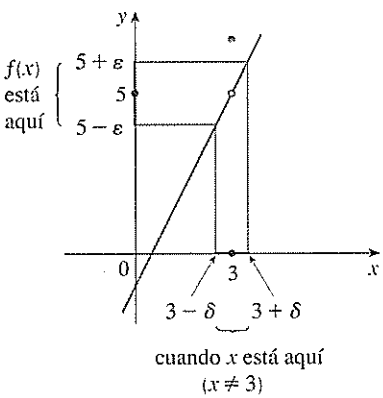


FIGURA 1

[2] DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. En consecuencia puede decir que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es L**, y escriba

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{en tal caso} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Puesto que $|x - a|$ es la distancia desde x hasta a y $|f(x) - L|$ es la distancia desde $f(x)$ hasta L y como ε puede ser arbitrariamente pequeño, la definición de un límite se puede expresar en palabras como se indica a continuación:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quiere decir que la distancia entre $f(x)$ y L puede hacerse pequeña en forma arbitraria al hacer que la distancia desde x hasta a sea suficientemente pequeña (pero no 0).

Otra posibilidad es

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden ser tan cercanos como quiera a L al hacer que x se acerque lo suficiente a a (pero que no sea igual a a).

Asimismo, puede replantear la definición 2 en términos de intervalos si observa que la desigualdad $|x - a| < \delta$ equivale a $-\delta < x - a < \delta$, que a su vez se puede escribir como $a - \delta < x < a + \delta$. También $0 < |x - a|$ es verdadera si y sólo si $x - a \neq 0$ es decir, $x \neq a$. De manera similar, la desigualdad $|f(x) - L| < \varepsilon$ equivale al par de desigualdades $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Por lo tanto, en términos de intervalos, la definición 2 se puede plantear como sigue:

> $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$ (sin que importe lo pequeño que sea ε) puede encontrar una $\delta > 0$ tal que si x está en el intervalo abierto $(a - \delta, a + \delta)$ y $x \neq a$, por lo tanto $f(x)$ queda en el intervalo abierto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

La interpretación geométrica de este enunciado se consigue representando una función mediante un diagrama de flechas como en la figura 2, donde f mapea un subconjunto de $\mathbb{R}$ en otro subconjunto de $\mathbb{R}$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

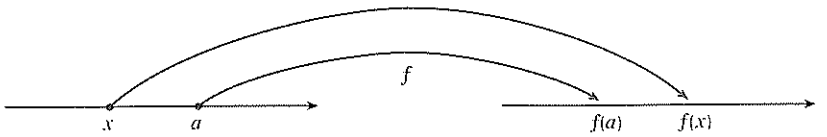


FIGURA 2

La definición de límite establece que si cualquier intervalo pequeño $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ está alrededor de L, en seguida es posible encontrar un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ alrededor de a tal que f mapea todos los puntos en $(a - \delta, a + \delta)$ (excepto quizá a) en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. Véase figura 3.

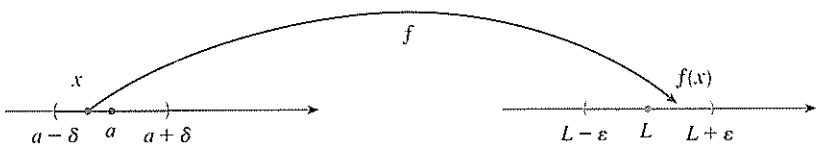


FIGURA 3

Otra interpretación geométrica de los límites se puede hacer en términos de la gráfica de la función. Si se tiene $\varepsilon > 0$ después trace las rectas horizontales $y = L + \varepsilon$ y $y = L - \varepsilon$ y la gráfica de f (véase figura 4). Si $\lim_{x \to a} f(x) = L$, por lo tanto puede encontrar un número $\delta > 0$ tal que si restringe a x a que quede en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ y hace $x \neq a$, en seguida la curva $y = f(x)$ está entre las rectas $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$. (Véase figura 5.) Usted puede ver que si se ha encontrado tal δ en tal caso cualquier δ más pequeña también funcionará.

Es importante darse cuenta que el proceso ilustrado en las figuras 4 y 5 debe funcionar para *todo* número positivo ε sin que importe qué tan pequeño sea. En la figura 6 se ilustra que si se elige un ε más pequeño, en seguida se podría requerir una δ más pequeña.

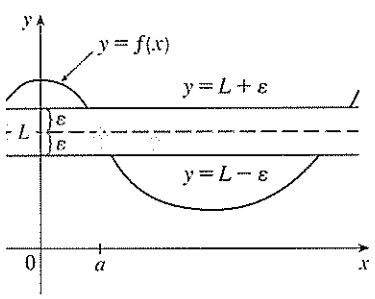


FIGURA 4

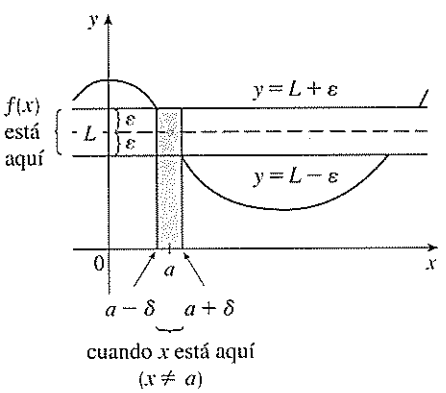


FIGURA 5

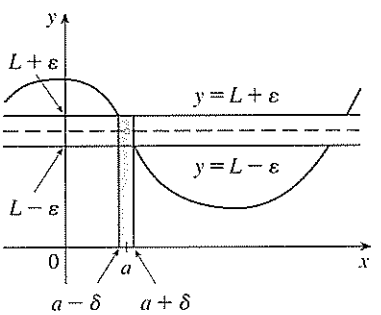


FIGURA 6

EJEMPLO 1 Utilice una gráfica para encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

En otras palabras, encuentre un número δ que corresponda a $\varepsilon = 0.2$ en la definición de un límite para la función $f(x) = x^3 - 5x + 6$ en donde $a = 1$ y $L = 2$.

SOLUCIÓN Una gráfica de f se presenta en la figura 7; está interesado en la región cercana al punto (1, 2). Observe que puede volver a escribir la desigualdad

$$|(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

como

$$1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

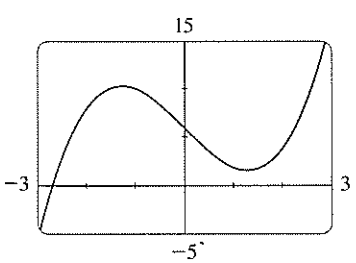


FIGURA 7

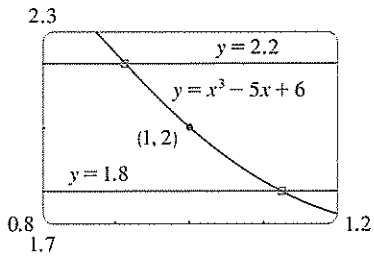


FIGURA 8

También, necesita establecer los valores de x para los cuales la curva $y = x^3 - 5x + 6$ se sitúa entre las horizontales $y = 1.8$ y $y = 2.2$. Por lo tanto, grafique las curvas $y = x^3 - 5x + 6$, $y = 1.8$ y $y = 2.2$ cerca del punto $(1, 2)$ en la figura 8. Luego utilice el cursor para estimar que la coordenada x del punto donde se cortan la recta $y = 2.2$ y la curva $y = x^3 - 5x + 6$ está por 0.911. De igual manera, $y = x^3 - 5x + 6$ corta la recta $y = 1.8$ cuando $x \approx 1.124$. De este modo, al redondear para estar seguro, puede decir que

$$\text{si} \quad 0.92 < x < 1.12 \quad \text{en seguida} \quad 1.8 < x^3 - 5x + 6 < 2.2$$

Este intervalo $(0.92, 1.12)$ no es simétrico con respecto a $x = 1$. La distancia desde $x = 1$ hasta el extremo izquierdo es $1 - 0.92 = 0.08$ y la distancia hasta el extremo derecho es 0.12. Puede escoger δ para que sea la más pequeña de estos números, es decir, $\delta = 0.08$. Luego puede reescribir las desigualdades en términos de distancias como sigue:

$$\text{si} \quad |x - 1| < 0.08 \quad \text{después} \quad |(x^3 - 5x + 6) - 2| < 0.2$$

Esto dice justamente que al mantener a x dentro del 0.08 de 1, es capaz de conservar a $f(x)$ dentro de 0.2 de 2. $f(x)$

Aunque elija $\delta = 0.08$, cualquier valor positivo más pequeño de δ además habría funcionado. □

El procedimiento gráfico del ejemplo 1 ilustra la definición para $\varepsilon = 0.2$, pero no *demuestra* que el límite es igual a 2. Una demostración tiene que proporcionar una δ para *cada* ε.

Para mejorar los enunciados de límite sería útil pensar en la definición de límite como un desafío. Primero lo retan con un número ε. Después usted debe ser capaz de obtener una δ adecuada. Debe ser capaz de hacerlo para *toda* $\varepsilon > 0$, no sólo para una ε en particular.

Considere una contienda entre dos personas A y B, piense que usted es B. La persona A estipula que se debe aproximar al número fijo L por medio de valores de $f(x)$ dentro de un grado de exactitud ε (por ejemplo 0.01). Por lo tanto, la persona B responde determinando un número δ tal que $0 < |x - a| < \delta$ siempre que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Luego A podría volverse más exigente y desafiar a B con un valor más pequeño de ε, por ejemplo, 0.0001. Una vez más, B tiene que responder encontrando una δ correspondiente. Por lo regular, a medida que el valor de ε es más pequeño, es menor el correspondiente valor de δ. Si B siempre gana, sin importar qué tan pequeño haga A a ε, en seguida $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

EJEMPLO 2 Demuestre que $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

SOLUCIÓN

1. *Análisis preliminar del problema (adivinar un valor de δ).* Sea ε un número positivo dado. Quiere encontrar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Pero $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$. Por lo tanto, quiere

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{en tal caso} \quad 4|x - 3| < \varepsilon$$

$$\text{es decir,} \quad \text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{en consecuencia} \quad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$$

Esto hace pensar que debe escoger $\delta = \varepsilon/4$.

2. *Comprobación (presentación de que esta δ funciona).* Dado $\varepsilon > 0$, elija $\delta = \varepsilon/4$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, después

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

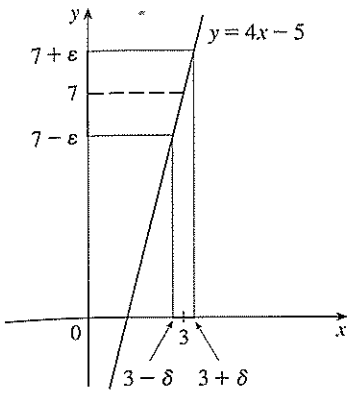


FIGURA 9

Por esto,

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{por consiguiente} \quad |(4x - 5) - 7| < \varepsilon$$

Por lo tanto, de acuerdo con la definición de límite,

$$\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$$

Este ejemplo se ilustra en la figura 9. □

Observe que en la solución del ejemplo 2 hay dos etapas: adivinar y ensayar. Efectuó un análisis preliminar que posibilitó suponer un valor de δ. Pero luego, en la segunda etapa, tuvo que regresar y comprobar en forma cuidadosa y lógica que dio una opinión correcta. Este procedimiento es característico de gran parte de la matemática. Algunas veces se necesita hacer primero una conjetura inteligente con respecto a la respuesta de un problema y luego demostrar que la suposición es correcta.

Las definiciones intuitivas de límites unilaterales que se presentan en la sección 2.2 se pueden reformular exactamente como se señala a continuación

3 DEFINICIÓN DE LÍMITE IZQUIERDO

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a - \delta < x < a \quad \text{en tal caso} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

4 DEFINICIÓN DE LÍMITE DERECHO

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad a < x < a + \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observe que la definición 3 es la misma que la definición 2 salvo que x está restringida a estar en la mitad *izquierda* $(a - \delta, a)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. En la definición 4, x tiene que estar en la mitad *derecha* $(a, a + \delta)$ del intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

EJEMPLO 3 Mediante la definición 4 demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

SOLUCIÓN

1. *Adivinar un valor de* δ. Sea ε un número positivo dado. Aquí $a = 0$ y $L = 0$, de modo que busca un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{entonces} \quad |\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

es decir,

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{luego entonces} \quad \sqrt{x} < \varepsilon$$

CAUCHY Y LOS LÍMITES

Después de la invención del cálculo infinitesimal en el siglo XVII, siguió un periodo de libre desarrollo de esta materia en el siglo XVIII. Matemáticos como los hermanos Bernoulli y Euler estaban ansiosos por explotar el poder del cálculo y exploraron con audacia las consecuencias de esta nueva y maravillosa teoría matemática sin preocuparse mucho por si las demostraciones eran correctas del todo.

En cambio, el siglo XIX fue la Época del Rigor en la matemática. Hubo un movimiento para volver a los fundamentos de la materia –para proporcionar definiciones cuidadosas y demostraciones. A la vanguardia de este movimiento se encontraba el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), quien fue primero ingeniero militar antes de convertirse en profesor de matemáticas en París. Cauchy tomó la idea de límite de Newton, idea que el matemático francés Jean d'Alembert había mantenido viva en el siglo XVIII y la hizo más exacta. Su definición de límite era: "Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo para terminar diferenciándose de éste por tan poco como uno quiere, esto se llama *límite* de todos los otros." Pero cuando Cauchy aplicaba esta definición en ejemplos y demostraciones utilizaba a menudo desigualdades delta-épsilon similares a las de esta sección. Una demostración representativa de Cauchy inicia con: "Denótese mediante δ y ε dos números muy pequeños; . . ." Utilizaba ε debido a la correspondencia entre épsilon y la palabra francesa *erreur*. Posteriormente, el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) estableció la definición de un límite exactamente como en la definición de este texto.

o bien, al elevar al cuadrado ambos lados de la desigualdad $\sqrt{x} < \varepsilon$, obtiene

$$\text{si} \quad 0 < x < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad x < \varepsilon^2$$

Esto lleva a pensar que debe elegir $\delta = \varepsilon^2$.

2. *Demostración de que sí trabaja esta* δ. Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon^2$. Si $0 < x < \delta$, después

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

de modo que

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon$$

De acuerdo con la definición 4, esto demuestra que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$. □

EJEMPLO 4 Demuestre que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$.

SOLUCIÓN

1. *Adivinar un valor de* δ. Está dado $\varepsilon > 0$. Debe encontrar un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{en tal caso} \quad |x^2 - 9| < \varepsilon$$

Para relacionar $|x^2 - 9|$ con $|x - 3|$ escriba $|x^2 - 9| = |(x + 3)(x - 3)|$. Luego quiere

$$\text{si} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{entonces} \quad |x + 3|\,|x - 3| < \varepsilon$$

Observe que si puede encontrar una constante positiva C tal que $|x + 3| < C$, después

$$|x + 3|\,|x - 3| < C|x - 3|$$

y puede hacer $C|x - 3| < \varepsilon$ tomando $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$.

Puede determinar tal número C si restringe a x a quedar en un intervalo con centro en 3. En efecto, puesto que está interesado sólo en valores de x que estén cercanos a 3, es razonable suponer que x está a una distancia 1 desde 3, es decir, $|x - 3| < 1$. Por lo tanto $2 < x < 4$, de modo que $5 < x + 3 < 7$. Así, $|x + 3| < 7$, y por eso $C = 7$ es una elección aceptable para la constante.

Pero ahora ya hay dos restricciones en $|x - 3|$, a saber

$$|x - 3| < 1 \qquad \text{y} \qquad |x - 3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Para tener la certeza de que ambas desigualdades se cumplen, haga que δ sea la más pequeña de los dos números 1 y $\varepsilon/7$. La notación para esto es $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$.

2. *Demostración de que esta* δ *funciona.* Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \text{mín}\{1, \varepsilon/7\}$. Si $0 < |x - 3| < \delta$, en tal caso $|x - 3| < 1 \Rightarrow 2 < x < 4 \Rightarrow |x + 3| < 7$ (como en la parte 1). También tiene que $|x - 3| < \varepsilon/7$, de modo que

$$|x^2 - 9| = |x + 3|\,|x - 3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$. □

Como se observa en el ejemplo 4, no siempre es fácil demostrar que son verdaderos los enunciados de límite usando la definición ε, δ. En efecto, si tiene una función más complicada como $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$, una demostración requeriría una gran

cantidad de ingenio. Por fortuna esto es innecesario porque las leyes de los límites establecidas en la sección 2.3 se demuestran usando la definición 2 y luego los límites de funciones complicadas se pueden determinar en forma rigurosa a partir de las leyes de los límites sin recurrir directamente a la definición.

Por ejemplo la ley de la suma: si existen tanto $\lim_{x\to a} f(x) = L$ como $\lim_{x\to a} g(x) = M$ en tal caso

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

Las leyes restantes se demuestran en los ejercicios y en el apéndice F.

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE LA SUMA Se proporciona $\varepsilon > 0$. Es necesario determinar $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

■ Desigualdad triangular

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

(Véase apéndice A.)

Si usa la desigualdad triangular puede escribir

$$\boxed{5} \qquad |f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|$$

Haga que $|f(x) + g(x) - (L + M)|$ sea menor que ε dejando que los términos $|f(x) - L|$ y $|g(x) - M|$ sean menores que $\varepsilon/2$.

Puesto que $\varepsilon/2 > 0$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existe un número $\delta_1 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

De manera similar, puesto que $\lim_{x\to a} g(x) = M$, existe un número $\delta_2 > 0$ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Observe que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad 0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{y} \quad 0 < |x - a| < \delta_2$$

$$\text{de modo que} \qquad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por lo tanto, de acuerdo con (5)

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Para resumir,

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{luego entonces} \quad |f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon$$

De esta manera, según la definición de un límite,

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

□

http://libreria-universitaria.blogspot.com

LÍMITES INFINITOS

Los límites infinitos también se pueden definir de manera exacta. La que sigue es una versión exacta de la definición 4 de la sección 2.2.

6 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto tal vez en a misma. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

quiere decir que para todo número positivo M hay un número positivo δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{en consecuencia} \quad f(x) > M$$

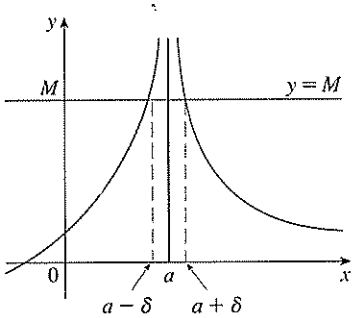


FIGURA 10

Esto establece que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes (más grandes que cualquier número dado M) al acercar x lo suficiente a a (a una distancia δ, donde δ depende de M, pero $x \neq a$). Una representación geométrica se ilustra en la figura 10.

Dada una línea horizontal $y = M$, puede hallar un número $\delta > 0$ tal que si restringe a que x se sitúe en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ donde $x \neq a$, en tal caso la curva $y = f(x)$ queda por arriba de la recta $y = M$. Se puede ver si escoge una M más grande, en consecuencia se requeriría una δ más pequeña.

EJEMPLO 5 Aplique la definición 6 para demostrar que $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

SOLUCIÓN Sea M un número positivo determinado. Busca un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x| < \delta \quad \text{entonces} \quad 1/x^2 > M$$

Pero $$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

También si elige $\delta = 1/\sqrt{M}$ y $0 < |x| < \delta = 1/\sqrt{M}$, entonces $1/x^2 > M$. Esto demuestra que $1/x^2 \to \infty$ cuando $x \to 0$. □

La que sigue es una versión exacta de la definición 5 de la sección 2.2. Se ilustra en la figura 11.

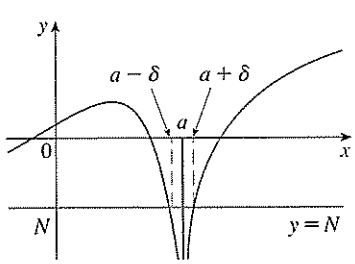


FIGURA 11

7 DEFINICIÓN Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente para a misma. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

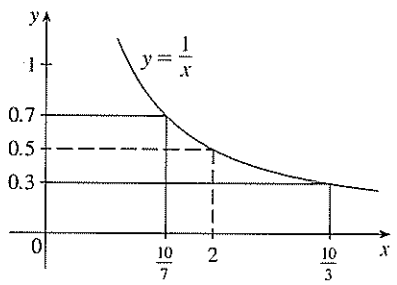
quiere decir que para todo número negativo N hay un número positivo δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad f(x) < N$$

2.4 EJERCICIOS

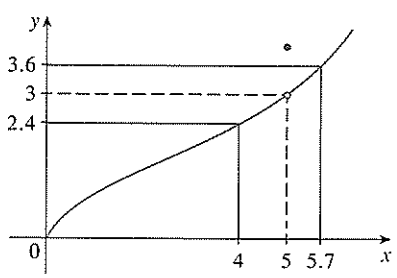
1. Utilice la gráfica dada de $f(x) = 1/x$ para calcular un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 2| < \delta \quad \text{en seguida} \quad \left|\frac{1}{x} - 0.5\right| < 0.2$$



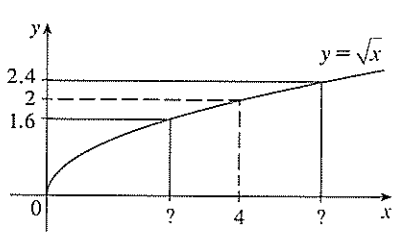
2. Utilice la gráfica dada de f para determinar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 0 < |x - 5| < \delta \quad \text{en consecuencia} \quad |f(x) - 3| < 0.6$$



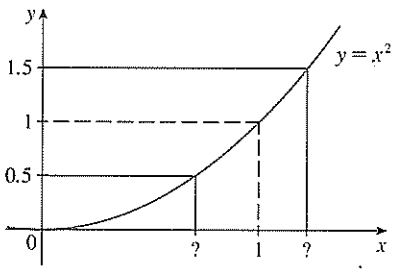
3. Mediante la gráfica dada de $f(x) = \sqrt{x}$ hallar un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 4| < \delta \quad \text{por lo tanto} \quad |\sqrt{x} - 2| < 0.4$$



4. Con la gráfica dada de $f(x) = x^2$ encuentre un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{después} \quad |x^2 - 1| < \tfrac{1}{2}$$



5. Por medio de una gráfica determine un número δ tal que

$$\text{si} \quad \left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta \quad \text{entonces} \quad |\tan x - 1| < 0.2$$

6. Con la ayuda de una gráfica determine un número δ tal que

$$\text{si} \quad |x - 1| < \delta \quad \text{entonces} \quad \left|\frac{2x}{x^2 + 4} - 0.4\right| < 0.1$$

7. Para el límite

$$\lim_{x \to 1} (4 + x - 3x^3) = 2$$

ilustre la definición 2 calculando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon = 0.1$.

8. Para el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ilustre la definición 2 determinando valores de δ que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

9. Teniendo en cuenta que el $\lim_{x \to \pi/2} \tan^2 x = \infty$, explicar la definición 6 hallando valores de δ que corresponda (a) $M = 1\,000$ y (b) $M = 10\,000$.

10. Utilice una gráfica para hallar un número δ tal que

$$\text{si} \quad 5 < x < 5 + \delta \quad \text{entonces} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x - 5}} > 100$$

11. Se requiere un tornero para fabricar un disco circular de metal cuya área sea de 1 000 cm^2.

(a) ¿Qué radio produce dicho disco?

(b) Si al tornero se le permite una tolerancia de error de ± 5 cm^2 en el área del disco, ¿qué tan cercano al radio ideal del inciso (a) debe el tornero controlar el radio?

(c) Según la definición ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

12. Se utiliza un horno de crecimiento de cristales en la investigación para determinar cuál es la mejor manera de fabricar cristales que se usarán en las partes electrónicas de los transbordadores espaciales. Para que el crecimiento de los cristales sea el correcto, la temperatura se tiene que controlar exactamente ajustando la potencia de entrada. Suponga que la relación se representa con

$$T(w) = 0.1w^2 + 2.155w + 20$$

donde T es la temperatura en grados Celsius y w es la entrada de potencia en watts.

(a) ¿Cuánta potencia se requiere para mantener la temperatura a 200°C?

(b) Si se permite una variación de temperatura de hasta ± 1 °C, con respecto a 200°C, ¿qué intervalo de potencia en watts se permite para la potencia de entrada?

(c) De acuerdo con la definición ε, δ de $\lim_{x \to a} f(x) = L$, ¿qué es x? ¿Qué es $f(x)$? ¿Qué es a? ¿Qué es L? ¿Qué valor de ε se da? ¿Cuál es el valor correspondiente de δ?

13. (a) Hallar un número δ tal que si $|x - 2| < \delta$, por lo tanto $|4x - 8| < \varepsilon$, donde $\varepsilon = 0.1$.

(b) Repetir el inciso (a) con $\varepsilon = 0.01$.

14. Teniendo en cuenta que el $\lim_{x \to 2} (5x - 7) = 3$, explicar la definición 2 hallando valores de δ que corresponda a $\varepsilon = 0.1$, $\varepsilon = 0.05$ y $\varepsilon = 0.01$.

15–18 Demuestre el enunciado aplicando la definición ε, δ de límite e ilustre con un diagrama como el de la figura 9.

15. $\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$

16. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2$

17. $\lim_{x \to -3} (1 - 4x) = 13$

18. $\lim_{x \to 4} (7 - 3x) = -5$

19–32 Demuestre el enunciado aplicando la definición ε, δ de límite.

19. $\lim_{x \to 3} \frac{x}{5} = \frac{3}{5}$

20. $\lim_{x \to 6} \left(\frac{x}{4} + 3\right) = \frac{9}{2}$

21. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

22. $\lim_{x \to -1.5} \frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

23. $\lim_{x \to a} x = a$

24. $\lim_{x \to a} c = c$

25. $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

26. $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

27. $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

28. $\lim_{x \to 9^-} \sqrt[4]{9 - x} = 0$

29. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

30. $\lim_{x \to 3} (x^2 + x - 4) = 8$

31. $\lim_{x \to -2} (x^2 - 1) = 3$

32. $\lim_{x \to 2} x^3 = 8$

33. Compruebe que otra elección posible de δ es demostrar que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ en el ejemplo 4 es $\delta = \text{mín}\{2, \varepsilon/8\}$.

34. Verifique mediante un razonamiento geométrico que la elección más grande posible de δ para demostrar que $\lim_{x \to 3} x^2 = 9$ es $\delta = \sqrt{9 + \varepsilon} - 3$.

35. (a) En el caso del límite $\lim_{x \to -1} (x^3 + x + 1) = 3$, determine un valor de δ mediante una gráfica que corresponde a $\varepsilon = 0.4$.

(b) Utilice un sistema algebraico para computadora con el fin de resolver la ecuación cúbica $x^3 + x + 1 = 3 + \varepsilon$, y determinar el valor más grande posible de δ que funciona para cualquier $\varepsilon > 0$.

(c) Use $\varepsilon = 0.4$ en su respuesta del inciso (b) y compare con su respuesta del inciso (a).

36. Demuestre que $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$.

37. Demuestre que $\lim_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ si $a > 0$.

$$\left[\textit{Sugerencia}\text{: utilice } \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}.\right]$$

38. Si H es la función de Heaviside que se definió en el ejemplo 6 de la sección 2.2, demuestre mediante la definición 2 que no existe el $\lim_{t \to 0} H(t)$. [*Sugerencia*: efectúe una demostración indirecta como se indica. Suponga que el límite es L. Haga $\varepsilon = \frac{1}{2}$ en la definición de un límite e intente llegar a una contradicción.]

39. Si la función f se define mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

demuestre que $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe.

40. Mediante la comparación de las definiciones 2, 3 y 4 demuestre el teorema 1 de la sección 2.3.

41. ¿Qué tan cerca a -3 tiene que hacer a x para que

$$\frac{1}{(x + 3)^4} > 10\,000$$

42. Demuestre aplicando la definición 6 que $\lim_{x \to -3} \frac{1}{(x + 3)^4} = \infty$.

43. Demuestre que $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

44. Suponga que $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = c$, donde c es un número real. Demuestre cada proposición.

(a) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \infty$

(b) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \infty$ si $c > 0$

(c) $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = -\infty$ si $c < 0$

2.5 CONTINUIDAD

En la sección 2.3 se le hizo notar que a menudo se puede hallar el límite de una función cuando x tiende a a, con sólo calcular el valor de la función en a. Se dice que las funciones con esta propiedad son *continuas en a*. Ahora verá que la definición matemática de continuidad corresponde íntimamente al significado de la palabra *continuidad* en el lenguaje cotidiano. (Un proceso continuo tiene lugar gradualmente, sin interrupción ni cambio abrupto.)

1 DEFINICIÓN Una función f es **continua en un número** a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Como se ilustra en la figura 1, si f es continua, después los puntos $(x, f(x))$ de la gráfica de f tienden al punto $(a, f(a))$ de la gráfica. Así, no hay brecha alguna en la curva.

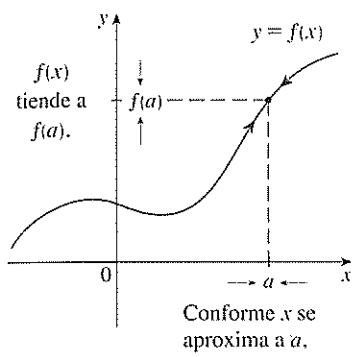


FIGURA 1

Advierta que la definición 1 requiere implícitamente tres cosas si f es continua en a:

1. $f(a)$ está definido (es decir, a está en el dominio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

La definición afirma que f es continua en a si $f(x)$ tiende a $f(a)$ cuando x tiende a a. Así, una función continua tiene la propiedad de que un cambio pequeño en x sólo produce una pequeña alteración en $f(x)$. De hecho, el cambio en $f(x)$ se puede mantener tan pequeño como desee, restringiendo el cambio en x lo necesario.

Si f está definida cerca de a (en otras palabras, f está definida en un intervalo abierto que contiene a, excepto tal vez en a), f es **discontinua en** a (o f tiene una **discontinuidad** en a) si f no es continua en a.

Los fenómenos físicos suelen ser continuos. Por ejemplo, el desplazamiento o la velocidad de un vehículo varían en forma continua con el tiempo, como pasa con la estatura de una persona. Pero en realidad se presentan discontinuidades en situaciones como las corrientes eléctricas. [Vea el ejemplo 6, de la sección 2.2, donde la función de Heaviside es discontinua en 0 porque $\lim_{t \to 0} H(t)$ no existe.]

Geométricamente, una función continua en todo número en un intervalo se puede concebir como una función cuya gráfica no se interrumpe. La gráfica se puede trazar sin levantar la pluma del papel.

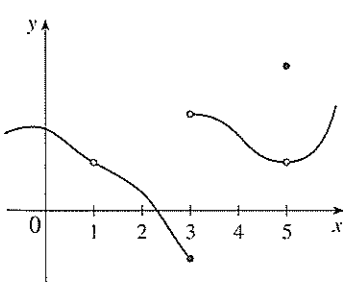


FIGURA 2

EJEMPLO 1 En la figura 2 se muestra la gráfica de una función f. ¿En cuáles números es f discontinua? ¿Por qué?

SOLUCIÓN Se ve como si hubiera una discontinuidad cuando $a = 1$ porque la gráfica tiene una ruptura allí. La razón oficial de que f sea discontinua en 1 es que $f(1)$ no está definido.

La gráfica también tiene una ruptura cuando $a = 3$, pero la razón de la discontinuidad es diferente. En este caso, $f(3)$ está definido, pero $\lim_{x \to 3} f(x)$ no existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes). Por lo tanto, f es discontinua en 3.

¿Qué pasa cuando $x = 5$? En tal caso, $f(5)$ está definido y $\lim_{x \to 5} f(x)$ existe (porque los límites por la izquierda y por la derecha son los mismos). Pero

$$\lim_{x \to 5} f(x) \neq f(5)$$

De este modo, f es discontinua en 5. □

Observe ahora cómo detectar las discontinuidades cuando una fórmula define a la función.

EJEMPLO 2 ¿En dónde son discontinuas cada una de las funciones siguientes?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN

(a) Advierta que $f(2)$ no está definido, también f es discontinua en 2. Más adelante verá por qué es continua en todos los otros números.

(b) En este caso, $f(0) = 1$ está definido pero

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

no existe. (Véase el ejemplo 8 en la sección 2.2.) Así, f es discontinua en 0.

(c) En este caso $f(2) = 1$ está definido y

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3$$

existe. Pero

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$$

por eso, f no es continua en 2.

(d) La función entero máximo $f(x) = [\![x]\!]$ tiene discontinuidades en todos los enteros porque $\lim_{x \to n} [\![x]\!]$ no existe si n es un entero. (Véase el ejemplo 10 y el ejercicio 49 de la sección 2.3.) □

En la figura 3 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 2. En cada caso no se puede dibujar la gráfica sin levantar la pluma del papel, porque se presenta un agujero, una ruptura o un salto en esa gráfica. El tipo de discontinuidad que se ilustra en los incisos (a) y (c) se conoce como **removible** porque la discontinuidad podría eliminarse al redefinir f justo en el número único 2. [La función $g(x) = x + 1$ es continua.] La discontinuidad del inciso (b) recibe el nombre de **discontinuidad infinita**. Las discontinuidades del inciso (d) se llaman **discontinuidad por salto** porque la función "salta" de un valor a otro.

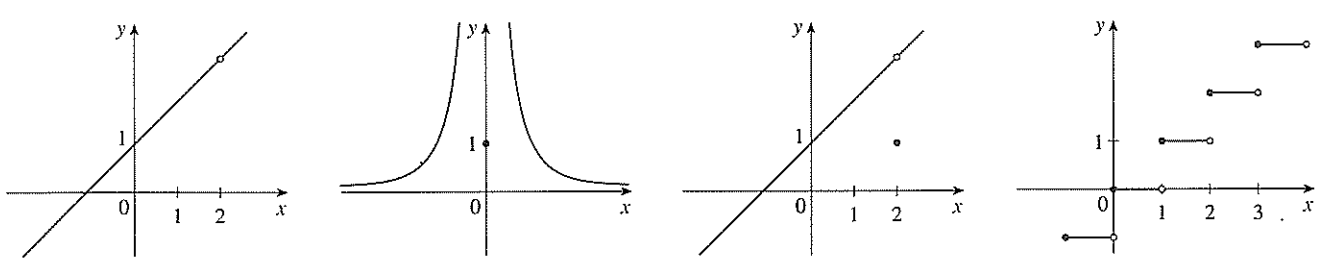


FIGURA 3 Gráficas de las funciones del ejemplo 2

http://libreria-universitaria.blogspot.com

2 DEFINICIÓN Una función f es **continua desde la derecha en un número** a si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es **continua desde la izquierda en** a si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EJEMPLO 3 En cada entero n, la función $f(x) = [\![x]\!]$ [véase la figura 3(d)] es continua desde la derecha pero discontinua desde la izquierda porque

$$\lim_{x \to n^+} f(x) = \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n = f(n)$$

pero $$\lim_{x \to n^-} f(x) = \lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1 \neq f(n)$$ □

3 DEFINICIÓN Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en todo número en el intervalo. (Si f se define únicamente en un lado de un punto extremo del intervalo, *continua* quiere decir *continua desde la derecha* o *continua desde la izquierda*.)

EJEMPLO 4 Demuestre que la función $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo $[-1, 1]$.

SOLUCIÓN Si $-1 < a < 1$ en tal caso, al aplicar las leyes de los límites

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} f(x) &= \lim_{x \to a} \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \sqrt{1 - x^2} && \text{(por las leyes 2 y 7)} \\
&= 1 - \sqrt{\lim_{x \to a} (1 - x^2)} && \text{(por la ley 11)} \\
&= 1 - \sqrt{1 - a^2} && \text{(por las leyes 2, 7 y 9)} \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

De suerte que por la definición 1, f es continua en a si $-1 < a < 1$. Cálculos similares hacen ver que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

de modo que f es continua desde la derecha en -1 y continua desde la izquierda en 1. Por consiguiente, según la definición 3, f es continua sobre $[-1, 1]$.

En la figura 4 se ilustra la gráfica de f. Es la mitad inferior del círculo

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$ □

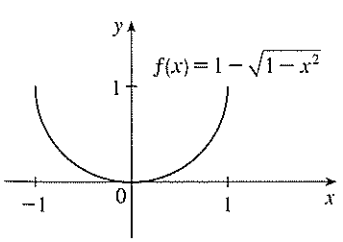


FIGURA 4

En lugar de aplicar siempre las definiciones 1, 2 y 3 para comprobar la continuidad de una función, como en el ejemplo 4, a menudo resulta conveniente aplicar el teorema siguiente, el cual muestra cómo formar funciones continuas complicadas a partir de funciones sencillas.

4 TEOREMA Si f y g son continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en a:

1. $f + g$
2. $f - g$
3. cf
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

DEMOSTRACIÓN Cada una de las cinco partes de este teorema se infieren de la ley de los límites correspondiente de la sección 2.3. Por ejemplo, demuestra la parte 1. Puesto que f y g son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (f + g)(x) &= \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] \\ &= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) \qquad \text{(por la Ley 1)} \\ &= f(a) + g(a) \\ &= (f + g)(a) \end{aligned}$$

Esto muestra que $f + g$ es continua en a. □

Del teorema 4 y la definición 3 se deduce que si f y g son continuas sobre un intervalo, también lo son las funciones $f + g$, $f - g$, cf, fg y (si g nunca es 0) f/g. En la sección 2.3 se enunció el siguiente teorema como propiedad de sustitución directa.

5 TEOREMA

(a) Cualquier polinomio es continuo en todas partes; es decir, es continuo sobre $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

(b) Cualquier función racional es continua, siempre que esté definida; es decir, es continua en su dominio.

DEMOSTRACIÓN

(a) Un polinomio es una función de la forma

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son constantes. Sabe que

$$\lim_{x \to a} c_0 = c_0 \qquad \text{(por la ley 7)}$$

y

$$\lim_{x \to a} x^m = a^m \qquad m = 1.2, \ldots, n \qquad \text{(por la ley 9)}$$

Esta ecuación es precisamente la proposición de que la función $f(x) = x^m$ es una función continua. Por esto, con base en la parte 3 del teorema 4, la función $g(x) = cx^m$ es continua. Dado que P es una suma de funciones de esta forma y una función constante, a partir de la parte 1 del teorema 4 se deduce que P es continua.

(b) Una función racional es una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio de f es $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$. Sabe, del inciso (a), que P y Q son continuas en todas partes. De esta manera, f es continua en todo número en D, de acuerdo con la parte 5 del teorema 4. □

Como ilustración del teorema 5, observe que el volumen de una esfera varía continuamente con su radio porque la fórmula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ hace ver que V es una función polinomial de r. Del mismo modo, si se lanza una pelota verticalmente en el aire, con una velocidad de 50 ft/s, después la fórmula $h = 50t - 16t^2$ expresa la altura de la pelota, en pies, después de t segundos. De nuevo, es una función polinomial, de modo que la altura es una función continua del tiempo transcurrido.

Saber cuáles funciones son continuas permite evaluar algunos límites con mucha rapidez, como demuestra el ejemplo siguiente. Compárelo con el ejemplo 2(b) de la sección 2.3.

EJEMPLO 5 Encuentre $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$.

SOLUCIÓN La función

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

es racional, de modo que por el teorema 5 es continua sobre su dominio, el cual es $\left\{x \mid x \neq \frac{5}{3}\right\}$. En consecuencia

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$$

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

□

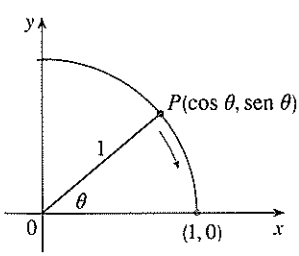


FIGURA 5

Resulta que la mayor parte de las funciones conocidas son continuas en todo número en su dominio. Por ejemplo, la ley de los límites 10 (página 110) es exactamente la proposición de que las funciones raíz son continuas.

Con base en el aspecto de las gráficas de las funciones seno y coseno (figura 18, en la sección 1.2), podría suponer con toda certeza que son continuas. De acuerdo con la definición de sen θ y cos θ sabe que las coordenadas del punto P de la figura 5 son (cos θ, sen θ). Cuando $\theta \to 0$, P tiende al punto (1, 0) y, por consiguiente, cos $\theta \to 1$ y sen $\theta \to 0$. De esta manera

$$\boxed{6} \qquad \lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1 \qquad \lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen}\theta = 0$$

Como cos 0 = 1 y sen 0 = 0, las ecuaciones dadas en (6) afirman que las funciones seno y coseno son continuas en 0. Por lo tanto se pueden aplicar las fórmulas de la adición para coseno y seno para deducir que estas funciones son continuas en todas partes (véase los ejercicios 56 y 57).

De la parte 5 del teorema 4, se deduce que

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

≡ Otra forma de establecer los límites en (6) es usar el teorema de la compresión con la desigualdad sen $\theta < \theta$ (para $\theta > 0$), lo cual se prueba en la sección 3.3.

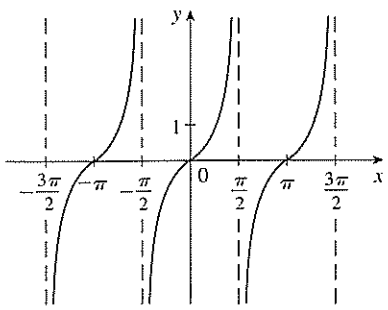


FIGURA 6 $y = \tan x$

es continua excepto donde $\cos x = 0$. Esto sucede cuando x es un múltiplo impar de $\pi/2$, de modo que $y = \tan x$ tiene discontinuidades infinitas cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2$, y así sucesivamente (véase la figura 6).

La función inversa de cualquier función uno a uno continua también es continua. (Este hecho se comprueba en el apéndice F, pero la intuición geométrica lo hace parecer razonable: La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la recta $y = x$. También, si la gráfica de f no tiene ruptura alguna, tampoco la tiene la gráfica de f^{-1}.) De este modo, las funciones trigonométricas inversas son continuas.

En la sección 1.5 se definió la función exponencial $y = a^x$ de modo que se llenaran los agujeros en la gráfica de esta función donde x es racional. En otras palabras, la simple definición de $y = a^x$ la hace una función continua sobre $\mathbb{R}$. Por lo tanto, su función inversa $y = \log_a x$ es continua sobre $(0, \infty)$.

■ En la sección 1.6 se hace un repaso de las funciones trigonométricas inversas.

7 TEOREMA Los tipos siguientes de funciones son continuos en todo número en sus dominios:

polinomios — funciones racionales — funciones raíz

funciones trigonométricas — funciones trigonométricas inversas

funciones exponenciales — funciones logarítmicas

EJEMPLO 6 ¿En dónde es continua la función $f(x) = \dfrac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}$?

SOLUCIÓN Por el teorema 7, sabe que la función $y = \ln x$ es continua para $x > 0$ y que $y = \tan^{-1} x$ es continua sobre $\mathbb{R}$. Así, por la parte 1 del teorema 4, $y = \ln x + \tan^{-1} x$ es continua sobre $(0, \infty)$. El denominador, $y = x^2 - 1$, es un polinomio, de modo que es continuo en todas partes. Por lo tanto, por la parte 5 del teorema 4, f es continua en todos los números positivos x, excepto donde $x^2 - 1 = 0$. De este modo, f es continua en los intervalos $(0, 1)$ y $(1, \infty)$. □

EJEMPLO 7 Hallar el valor numérico del $\lim_{x \to \pi} \dfrac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$.

SOLUCIÓN El teorema 7 dice que $y = \operatorname{sen} x$ es continua. La función en el denominador, $y = 2 + \cos x$, es la suma de dos funciones continuas y en consecuencia es continua. Dese cuenta que esta función jamás es cero porque $\cos x \geqslant -1$ para toda x y también $2 + \cos x > 0$ en todas partes. En estos términos la relación

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x}$$

es continua en todas partes. Por lo tanto, mediante la definición de función continua,

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\operatorname{sen} x}{2 + \cos x} = \lim_{x \to \pi} f(x) = f(\pi) = \frac{\operatorname{sen} \pi}{2 + \cos \pi} = \frac{0}{2 - 1} = 0$$ □

Otra manera de combinar las funciones continuas f y g para obtener una nueva función continua es formar la función compuesta $f \circ g$. Este hecho es una consecuencia del teorema siguiente.

■ Este teorema expresa que se puede mover un símbolo de límite a través de un símbolo de función, si la función es continua y el límite existe. En otras palabras, se puede invertir el orden de estos dos símbolos.

8 TEOREMA Si f es continua en b y $\lim_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras,

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

A nivel intuitivo, este teorema resulta razonable porque si x está cerca de a, después $g(x)$ está cerca de b y como f es continua en b, si $g(x)$ está cerca de b, en seguida $f(g(x))$ está cerca de $f(b)$. Una demostración del teorema 8 se proporciona en el apéndice F.

EJEMPLO 8 Evalúe $\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right)$.

SOLUCIÓN Ya que arcsen es una función continua, aplique el teorema 8:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) &= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}\right) \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}}\right) \\
&= \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

□

Aplique el teorema 8 en el caso especial donde $f(x) = \sqrt[n]{x}$, y n es un entero positivo. En tal caso

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)}$$

y

$$f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Si sustituye estas expresiones en el teorema 8 obtiene

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

con lo que queda demostrada la ley 11 de los límites. (Supone que las raíces existen.)

9 TEOREMA Si g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $f \circ g$ dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

A menudo, este teorema se expresa de manera informal diciendo: "una función continua de una función continua es una función continua".

DEMOSTRACIÓN Como g es continua en a

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Como f es continua en $b = g(a)$, puede aplicar el teorema 8 para obtener

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

que es precisamente la proposición de que la función $h(x) = f(g(x))$ es continua en a; es decir, $f \circ g$ es continua en a. □

EJEMPLO 9 ¿En dónde son continuas las funciones siguientes?

(a) $h(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ (b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

SOLUCIÓN

(a) Tiene $h(x) = f(g(x))$ donde

$$g(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f(x) = \operatorname{sen} x$$

Ahora g es continua sobre $\mathbb{R}$, puesto que es un polinomio, y f también es continua en todas partes. Por consiguiente, $h = f \circ g$ es continua sobre $\mathbb{R}$ por el teorema 9.

(b) Con base en el teorema 7, sabe que $f(x) = \ln x$ es continua y $g(x) = 1 + \cos x$ es continua (porque tanto $y = 1$ como $y = \cos x$ son continuas). Por lo tanto, del teorema 9, $F(x) = f(g(x))$ es continuo siempre que esté definido. Ahora bien, $\ln(1 + \cos x)$ está definido cuando $1 + \cos x > 0$. De este modo, no está definido cuando $\cos x = -1$, y esto sucede cuando $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$. Por esto, F tiene discontinuidades cuando x es un múltiplo impar de π y es continua sobre los intervalos entre estos valores. (Véase la figura 7.) □

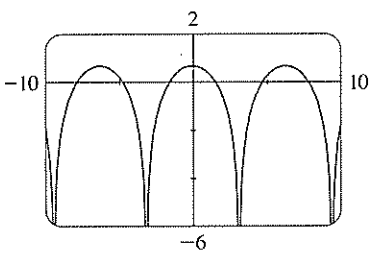


FIGURA 7
$y = \ln(1 + \cos x)$

Una propiedad importante de las funciones continuas se expresa con el siguiente teorema, cuya demostración se encuentra en libros más avanzados de cálculo.

10 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Por lo tanto existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

El teorema del valor intermedio afirma que una función continua toma todos los valores intermedios entre los valores de la función $f(a)$ y $f(b)$. Este hecho se ilustra en la figura 8. Observe que el valor N se puede tomar una vez [como en la parte (a)] o más de una vez [como en la parte (b)].

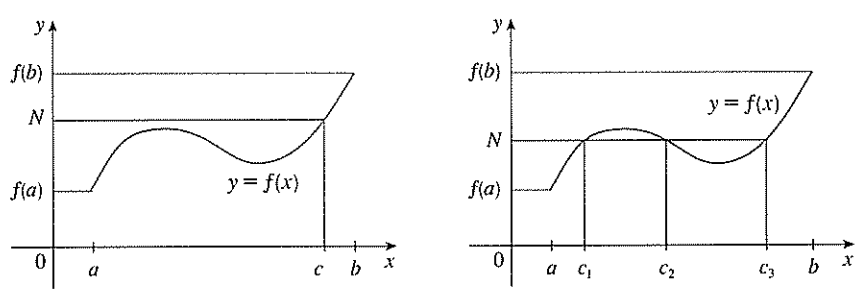


FIGURA 8 (a) (b)

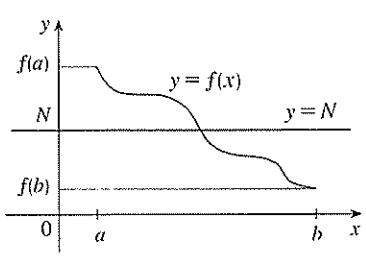


FIGURA 9

Si piensa en una función continua como en una función cuya gráfica no tiene agujeros o rupturas, en tal caso es fácil creer que el teorema del valor intermedio es cierto. En términos geométricos, dice que si se da cualquier recta horizontal $y = N$ entre $y = f(a)$ y $y = f(b)$, como en la figura 9, por lo tanto la gráfica de f no puede saltar sobre la recta. Debe intersecar $y = N$ en alguna parte.

Es importante que la función f del teorema 10 sea continua. En general, el teorema del valor intermedio no se cumple para las funciones discontinuas (véase el ejercicio 44).

Un uso del teorema del valor intermedio es hallar las raíces de ecuaciones, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 10 Demuestre que existe una raíz de la ecuación

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

entre 1 y 2.

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Busca una solución de la ecuación dada; es decir, un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. Por lo tanto, en el teorema 10, toma $a = 1$, $b = 2$ y $N = 0$. Tiene

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0$$

y

$$f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0$$

Por esto, $f(1) < 0 < f(2)$; es decir, $N = 0$ es un número entre $f(1)$ y $f(2)$. Ahora bien, f es continua porque es un polinomio, de modo que el teorema del valor intermedio afirma que existe un número c entre 1 y 2 tal que $f(c) = 0$. En otras palabras, la ecuación $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ tiene por lo menos una raíz c en el intervalo $(1, 2)$.

De hecho, podemos localizar una raíz con mayor precisión aplicando de nuevo el teorema del valor intermedio. Puesto que

$$f(1.2) = -0.128 < 0 \quad \text{y} \quad f(1.3) = 0.548 > 0$$

una raíz se debe encontrar entre 1.2 y 1.3. Una calculadora da, por tanteos,

$$f(1.22) = -0.007008 < 0 \quad \text{y} \quad f(1.23) = 0.056068 > 0$$

de modo que una raíz se encuentra en el intervalo (1.22, 1.23). □

Use una calculadora graficadora o una computadora para ilustrar la aplicación del teorema del valor intermedio en el ejemplo 10. En la figura 10 se muestra la gráfica de f en rectángulo de visualización $[-1, 3]$ por $[-3, 3]$ y se puede ver que la gráfica cruza el eje x entre 1 y 2. En la figura 11 se muestra el resultado de realizar un acercamiento hacia la pantalla $[1.2, 1.3]$ por $[-0.2, 0.2]$.

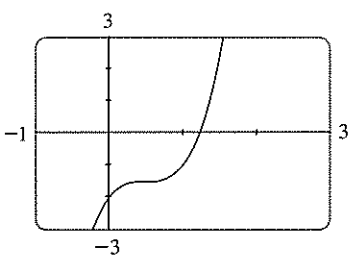


FIGURA 10

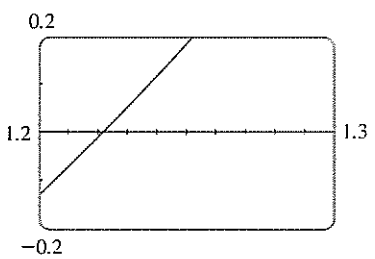


FIGURA 11

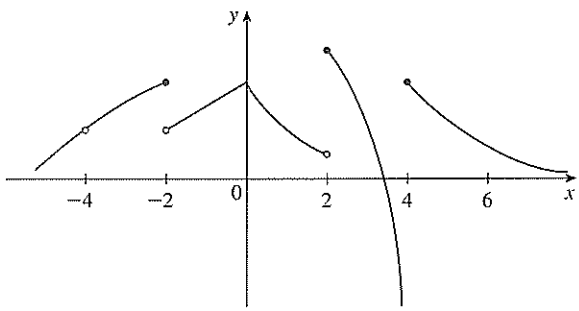
De hecho, el teorema del valor intermedio desempeña un papel en la manera en que funcionan estos aparatos graficadores. Una computadora calcula un número finito de puntos de la gráfica y hace aparecer los pixeles que contienen estos puntos calculados. Supone que la función es continua y toma todos los valores intermedios entre dos puntos consecutivos. En consecuencia, la computadora une los pixeles al hacer aparecer los pixeles intermedios.

2.5 EJERCICIOS

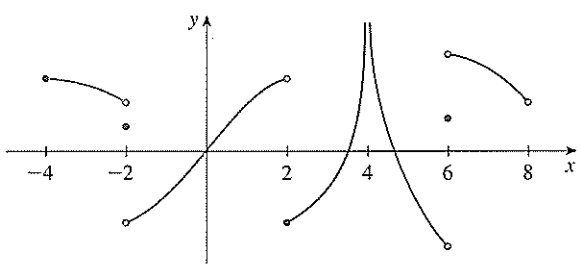
1. Escriba una ecuación que exprese el hecho de que una función f es continua en el número 4.

2. Si f es continua sobre $(-\infty, \infty)$, ¿qué puede decir acerca de su gráfica?

3. (a) A partir de la gráfica de f, establezca el número al cual f es discontinua y explique por qué.
(b) Para cada uno de los números que se determinaron en el inciso (a), determine si f es continua desde la derecha, desde la izquierda o desde ninguno de los dos lados.



4. A partir de la gráfica de g, dé los intervalos sobre los que g es continua.



5. Trace la gráfica de una función que sea continua en todas partes, excepto en $x = 3$, y sea continua desde la izquierda en 3.

6. Dibuje una función que tenga una discontinuidad de salto en $x = 2$ y una discontinuidad removible en $x = 4$, pero que sea continua en todas las demás partes.

7. En un lote de estacionamiento se cobran \$3 por la primera hora (o fracción) y \$2 por cada hora (o fracción) subsiguiente, hasta un máximo diario de \$10.
(a) Dibuje el costo de estacionar un automóvil en este lote, como función del tiempo que permanezca allí.
(b) Analice las discontinuidades de esta función y su significado para alguien que estacione su automóvil en el lote.

8. Explique por qué cada función es continua o discontinua.
(a) La temperatura en un lugar específico como función del tiempo.
(b) La temperatura en un momento dado como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York
(c) La altitud sobre el nivel del mar como función de la distancia hacia el oeste de la ciudad de Nueva York.
(d) El costo de un viaje en taxi como función de la distancia recorrida.
(e) La corriente en el circuito para las luces de una habitación como función del tiempo.

9. Si f y g son funciones continuas con $f(3) = 5$ y $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$, encuentre $g(3)$.

10–12 Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el número a dado.

10. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

11. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

12. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1$

13–14 Use la definición de continuidad y las propiedades de los límites para demostrar que la función es continua en el intervalo

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty)$

14. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3]$.

15–20 Explique por qué la función es discontinua en el punto dado a. Dibuje la gráfica de la función.

15. $f(x) = \ln|x - 2| \qquad a = 2$

16. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

17. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

19. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases} \qquad a = 3$

21–28 Con los teoremas 4, 5, 7 y 9 explique por qué la función es continua en todo número en su dominio. Dé el dominio.

21. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$ **22.** $G(x) = \sqrt[3]{x}(1 + x^3)$

23. $R(x) = x^5 + \sqrt{2x - 1}$

24. $h(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x + 1}$

25. $L(t) = e^{-5t}\cos 2\pi t$

26. $F(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 - 1)$

27. $G(t) = \ln(t^4 - 1)$

28. $H(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

29–30 Localice las discontinuidades de la función e ilústrelas trazando una gráfica.

29. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

30. $y = \ln(\tan^2 x)$

31–34 Aplique la continuidad para evaluar el límite.

31. $\lim_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

32. $\lim_{x \to \pi} \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} x)$

33. $\lim_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

34. $\lim_{x \to 2} \arctan\left(\dfrac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

35–36 Demuestre que f es continua sobre $(-\infty, \infty)$.

35. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{si } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

37–39 Determine los números en los que f es discontinua. ¿En cuáles de estos valores f es continua por la derecha, por la izquierda o no lo es ni por la derecha ni por la izquierda? Trace la gráfica de f.

37. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{si } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. La fuerza gravitacional ejercida por la Tierra sobre una masa unitaria a una distancia r del centro del planeta es

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{si } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{si } r \geqslant R \end{cases}$$

donde M es la masa de la Tierra, R su radio y G es la constante gravitacional. ¿F es una función continua de r?

41. ¿Para qué valor de la constante c la función f es continua sobre $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{si } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

42. Hallar el valor de a y b que hace a f continua en todas partes

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 2x - a + b & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

43. ¿Cuál de las funciones f siguientes tiene discontinuidad removible en a? Si la discontinuidad es removible, determine una función g que concuerde con f para $x \neq a$ y es continua en $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!], \quad a = \pi$

44. Suponga que una función f es continua sobre $[0, 1]$, excepto en 0.25, y que $f(0) = 1$ y $f(1) = 3$. Sea $N = 2$. Trace dos gráficas posibles de f, una en que se muestre que f podría no satisfacer la conclusión del teorema del valor intermedio y la otra que muestre que f todavía podría satisfacer ese teorema (aun cuando no satisfaga la hipótesis).

45. Si $f(x) = x^2 + 10 \operatorname{sen} x$, demuestre que hay un número c tal que $f(c) = 1\,000$.

46. Considere que f es continua en $[1, 5]$ y la única solución de $f(x) = 6$ son $x = 1$ y $x = 4$. Si $f(2) = 8$, explique ¿por qué $f(3) > 6$?

47–50 Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación dada en el intervalo especificado.

47. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

48. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

49. $\cos x = x, \quad (0, 1)$

50. $\ln x = e^{-x}, \quad (1, 2)$

51–52 (a) Compruebe que la ecuación tiene cuando menos una raíz real. (b) Use su calculadora para hallar un intervalo de longitud 0.01 que contenga una raíz.

51. $\cos x = x^3$

52. $\ln x = 3 - 2x$

53–54 (a) Pruebe que la ecuación tiene cuando menos una raíz real. (b) Utilice su dispositivo graficador para encontrar la raíz correcta hasta tres cifras decimales.

53. $100e^{-x/100} = 0.01x^2$

54. $\arctan x = 1 - x$

55. Demuestre que f es continua en a si y sólo si

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

56. Para demostrar que seno es continuo necesita demostrar que $\lim_{x \to a} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$ para todo número real a. Según el ejercicio 55, una proposición equivalente es que

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(a + h) = \operatorname{sen} a$$

Aplique (6) para demostrar que esto es cierto.

57. Compruebe que coseno es una función continua.

58. (a) Demuestre el teorema 4, parte 3.
(b) Demuestre el teorema 4, parte 5.

59. ¿Para qué valores de x es continua f?

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

60. ¿Para qué valores de x es continua g?

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es racional} \\ x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

61. ¿Hay un número que es exactamente 1 más que su cubo?

62. Si a y b son números positivos, comprobar que la ecuación

$$\frac{a}{x^3 + 2x^2 - 1} + \frac{b}{x^3 + x - 2} = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(-1, 1)$.

63. Demuestre que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua en $(-\infty, \infty)$.

64. (a) Demuestre que la función de valor absoluto $F(x) = |x|$ es continua en todas partes.
(b) Compruebe que si f es una función continua sobre un intervalo, entonces también lo es $|f|$.
(c) ¿Lo inverso de la proposición del inciso (b) también es verdadero? En otras palabras, ¿si $|f|$ es continua se deduce que f es continua? De ser así, compruébelo. En caso de no ser así, halle un ejemplo contrario.

65. Un monje tibetano sale del monasterio a las 7:00 A.M. y emprende su camino habitual hacia la cima de la montaña, a donde llega a las 7:00 P.M. La mañana siguiente inicia el regreso desde la cima por la misma ruta a las 7:00 A.M. y llega al monasterio a las 7:00 P.M. Mediante el teorema del valor intermedio demuestre que existe un punto a lo largo de la ruta que el monje cruzará exactamente a la misma hora en ambos días.

2.6 LÍMITES AL INFINITO, ASÍNTOTAS HORIZONTALES

En las secciones 2.2 y 2.4 se trataron los límites infinitos y las asíntotas verticales. Ahí se dejó que x se aproximara a un número y el resultado es que los valores de y se vuelven arbitrariamente grandes (ya sean positivos o negativos). En esta sección se permite que x se vuelva arbitrariamente grande (positiva o negativa) y se observe qué le sucede a y.

Empiece por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x se hace grande. La tabla al margen da valores de esta función correctos hasta seis cifras decimales y, en la figura 1, se ha trazado la gráfica de f por medio de una computadora.

x	$f(x)$
0	−1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

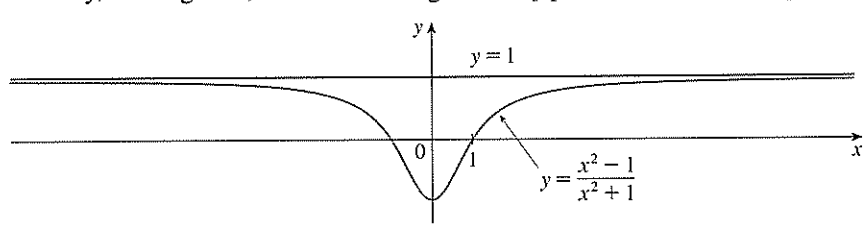


FIGURA 1

Conforme x crece más y más, se puede ver que los valores de $f(x)$ se aproximan cada vez más a 1. De hecho, parece que puede acercar cuanto quiera los valores de $f(x)$ a 1 eligiendo una x lo suficientemente grande. Esta situación se expresa en forma simbólica escribiendo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En general, use el simbolismo

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ tienden a L conforme x se hace más y más grande.

1 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). En tal caso

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden aproximar a L tanto como desee, si escoge una x suficientemente grande.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \quad \text{conforme} \quad x \to \infty$$

El símbolo ∞ no representa un número. No obstante, la expresión $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ a menudo se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito, es L"

o "el límite de $f(x)$, cuando x se hace infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L"

La definición 1 da el significado de esas frases. Una definición más exacta, similar a la definición de ε, δ de la sección 2.4 se encuentra al final de esta sección

En la figura 2 se muestran ilustraciones geométricas de la definición 1. Advierta que hay muchas maneras de aproximar la gráfica de f a la recta $y = L$ (la cual se llama *asíntota horizontal*) a medida que ve hacia el extremo derecho de cada gráfica.

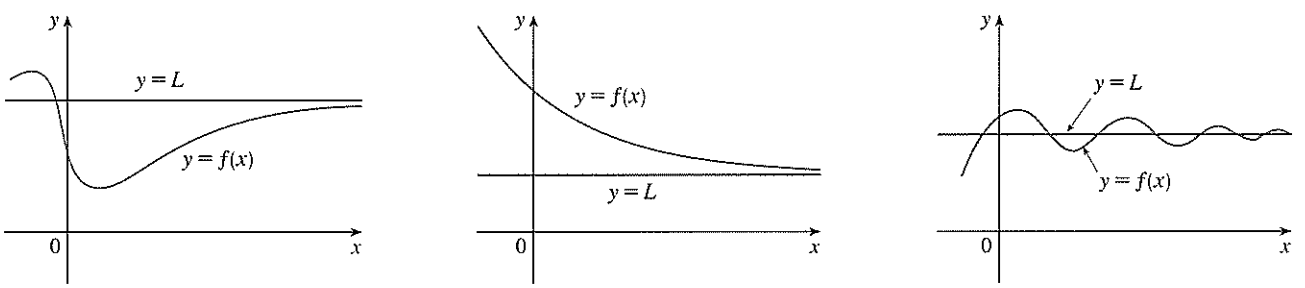


FIGURA 2
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Si vuelve a la figura 1, verá que para valores negativos numéricamente grandes de x, los valores de $f(x)$ están cercanos a 1. Al reducir x a través de valores negativos sin cota, puede acercar $f(x)$ a 1 cuanto quiera. Esto se expresa escribiendo

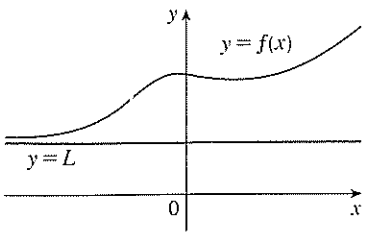
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue:

2 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

quiere decir que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L haciendo que x sea lo suficientemente grande y negativa.



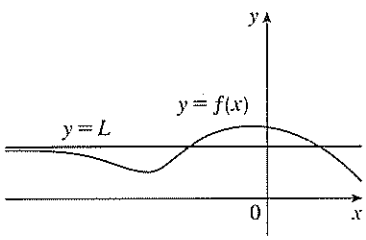


FIGURA 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

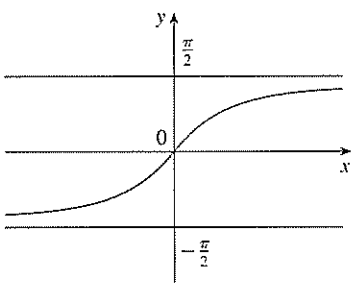


FIGURA 4
$y = \tan^{-1}x$

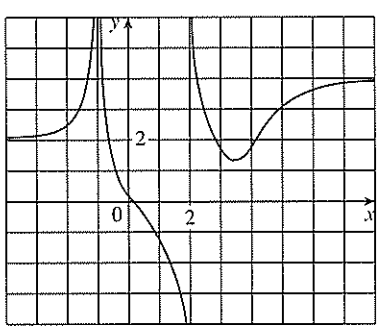


FIGURA 5

Es necesario remarcar que el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ se lee a menudo como

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende al infinito negativo, es L".

La definición 2 se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica tiende a la recta $y = L$ como en el extremo izquierdo de cada gráfica.

3 DEFINICIÓN La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o bien} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Por ejemplo, la curva que se ilustra en la figura 1 tiene la recta $y = 1$ como asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1}x$. (Véase la figura 4.) En efecto,

4
$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que las dos rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se concluye a partir del hecho de que las rectas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

EJEMPLO 1 Encuentre los límites infinitos, los límites en el infinito y las asíntotas para la función f cuya gráfica se muestra en la figura 5.

SOLUCIÓN Va que los valores de $f(x)$ se vuelven grandes cuando $x \to -1$ desde ambos lados; por lo tanto

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

Advierta que $f(x)$ se hace grande negativo cuando x tiende a 2 desde la izquierda, pero grande positivo cuando x tiende a 2 desde la derecha. De este modo,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$$

De esta suerte, las dos rectas $x = -1$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

Cuando x crece, $f(x)$ tiende a 4. Pero cuando x decrece a través de valores negativos, $f(x)$ tiende a 2. Así entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

Esto significa que tanto $y = 4$ como $y = 2$ son asíntotas horizontales. □

EJEMPLO 2 Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$.

SOLUCIÓN Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeño. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si elige una x suficientemente grande, puede aproximar $1/x$ a 0 cuanto quiera. Por lo tanto, según la definición 4

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

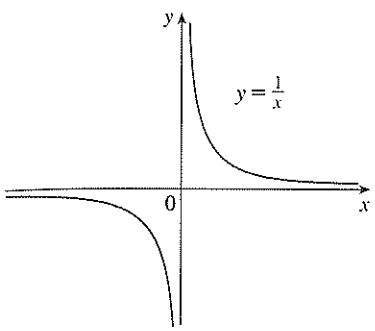


FIGURA 6

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Un razonamiento similar hace ver que cuando x es grande negativo, $1/x$ es pequeño negativo; de este modo, también tiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se infiere que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$ (que es una hipérbola equilátera; véase la figura 6). □

La mayor parte de las leyes de los límites que se dieron en la sección 2.3 también se cumplen para los límites en el infinito. Se puede probar que las *leyes de los límites, cuya lista se da en la sección 2.3 (con la excepción de las leyes 9 y 10), también son válidas si "$x \to a$" se reemplaza con "$x \to \infty$" o con "$x \to -\infty$"*. En particular, si combina la ley 6 con los resultados del ejemplo 2, obtiene la importante regla que sigue para el cálculo de límites.

5 TEOREMA Si $r > 0$ es un número racional, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Si $r > 0$ es un número racional tal que x^r está definida para toda x, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

EJEMPLO 3 Evalúe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

e indique las propiedades de límites que se usan en cada etapa.

SOLUCIÓN Conforme x se hace más grande, tanto el numerador como el denominador se hacen más grandes, por lo tanto no resulta evidente qué sucede con su proporción. Necesita hacer algunas operaciones algebraicas preliminares.

Para evaluar el límite en el infinito de una función racional, divida el numerador y el denominador entre la mayor potencia de x que hay en el denominador. (Puede suponer

que $x \neq 0$, puesto que sólo está interesados en los valores grandes de x.) En este caso, la mayor potencia de x en el dominador es x^2, con lo cual tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x^2 - x - 2}{x^2}}{\dfrac{5x^2 + 4x + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} \quad \text{(por la ley de los Límites 5)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} - 2\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 5 + 4\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}} \quad \text{(por 1, 2 y 3)}$$

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} \quad \text{(por 7 y el teorema 5)}$$

$$= \frac{3}{5}$$

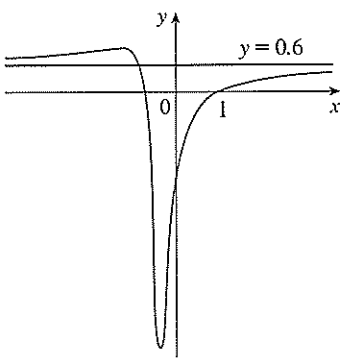


FIGURA 7
$y = \dfrac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$

Un cálculo semejante hace ver que el límite cuando $x \to -\infty$ también es $\frac{3}{5}$. En la figura 7 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. □

EJEMPLO 4 Determine las asíntotas horizontales y verticales de la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

SOLUCIÓN Al dividir tanto el numerador como el denominador entre x y aplicar las propiedades de los límites tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{3 - \dfrac{5}{x}} \quad \text{(puesto que } \sqrt{x^2} = x \text{ para } x > 0\text{)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{2 + \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 - 5\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2 + 0}}{3 - 5 \cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Por lo tanto, la recta $y = \sqrt{2}/3$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f.

Si calcula el límite cuando $x \to -\infty$, debe recordar que para $x < 0$, tiene $\sqrt{x^2} = |x| = -x$. De donde, al dividir el numerador entre x, para $x < 0$ obtiene

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2 + 1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2 + 1} = -\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}{3-\dfrac{5}{x}}=\frac{-\sqrt{2+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}}}{3-5\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Así, la recta $y=-\sqrt{2}/3$ también es una asíntota horizontal.

Es probable que haya una asíntota vertical cuando el denominador, $3x-5$, es 0, es decir, cuando $x=\frac{5}{3}$. Si x tiende a $\frac{5}{3}$ y $x>\frac{5}{3}$, después el denominador está cercano a 0 y $3x-5$ es positivo. El numerador $\sqrt{2x^2+1}$ siempre es positivo, de modo que $f(x)$ es positivo. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=\infty$$

Si x está cerca de $\frac{5}{3}$ pero $x<\frac{5}{3}$, en seguida $3x-5<0$ y $f(x)$ es grande y negativa. De esta manera,

$$\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}=-\infty$$

La asíntota vertical es $x=\frac{5}{3}$. Las tres asíntotas se ilustran en la figura 8. □

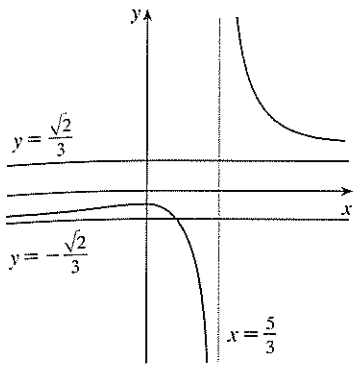


FIGURA 8
$y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$

EJEMPLO 5 Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

SOLUCIÓN Ya que tanto $\sqrt{x^2+1}$ como x son grandes cuando x es grande, es difícil ver qué sucede con su diferencia, por eso, use el álgebra para escribir de nuevo la función. En primer lugar multiplique el numerador y el denominador por el radical conjugado.

■ Puede considerar que la función dada tiene un denominador de 1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)&=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\end{aligned}$$

Se podría aplicar el teorema de la compresión para demostrar que este límite es 0. Pero un método más fácil es dividir el numerador y el denominador entre x. Al efectuar esto y aplicar las leyes de los límites obtiene

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\frac{0}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

En la figura 9 se ilustra este resultado. □

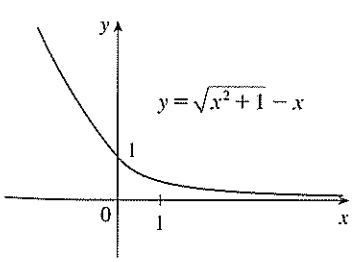


FIGURA 9

En la gráfica de la función exponencial natural $y=e^x$ tiene la recta $y=0$ (el eje x) como asíntota horizontal. (Lo mismo se cumple para cualquier función exponencial con

http://libreria-universitaria.blogspot.com

base $a > 1$.) En efecto, a partir de la gráfica de la figura 10 y la tabla correspondiente de valores observe que

$$\boxed{6} \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Advierta que los valores de e^x tienden a 0 con mucha rapidez.

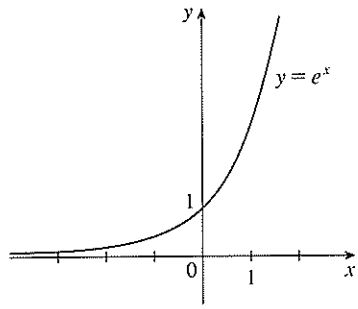


FIGURA 10

x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

EJEMPLO 6 Evalúe $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x}$.

■ La estrategia para resolver problemas para el ejemplo 6 es *introducir algo adicional* (véase página 76). En este caso, lo adicional, el elemento auxiliar, es la variable t.

SOLUCIÓN Si hace que $t = 1/x$, sabe que $t \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$. Por lo tanto, de acuerdo con (6),

$$\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = \lim_{t \to -\infty} e^t = 0$$

(Véase ejercicio 71.) □

EJEMPLO 7 Evalúe $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$.

SOLUCIÓN Cuando x crece, los valores de sen x oscilan entre 1 y -1 infinitamente a menudo, y, de este modo, no se aproximan a ningún número definido. Así, $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$ no existe. □

LÍMITES INFINITOS EN EL INFINITO

La notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

se usa para indicar que los valores de $f(x)$ se agrandan cuando x se hace grande. Se asocian significados semejantes a los símbolos siguientes:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

EJEMPLO 8 Determine $\lim_{x \to \infty} x^3$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3$.

SOLUCIÓN Cuando x se incrementa, también lo hace x^3. Por ejemplo,

$$10^3 = 1000 \qquad 100^3 = 1\,000\,000 \qquad 1000^3 = 1\,000\,000\,000$$

En efecto, puede hacer a x^3 tan grande como quiera incrementando de manera suficiente a x. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$$

de manera similar, cuando x toma un valor negativo grande, así es x^3. En estos términos

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

Asimismo, eatas proposiciones de los límites se pueden ver en la gráfica de $y = x^3$ en la figura 11. □

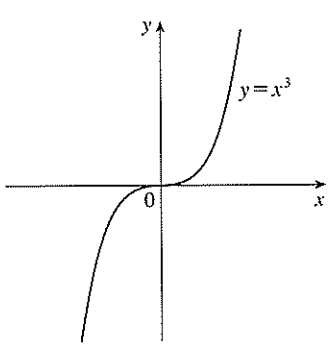


FIGURA 11
$\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

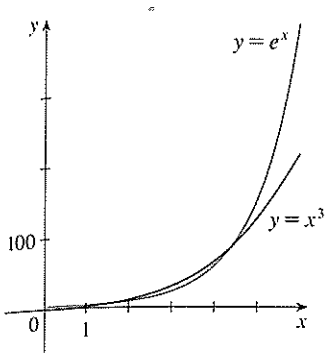


FIGURA 12
e^x es tan grande como x^3 cuando x es grande.

Al examinar la figura 10 observe que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

pero, como se muestra en la figura 12, $y = e^x$ se hace grande cuando $x \to \infty$ con mucha mayor rapidez que $y = x^3$.

EJEMPLO 9 Encuentre $\lim_{x \to \infty} (x^2 - x)$.

SOLUCIÓN Advierta que **no puede** escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x^2 - \lim_{x \to \infty} x = \infty - \infty$$

Las leyes de los límites no se pueden aplicar a los límites infinitos porque ∞ no es un número ($\infty - \infty$ está indefinido). Sin embargo, *puede* escribir

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - x) = \lim_{x \to \infty} x(x - 1) = \infty$$

porque tanto x como $x - 1$ se hacen arbitrariamente grandes y, por lo tanto, también su producto. □

EJEMPLO 10 Encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + x}{3 - x}$.

SOLUCIÓN Como en el ejemplo 3, divida el numerador y denominador entre la potencia más alta de x en el denominador, que es justamente x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x}{3 - x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{\dfrac{3}{x} - 1} = -\infty$$

porque $x + 1 \to \infty$ y $3/x - 1 \to -1$ cuando $x \to \infty$. □

En el ejemplo siguiente se muestra que al analizar límites infinitos en el infinito, junto con intersecciones, es posible llegar a tener una idea general de la gráfica de un polinomio sin tener que graficar una gran cantidad de puntos.

EJEMPLO 11 Trace la gráfica de $y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ con ayuda de las intersecciones y sus límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

SOLUCIÓN La intersección con el eje y es $f(0) = (-2)^4(1)^3(-1) = -16$ y los cortes con el eje x se encuentran al hacer $y = 0$: $x = 2, -1, 1$. Observe que como $(x - 2)^4$ es positiva, la función no cambia de signo en 2; de este modo, la gráfica no corta el eje x en 2. La gráfica corta el eje en -1 y 1.

Cuando x adquiere un valor grande y positivo, los tres factores son grandes, de modo que

$$\lim_{x \to \infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Cuando x tiene un valor grande y negativo, el primer factor toma un valor grande y positivo y el segundo y el tercer factores son grandes negativos, por lo que

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1) = \infty$$

Al combinar esta información, obtiene un esbozo de la gráfica en la figura 13. □

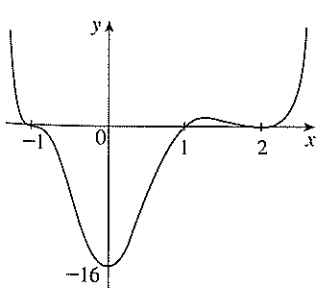


FIGURA 13
$y = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$

DEFINICIONES EXACTAS

La definición 1 se puede establecer precisamente como se indica a continuación.

7 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). En tal caso,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

En lenguaje común, esto establece que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L (dentro de una distancia ε, donde ε es cualquier número positivo) al hacer que x tome valores suficientemente grandes (más grandes que N, donde N depende de ε). Desde el punto de vista gráfico, esto plantea que al escoger valores grandes de x (mayores que algún número N) es posible hacer que la gráfica de f se sitúe entre las rectas horizontales $y = L - \varepsilon$ y $y = L + \varepsilon$ como en la figura 14. Esto se tiene que cumplir sin que importe qué tan pequeño sea ε. En la figura 15 se ilustra que si se escoge un valor pequeño de ε, después se podría requerir un valor mayor de N.

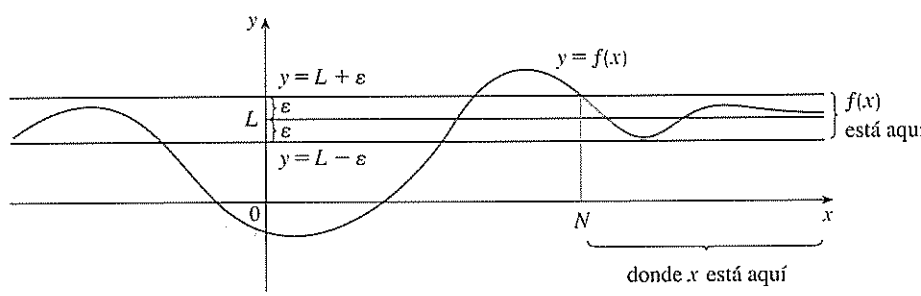


FIGURA 14
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

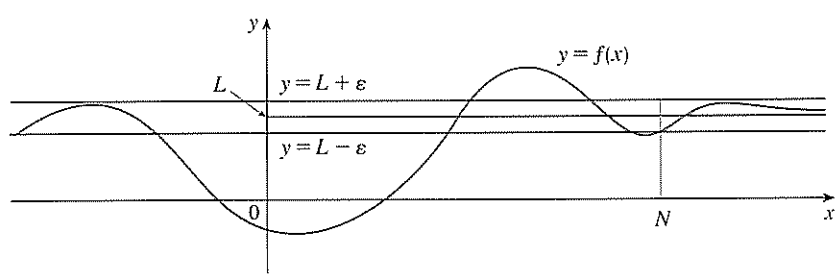


FIGURA 15
$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

De igual manera, una versión exacta de la definición 2 se proporciona mediante la definición 8, la cual se ilustra en la figura 16.

8 DEFINICIÓN Sea f una función definida en algún intervalo de $(-\infty, a)$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

quiere decir que para toda $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x < N \quad \text{entonces} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

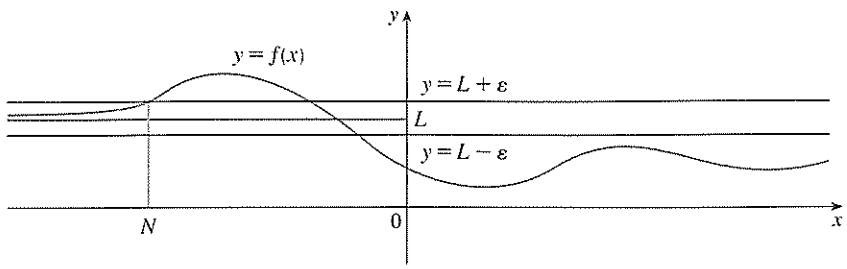


FIGURA 16
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

En el ejemplo 3 se calculó que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}$$

En el ejemplo siguiente se utiliza una calculadora o computadora para relacionar este enunciado de la definición 7 con $L = \frac{3}{5}$ y $\varepsilon = 0.1$.

EJEMPLO 12 Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

SOLUCIÓN Reescriba la desigualdad como

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

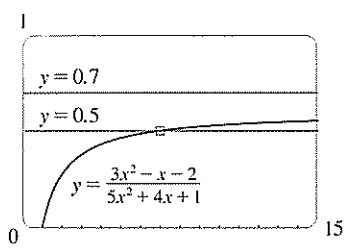


FIGURA 17

Es necesario determinar los valores de x para los cuales la curva dada queda entre las rectas horizontales $y = 0.5$ y $y = 0.7$. La curva y las rectas están graficadas en la figura 17. Luego, por medio del cursor, se estima que la curva cruza la recta $y = 0.5$ cuando $x \approx 6.7$. A la derecha de este número, la curva se localiza entre las rectas $y = 0.5$ y $y = 0.7$. Efectúe un redondeo y después

$$\text{si} \quad x > 7 \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - 0.6 \right| < 0.1$$

En otras palabras, para $\varepsilon = 0.1$ puede elegir $N = 7$ (o cualquier otro número mayor) en la definición 7. □

EJEMPLO 13 Mediante la definición 7 demuestre que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

SOLUCIÓN Dado $\varepsilon > 0$, busca N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$$

Al calcular el límite podría suponer que $x > 0$. En tal caso $1/x < \varepsilon \iff x > 1/\varepsilon$. Seleccione $N = 1/\varepsilon$. De esa manera

$$\text{si} \quad x > N = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon$$

De donde, según la definición 7,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

En la figura 18 se ilustra la demostración en la que se muestran algunos valores de ε y los valores correspondientes de N.

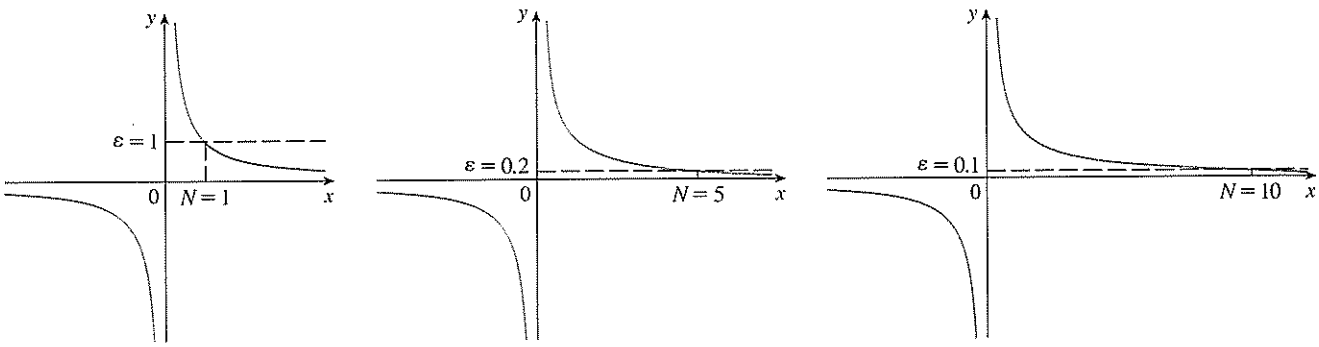


FIGURA 18

□

Para finalizar, observe que se puede definir un límite infinito en el infinito como sigue. La representación geométrica se proporciona en la figura 19.

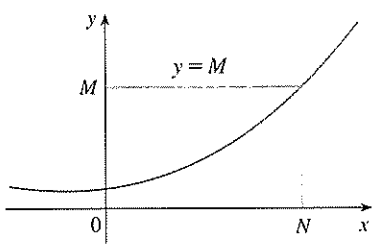


FIGURA 19
$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

9 DEFINICIÓN Si f es una función definida en algún intervalo (a, ∞). entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

significa que para todo número positivo M hay un número positivo correspondiente N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad f(x) > M$$

Definiciones similares son válidas cuando el símbolo ∞ se reemplaza con $-\infty$. (Véase ejercicio 70.)

2.6 EJERCICIOS

1. Explique con sus propias palabras el significado de cada una de las expresiones siguientes.

(a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

2. (a) ¿La gráfica de $y = f(x)$ se puede intersecar con una asíntota vertical? ¿Se puede intersecar con una asíntota horizontal? Ilustre trazando gráficas.

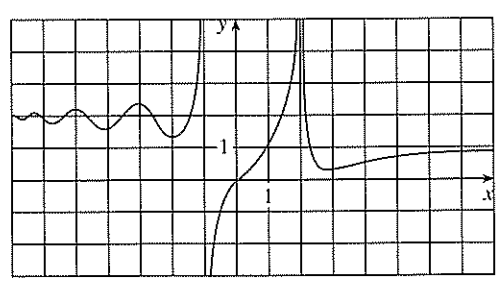
(b) ¿Cuántas asíntotas horizontales puede tener la gráfica de $y = f(x)$? Trace gráficas para ilustrar las posibilidades.

3. Para la función f cuya gráfica se ilustra, dé lo siguiente:

(a) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ (c) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$

(d) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (e) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(f) Las ecuaciones de las asíntotas.



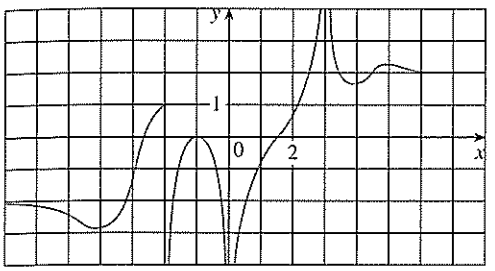
http://libreria-universitaria.blogspot.com

4. Para la función g cuya gráfica se ilustra, proporcione lo siguiente:

(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} g(x)$

(e) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$ (f) Las ecuaciones de las asíntotas.



5–10 Dibuje el ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones dadas.

5. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, f es impar

6. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to -2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -3$

9. $f(0) = 3$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, f es par

11. Determine el valor del límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

evaluando la función $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ y 100. A continuación, utilice una gráfica de f para respaldar su conjetura.

12. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ correcto hasta dos cifras decimales

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

13–14 Evalúe un límite y justifique cada etapa señalando las propiedades adecuadas de los límites.

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–36 Calcule el límite.

15. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{2x + 3}$

16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\lim_{y\to\infty} \dfrac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 5x}{2x^3 - x^2 + 4}$

20. $\lim_{t\to-\infty} \dfrac{t^2 + 2}{t^3 + t^2 - 1}$

21. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{4u^4 + 5}{(u^2 - 2)(2u^2 - 1)}$

22. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + 2}{\sqrt{9x^2 + 1}}$

23. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x\to-\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x\to\infty} \cos x$

29. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$

30. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

31. $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 3}{5 - 2x^2}$

33. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

34. $\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(x^2 - x^4)$

35. $\lim_{x\to\infty} (e^{-2x} \cos x)$

36. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} e^{\tan x}$

37. (a) Estime el valor de

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

dibujando la función $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para conjeturar el valor del límite.

(c) Pruebe que su conjetura es correcta.

38. (a) Use una gráfica de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ hasta una cifra decimal.

(b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro cifras decimales.

(c) Halle el valor exacto del límite.

39–44 Hallar las asíntotas horizontal y vertical de cada curva. Si tiene un dispositivo graficador, verifique su trabajo graficando la curva y estimando las asíntotas.

39. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

40. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

41. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

42. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

43. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

44. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

45. Estimar la asíntota horizontal de la función

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

mediante la gráfica de f para $-10 \leq x \leq 10$. Después calcule la ecuación de la asíntota evaluando el límite. ¿Cómo explica la discrepancia?

46. (a) Grafique la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

¿Cuántas asíntotas horizontales y verticales observa? Use la gráfica para estimar el valor de los límites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calcular los valores de $f(x)$, proporcione estimaciones numéricas de los límites del inciso (a).

(c) Calcular los valores exactos de los límites en el inciso (a) obtenga el mismo valor o valores diferentes de esos dos límites [con respecto a su respuesta del inciso (a), tendrá que verificar su cálculo para el segundo límite].

47. Encuentre una fórmula para una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty, \quad f(2) = 0,$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$$

48. Plantee una fórmula para una función cuyas asíntotas verticales son $x = 1$ y $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 1$.

49–52 Determine los límites cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$. Utilice esta información junto con las intersecciones para conseguir un esbozo de la gráfica como en el ejemplo 11.

49. $y = x^4 - x^6$

50. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

51. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

52. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

53. (a) Aplique el teorema de la compresión para evaluar

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

(b) Grafique $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. ¿Cuántas veces la gráfica corta la asíntota?

54. Por *comportamiento al final* de una función debe dar a entender una descripción de lo que sucede a sus valores cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

(a) Describa y compare el comportamiento al final de las funciones

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

dibujando las dos funciones en los rectángulos de visualización $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y $[-10, 10]$ por $[-10\,000, 10\,000]$.

(b) Se dice que dos funciones tienen el *mismo comportamiento al final* si su relación tiende a 1 cuando $x \to \infty$. Demuestre que P y Q tienen el mismo comportamiento al final.

55. Sean P y Q dos polinomios. Encuentre

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si el grado de P es (a) menor que el grado de Q y (b) mayor que el grado de Q.

56. Haga un boceto aproximado de la gráfica de la curva $y = x^n$ (n un entero) para los cinco casos siguientes:

(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n impar

(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n impar

(v) $n < 0$, n par

Después use estos bocetos para encontrar los límites siguientes.

(a) $\lim_{x \to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x \to 0^-} x^n$

(c) $\lim_{x \to \infty} x^n$ (d) $\lim_{x \to -\infty} x^n$

57. Determine $\lim_{x \to \infty} f(x)$ si, para toda $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

58. (a) Un depósito contiene 5 000 L de agua pura. Se bombea salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua al depósito a una proporción de 25 L/min. Demuestre que la concentración de sal t minutos después (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?

59. En el capítulo 9 se demostrará que, según ciertas hipótesis, la velocidad $v(t)$ de una gota de lluvia que cae, en el instante t, es

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*})$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y v^* es la *velocidad terminal* de la gota de lluvia.

(a) Encuentre $\lim_{t \to \infty} v(t)$.

(b) Trace la gráfica de $v(t)$ si $v^* = 1$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2. ¿Cuánto tiempo transcurre para que la velocidad de la gota de agua alcance el 99% de su velocidad terminal?

60. (a) Mediante el trazo de $y = e^{-x/10}$ y $y = 0.1$ en una pantalla común, descubra cuánto tiene que aumentar x de modo que $e^{-x/10} < 0.1$.
(b) ¿Puede resolver el inciso (a) sin un aparato graficador?

61. Mediante una gráfica determine un número N tal que

$$\text{si} \quad x > N \quad \text{entonces} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1.5 \right| < 0.05$$

62. En el caso del límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre la definición 7 mediante la determinación de valores de N que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

63. Ilustre la definición 8 para el límite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

determinando valores de N que corresponden a $\varepsilon = 0.5$ y $\varepsilon = 0.1$.

64. Ilustre la definición 9 para el límite

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

calculando valores de N que corresponden a $M = 100$.

65. (a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/x^2 < 0.0001$?
(b) Al hacer $r = 2$ en el Teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la Definición 7.

66. (a) ¿Qué tan grande tenemos que hacer x para que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Al hacer $r = \frac{1}{2}$ en el Teorema 5, tenemos la proposición

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demuéstrela directamente aplicando la Definición 7.

67. Aplique la Definición 8 para demostrar que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

68. Demuestre mediante la Definición 9 que $\lim_{x \to \infty} x^3 = \infty$.

69. Mediante la definición 9 demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

70. Formule una definición exacta de

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Luego aplique su definición para demostrar que

$$\lim_{x \to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

71. Demuestre que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} f(1/t)$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^-} f(1/t)$$

si existen los límites.

2.7 DERIVADAS Y RAZONES DE CAMBIO

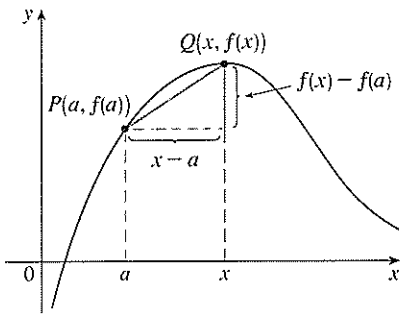
El problema del hallazgo de la línea tangente a una curva y el problema del descubrimiento de la velocidad de un objeto, involucran el hallazgo de la misma clase de límite, como se vio en la sección 2.1. Esta clase especial de límite se denomina derivada y puede ser interpretada como una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o ingeniería.

TANGENTES

Si una curva C tiene la ecuación $y = f(x)$ y quiere hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces considere un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y calcule la pendiente de la línea secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En seguida, acerque Q a P a lo largo de la curva C, haciendo que x tienda a a. Si m_{PQ} tiende a un número m, después defina la *tangente* t como la recta que pasa por P con



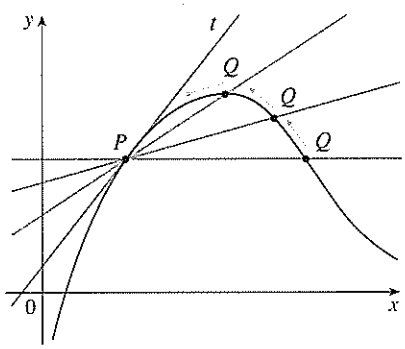


FIGURA 1

pendiente m. (Esto equivale a decir que la recta tangente es la posición límite de la recta secante PQ cuando Q tiende a P. Véase la figura 1.)

1 DEFINICIÓN La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

cuando el límite existe.

En el primer ejemplo, se confirma la suposición hecha en el ejemplo 1 de la sección 2.1.

EJEMPLO 1 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$, en el punto $P(1, 1)$.

SOLUCIÓN En este caso, $a = 1$ y $f(x) = x^2$, de modo que la pendiente es

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forma punto-pendiente para una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Con la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, se encuentra que una ecuación de la recta tangente en $(1, 1)$ es

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o bien} \qquad y = 2x - 1$$ □

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se acerca lo suficiente al punto, la curva parece una línea recta. En la figura 2 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$ del ejemplo 1. Entre más se acerque, la parábola más parece una recta. En otras palabras, la curva casi se vuelve indistinguible de su recta tangente.

TEC Visual 2.7 muestra una animación de la figura 2.

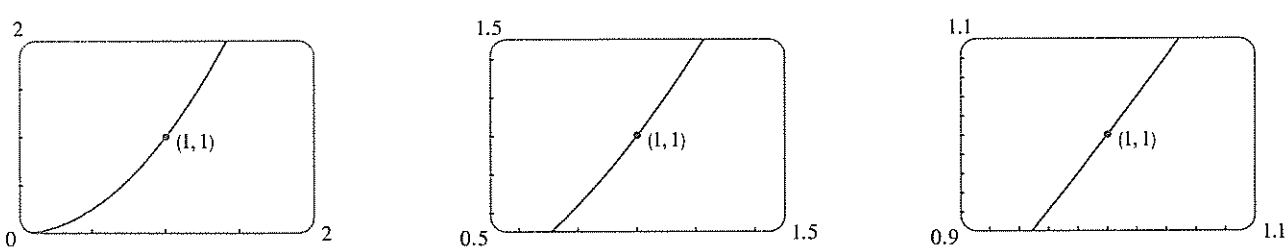


FIGURA 2 Acercamiento hacia el punto (1, 1) sobre la parábola $y = x^2$

Existe otra expresión para la pendiente de la recta tangente que a veces es más fácil de usar. Si $h = x - a$, en este caso $x = a + h$ y así la pendiente de la línea secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

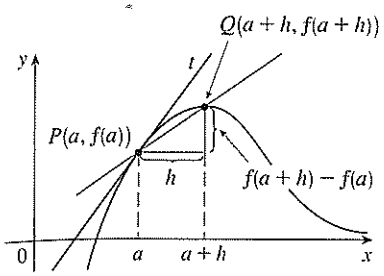


FIGURA 3

(Véase la figura 3, donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.)

Advierta que, cuando x tiende a a, h lo hace a 0 (porque $h = x - a$) y, de este modo, la expresión para la pendiente de la recta tangente, que se da en la definición 1, se convierte en

2 $$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

EJEMPLO 2 Encuentre una ecuación de la recta tangente a la hipérbola $y = 3/x$, en el punto (3, 1).

SOLUCIÓN Sea $f(x) = 3/x$. Por lo tanto, la pendiente de la tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{3 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3 - (3 + h)}{3 + h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(3 + h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{3 + h} = -\frac{1}{3}$$

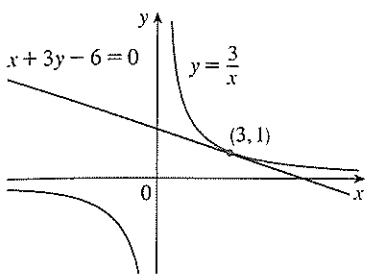


FIGURA 4

En consecuencia, una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

la cual se simplifica hasta $x + 3y - 6 = 0$

En la figura 4 se muestra la hipérbola y su tangente. □

VELOCIDADES

En la sección 2.1 se investigó el movimiento de una pelota que se dejó caer desde la Torre CN y se definió su velocidad como el límite del valor de las velocidades promedio sobre periodos cada vez más cortos.

En general, suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta, de acuerdo con una ecuación del movimiento $s = f(t)$, donde s es el desplazamiento (distancia directa) del objeto respecto al origen, en el instante t. La función f que describe el movimiento se conoce como **función de posición** del objeto. En el intervalo de $t = a$ hasta $t = a + h$, el cambio en la posición es $f(a + h) - f(a)$. (Véase la figura 5.) La velocidad promedio en este intervalo de tiempo es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

que es lo mismo que la pendiente de la secante PQ en la figura 6.

Suponga ahora que calcula las velocidades promedio sobre lapsos $[a, a + h]$ más y más cortos. En otras palabras, haga que h tienda a 0. Como en el ejemplo de la pelota que cae, se definió la **velocidad** (o **velocidad instantánea**) $v(a)$ en el instante $t = a$ como el límite de estas velocidades promedio:

3 $$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

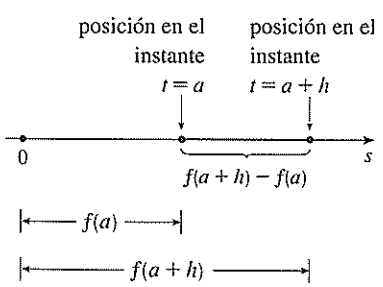


FIGURA 5

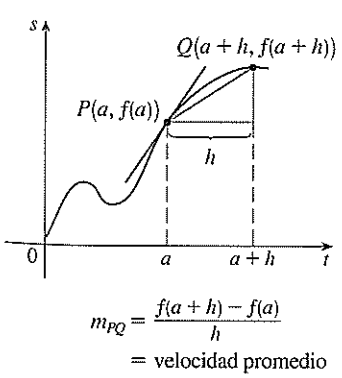


FIGURA 6

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Esto significa que la velocidad en el instante $t = a$ es igual a la pendiente de la línea tangente en P. (Compare las ecuaciones 2 y 3.)

Ahora que sabe calcular límites, vuelva a considerar el problema de la pelota que cae.

EJEMPLO 3 Suponga que se deja caer una pelota desde la plataforma superior de observación de la Torre CN, 450 m sobre el nivel del suelo.
(a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota después de 5 segundos?
(b) ¿Con qué velocidad viaja cuando choca contra el suelo?

■ Recuerde que en la sección 2.1 vimos que la distancia (en metros) que recorre la pelota que cae una vez que transcurren t segundos es $4.9t^2$.

SOLUCIÓN Necesita hallar la velocidad cuando $t = 5$ y cuando la pelota golpea el suelo, de tal manera, que es eficaz iniciar la búsqueda de la velocidad en un tiempo común $t = a$. Empleando la ecuación de movimiento $s = f(t) = 4.9t^2$, tiene

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a \end{aligned}$$

(a) La velocidad después de 5 s es $v(5) = (9.8)(5) = 49$ m/s.

(b) Como la plataforma de observación está 450 m sobre el nivel del suelo, la pelota chocará contra el suelo en el instante t_1, cuando $s(t_1) = 450$; es decir,

$$4.9t_1^2 = 450$$

Esto da

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \qquad \text{y} \qquad t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6 \text{ s}$$

Por lo tanto, la velocidad de la pelota cuando choca contra el suelo es

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94 \text{ m/s}$$ □

DERIVADAS

Ha visto que surge la misma clase de límite en la búsqueda de la pendiente de una línea tangente (ecuación 2) o la velocidad de un objeto (ecuación 3). En realidad, los límites de la forma

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

surgen cuando calcula una razón de cambio en cualquiera de las ciencias o en ingeniería, tal como la velocidad de reacción en química o un costo marginal en economía. Ya que esta clase de límite sucede, muy seguido, se proporciona un nombre y notación especial.

4 DEFINICIÓN La **derivada de una función f en un número a**, se indica mediante $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

■ $f'(a)$ se lee "f es fundamental de a".

Si escribe $x = a + h$, en tal caso, tiene $h = x - a$ y h se aproxima a 0 si y sólo si x se aproxima a a. En consecuencia, una manera equivalente de establecer la definición de la derivada, como se mencionó en la búsqueda de líneas tangentes, es

5
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

EJEMPLO 4 Hallar la derivada de la funcion $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a.

SOLUCIÓN De la definición 4 se tiene

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[(a + h)^2 - 8(a + h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \to 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

□

Defina la línea tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ como la línea que pasa a través de P y tiene pendiente m, proporcionada por la ecuación 1 o 2, ya que, mediante la definición 4, es la misma que la derivada $f'(a)$, ahora puede decir lo siguiente.

> La línea tangente a $y = f(x)$ en $(a, f(a))$ es la línea a través de $(a, f(a))$ cuya pendiente es igual a $f'(a)$, la derivada de f en a.

Si usa la forma punto pendiente de la ecuación de una línea, puede escribir una ecuación de la línea tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

EJEMPLO 5 Halle una ecuación de la línea tangente a la parábola $y = x^2 - 8x + 9$ en el punto $(3, -6)$.

SOLUCIÓN Del ejemplo 4 sabe que la derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a es $f'(a) = 2a - 8$. En consecuencia la pendiente de la línea tangente en $(3, -6)$ es $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. En estos términos, una ecuación de la línea tangente, se muestra en la figura 7, es

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \text{o bien} \quad y = -2x$$

□

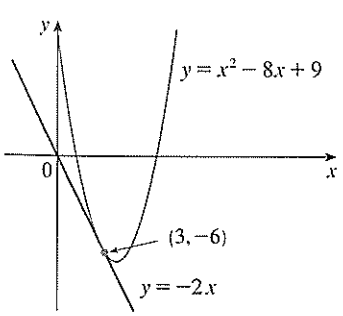
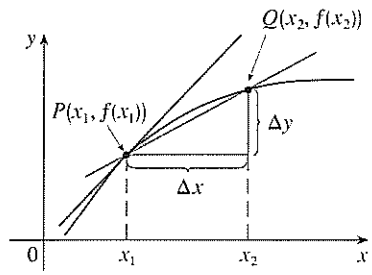


FIGURA 7

RELACIONES DE CAMBIO

Suponga que y es una cantidad que depende de otra cantidad x. Así, y es una función de x y escriba $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, por lo tanto el cambio en x (también conocido como **incremento** de x) es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



razón promedio de cambio = m_{PQ}

razón instantánea de cambio = pendiente de la tangente en P

FIGURA 8

y el cambio correspondiente en y es

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

El cociente de diferencias

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

se llama **razón de cambio promedio de y con respecto a x** en el intervalo $[x_1, x_2]$ y se puede interpretar como la pendiente de la línea secante PQ de la figura 7.

Por analogía con la velocidad, considere la relación de cambio promedio en intervalos cada vez más pequeños haciendo que x_2 tienda a x_1 y, por lo tanto, al hacer que Δx tienda a 0. El límite de estas relaciones de cambio promedio se llama **razón (instantánea) de cambio de y con respecto a x** en $x = x_1$, lo cual se interpreta como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en $P(x_1, f(x_1))$:

6 razón de cambio instantánea $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Reconocer este límite como la derivada $f'(x_1)$.

Sabe que una interpretación de la derivada $f'(a)$ es como la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ cuando $x = a$. Ahora tiene una segunda interpretación:

La derivada $f'(a)$ es la razón de cambio instantánea de $y = f(x)$ con respecto a x cuando $x = a$.

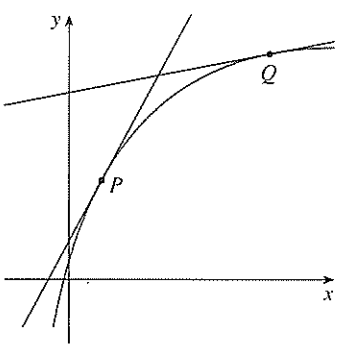


FIGURA 9
Los valores de y cambian con rapidez en P y con lentitud en Q

El enlace con la primera interpretación es que si dibuja la curva $y = f(x)$, a continuación la razón de cambio instantánea es la pendiente de la tangente a esta curva en el punto donde $x = a$. Esto significa que cuando la derivada es considerable (y en consecuencia, la curva es escarpada, como en el punto P de la figura 9), los valores y cambian rápidamente. Cuando la derivada es pequeña, la curva es relativamente plana y el valor de y cambia lentamente.

En particular, si $s = f(t)$ es la función posición de una partícula que se traslada a lo largo de una línea recta, después $f'(a)$ es la razón de cambio del desplazamiento s con respecto al tiempo t. En otras palabras, *$f'(a)$ es la velocidad de la partícula en el tiempo $t = a$*. La **rapidez** de la partícula es el valor absoluto de la velocidad, es decir, $|f'(a)|$.

En el siguiente ejemplo se analiza el significado de la derivada de una función que es definida verbalmente.

EJEMPLO 6 Un fabricante produce un rollo de un tejido con un ancho fijo. El costo de producir x yardas de este tejido es de $C = f(x)$ dólares.

(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?

(b) En términos prácticos, ¿qué significa decir qué $f'(1000) = 9$?

(c) ¿Qué le hace pensar que es grande, $f'(50)$ o bien $f'(500)$? ¿Qué hay con respecto a $f'(5\,000)$?

SOLUCIÓN

(a) La derivada $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de C con respecto a x, es decir, $f'(x)$ significa la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de yardas producidas. (Los economistas llaman a esto rapidez de cambio del *costo marginal*. Esta idea se analiza con más detalle en las secciones 3.7 y 4.7.)

Porque

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

las unidades para $f'(x)$ son las mismas que las unidades para el cociente de diferencia $\Delta C/\Delta x$. Ya que ΔC se mide en dólares y Δx en yardas, por lo que las unidades para $f'(x)$ son dólares por cada yarda.

(b) El enunciado de que $f'(1000) = 9$ significa que, después de fabricar 1000 yardas de tejido, la cantidad a la cual se incrementa el costo de producción es de 9 dólares/yarda. (Cuando $x = 1000$, C se incrementa 9 veces tan rápido como x.)

Ya que $\Delta x = 1$ es pequeño si se le compara con $x = 1000$, podría usarse la aproximación

$$f'(1000) \approx \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\Delta C}{1} = \Delta C$$

y decir que el costo de fabricación de la yarda 1000 (o de la 1001) es de casi 9 dólares.

(c) La proporción a la cual se incrementa el costo de producción (por cada yarda) probablemente es inferior cuando $x = 500$ que cuando $x = 50$ (el costo de fabricación de la yarda 500 es menor que el costo de la yarda 50) debido a la economía de proporción. (El fabricante hace más eficiente el uso de los costos de producción fijos.) De manera que

$$f'(50) > f'(500)$$

Pero, como se expande la producción, el resultado de la operación a gran escala será deficiente y con eso los costos de horas extras de trabajo. En estos términos es posible que la proporción de incremento de costos por último aumentarán. De este modo, es posible que suceda

$$f'(5000) > f'(500)$$ □

En este caso suponga que la función costo se conduce bien, en otras palabras, $C(x)$ no oscila rápidamente cerca de $x = 1000$.

En el ejemplo siguiente estimará la proporción de cambio de la deuda nacional con respecto al tiempo. En este caso, la función no se define mediante una fórmula sino mediante una tabla de valores.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

EJEMPLO 7 Sea $D(t)$ la deuda nacional de Estados Unidos en el tiempo t. La tabla en el margen proporciona valores aproximados de esta función siempre que se estime a fin de año, en miles de míllones de dólares, desde 1980 hasta 2000. Explique y juzgue el valor de $D'(1990)$.

SOLUCIÓN La derivada $D'(1990)$ significa que la razón de cambio de D con respecto a t cuando $t = 1990$, es decir, la proporción de incremento de la deuda nacional en 1990.

De acuerdo a la ecuación 5,

$$D'(1990) = \lim_{t \to 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$$

Así calcule y tabule los valores del cociente de diferencia (la razón de cambio promedio) como sigue.

t	$\dfrac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

■ UNA NOTA SOBRE UNIDADES
Las unidades de la razón de cambio promedio $\Delta D/\Delta t$ son las unidades de ΔD divididas entre las unidades de Δt, o sea, de dólares por cada año. La razón de cambio instantánea es el límite de la razón de cambio promedio, de este modo, se mide en las mismas unidades: miles de millones de dólares por cada año.

A partir de esta tabla se ve que $D'(1990)$ se localiza en alguna parte entre 257.48 y 348.14 miles de millones de dólares por cada año. [En este caso, está haciendo la suposición razonable de que la deuda no fluctuará de manera errática entre 1980 y 2000.] Se estima que la proporción de incremento de la deuda nacional de Estados Unidos en 1990 fue el promedio de estos números, específicamente

$$D'(1990) \approx 303 \text{ miles de millones de dólares por cada año}$$

Otro método sería una gráfica de la función deuda y valorar la pendiente de la línea tangente cuando $t = 1990$.

En los ejemplos 3, 6 y 7 aparecen tres casos específicos de razones de cambio: la velocidad de un objeto es la razón de cambio del desplazamiento con respecto al tiempo; el costo marginal es la razón de cambio del costo de producción con respecto al número de artículos producidos; la razón de cambio de la deuda con respecto al tiempo es de interés en economía. En este caso, es una muestra pequeña de otras razones de cambio: En física, la razón de cambio de trabajo con respecto al tiempo se le denomina *potencia*. Los químicos quienes estudian una reacción química están interesados en la razón de cambio de la concentración de un reactivo con respecto al tiempo (denominada *velocidad de reacción*). Un biólogo se interesa en la relación de cambio de la población de una colonia de bacterias con respecto al tiempo. De hecho, el cálculo de razones de cambio es importante en todas las ciencias naturales, en la ingeniería e, incluso, en las ciencias sociales. En la sección 3.7 se darán más ejemplos.

Todas estas razones de cambio se pueden interpretar como pendientes de tangentes. Esto le confiere un significado adicional a la solución del problema de la tangente. Siempre que resuelva problemas en que intervienen rectas tangentes, no resuelve sólo un problema de geometría. También resuelve implícitamente una gran variedad de problemas de la ciencia y la ingeniería en que intervienen razones de cambio.

2.7 EJERCICIOS

1. Una curva tiene la ecuación $y = f(x)$.
(a) Escriba una expresión para la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P(3, f(3))$ y $Q(x, f(x))$.
(b) Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente en P.

2. Dibuje la curva $y = e^x$ en los rectángulos de visualización $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0.5, 0.5]$ por $[0.5, 1.5]$ y $[-0.1, 0.1]$ por $[0.9, 1.1]$. ¿Qué advierte acerca de la curva conforme hace un acercamiento hacia el punto $(0, 1)$?

3. (a) Halle la pendiente de la línea tangente a la parábola $y = 4x - x^2$ en el punto $(1, 3)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente del inciso (a).
(c) Dibuje la parábola y la tangente. Como verificación de su trabajo, haga un acercamiento hacia el punto $(1, 3)$ hasta que la parábola y la tangente sean indistinguibles.

4. (a) Encuentre la pendiente de la tangente a la curva $y = x - x^3$ en el punto $(1, 0)$
(i) usando la definición 1 (ii) usando la ecuación 2
(b) Halle una ecuación de la tangente del inciso (a).
(c) Dibuje la curva y la tangente en rectángulos de visualización cada vez más pequeñas centradas en $(1, 0)$ hasta que parezcan coincidir la curva y la recta.

5–8 Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado.

5. $y = \dfrac{x - 1}{x - 2}$, $(3, 2)$

6. $y = 2x^3 - 5x$, $(-1, 3)$

7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x}{(x + 1)^2}$, $(0, 0)$

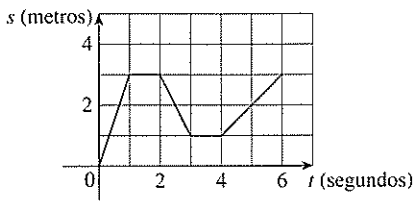
9. (a) Determine la pendiente de la tangente a la curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ en el punto donde $x = a$.
(b) Determine las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(1, 5)$ y $(2, 3)$.
(c) Grafique la curva y ambas tangentes en una misma pantalla.

10. (a) Determine la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en el punto donde $x = a$.
(b) Plantee las ecuaciones de las tangentes en los puntos $(1, 1)$ y $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Grafique la curva y las tres tangentes en una misma pantalla.

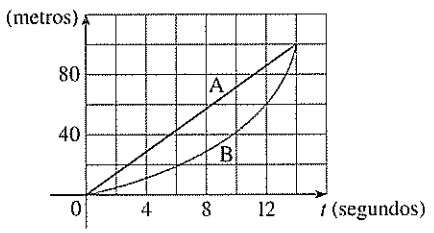
11. (a) Una partícula inicia moviéndose a la derecha a lo largo de una línea horizontal; se muestra la gráfica de su función de posición. ¿Cuándo se mueve la partícula a la derecha? ¿Cuándo a la izquierda? ¿Cuándo permanece inmóvil?

http://libreria-universitaria.blogspot.com

(b) Dibujé una gráfica de la función velocidad.



12. Se muestran las gráficas de las funciones de posición de dos competidoras, A y B, quienes compiten en los 100 m y terminan en empate.



(a) Relate y compare cómo desarrollaron la competencia.
(b) ¿En qué momento la distancia entre las competidoras es la más grande?
(c) ¿En qué momento tienen la misma velocidad?

13. Si una pelota se lanza al aire hacia arriba, con una velocidad de 40 ft/s, su altura (en ft) una vez que transcurren t segundos, está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad después de $t = 2$.

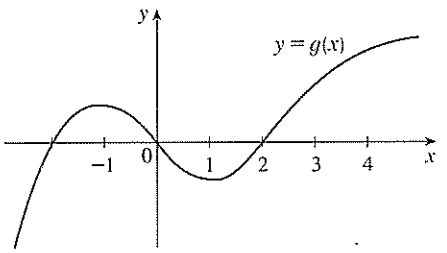
14. Si se lanza una roca hacia arriba en el planeta Marte con una velocidad de 10 m/s, su altura (en metros) después de t segundos se conoce por $H = 10t - 1.86t^2$.
(a) Halle la velocidad de la roca después de un segundo.
(b) Halle la velocidad de la roca cuando $t = a$.
(c) ¿Cuándo incidirá en la superficie la roca?
(d) ¿Con qué velocidad la roca incidirá en la superficie?

15. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por la ecuación del movimiento $s = 1/t^2$, donde t se mide en segundos. Halle la velocidad de la partícula en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ y $t = 3$.

16. El desplazamiento (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dado por $s = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos
(a) Encuentre la velocidad promedio en cada intervalo de tiempo
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3.5, 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4.5]$
(b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 4$.
(c) Dibuje la gráfica de s como función de t y trace las rectas secantes cuyas pendientes son las velocidades promedio del inciso (a) y la recta tangente cuya pendiente es la velocidad instantánea del inciso (b).

17. Se proporciona la gráfica de la función g, reordene los números siguientes en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \quad g'(-2) \quad g'(0) \quad g'(2) \quad g'(4)$$



18. (a) Halle una ecuación de la línea tangente a la gráfica de $y = g(x)$ en $x = 5$ si $g(5) = -3$ y $g'(5) = 4$.
(b) Si la línea tangente a $y = f(x)$ en $(4, 3)$ pasa a través del punto $(0, 2)$, halle $f(4)$ y $f'(4)$.

19. Dibuje la gráfica de una función f para la cual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ y $f'(2) = -1$.

20. Dibuje la gráfica de una función g para la que $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, $g'(1) = 3$ y $g'(2) = 1$.

21. Si $f(x) = 3x^2 - 5x$, halle $f'(2)$ y utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la parábola $y = 3x^2 - 5x$ en el punto $(2, 2)$.

22. Si $g(x) = 1 - x^3$, halle $g'(0)$ y utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 1 - x^3$ en el punto $(0, 1)$.

23. (a) Si $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, halle $F'(2)$ utilice esto para hallar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 5x/(1 + x^2)$ en el punto $(2, 2)$.
(b) Ilustre el inciso (a) graficando la curva y la línea tangente en la misma pantalla.

24. (a) Si $G(x) = 4x^2 - x^3$, hallar $G'(a)$ utilice esto para encontrar una ecuación de la línea tangente a la curva $y = 4x^2 - x^3$ en los puntos $(2, 8)$ y $(3, 9)$.
(b) Ilustre el inciso (a) mediante la gráfica de la curva y la línea tangente en la misma pantalla.

25–30 Hallar $f'(a)$.

25. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

26. $f(t) = t^4 - 5t$

27. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

30. $f(x) = \sqrt{3x + 1}$

31–36 Cada límite representa la derivada de alguna función f en algún número a. Presente en cada caso las f y a.

31. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

32. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

33. $\lim_{x \to 5} \dfrac{2^x - 32}{x - 5}$

34. $\lim_{x \to \pi/4} \dfrac{\tan x - 1}{x - \pi/4}$

35. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

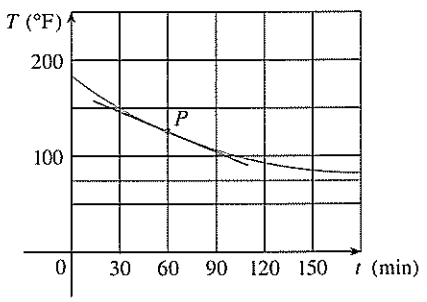
36. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

37–38 Una partícula se traslada a lo largo de una línea recta con ecuación de movimiento $s = f(t)$, donde s se mide en metros y t en segundos. Halle la velocidad y la rapidez cuando $t = 5$.

37. $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$ **38.** $f(t) = t^{-1} - t$

39. Se coloca una lata tibia de gaseosa en un refrigerador frío. Grafique la temperatura de la gaseosa como función del tiempo. ¿La razón de cambio inicial de la temperatura es mayor o menor que la relación de cambio después de una hora?

40. Se saca un pavo asado del horno cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre la mesa de un cuarto donde la temperatura es de 75°F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la temperatura del pavo y, finalmente, tiende a la temperatura del cuarto. Por medio de la medición de la pendiente de la tangente, estime la razón de cambio de la temperatura después de una hora.



41. La tabla muestra el porcentaje estimado P de la población de Europa que utiliza teléfono celular. (Se proporcionan estimaciones semestrales.)

Año	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Halle la razón de crecimiento promedio de celulares
(i) de 2000 a 2002 (ii) de 2000 a 2001
(iii) de 1999 a 2000
En cada caso, incluya las unidades.
(b) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 tomando el promedio de dos relaciones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 midiendo la pendiente de la tangente.

42. En la tabla se proporciona el número N de establecimientos de una popular cadena de cafeterías. (Se dan los números de establecimientos al 30 de junio.)

Año	1998	1999	2000	2001	2002
N	1886	2135	3501	4709	5886

(a) Determine la tasa media de crecimiento
(i) desde 2000 a 2002 (ii) desde 2000 a 2001
(iii) de 1999 a 2000
En cada caso incluya las unidades.
(b) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 considerando el promedio de dos relaciones de cambio promedio. ¿Cuáles son sus unidades?
(c) Estime la razón de crecimiento instantánea en 2000 midiendo la pendiente de una tangente.

43. El costo (en dólares) de producir x unidades de cierto artículo es $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.
(a) Encuentre la razón de cambio promedio de C con respecto a x, cuando se cambia el nivel de producción:
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$
(b) Halle la razón de cambio instantánea de C con respecto a x, cuando $x = 100$. (Esto se conoce como *costo marginal*. En la sección 3.7 se explica su significado.)

44. Si un tanque cilíndrico contiene 100 000 galones de agua que se pueden drenar por el fondo del depósito en 1 h, la ley de Torricelli da el volumen V del agua que queda después de t minutos como

$$V(t) = 100\,000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2 \qquad 0 \leq t \leq 60$$

Encuentre la rapidez con que fluye el agua hacia afuera del tanque (la razón de cambio instantánea de V con respecto a t) como función de t. ¿Cuáles son sus unidades? Para los instantes $t = 0$, 10, 20, 30, 40, 50 y 60 min, encuentre el gasto y la cantidad de agua que queda en el tanque. Resuma sus hallazgos en una oración o dos. ¿En qué instante el gasto es máximo? ¿Cuándo es mínimo?

45. El costo de producir x onzas de oro a partir de una mina de oro reciente es $C = f(x)$ dólares.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(x)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa enunciar $f'(800) = 17$?
(c) ¿Los valores de $f'(x)$ se incrementarán o disminuirán en corto tiempo, cuál es su opinión? ¿Y a largo plazo? Explique.

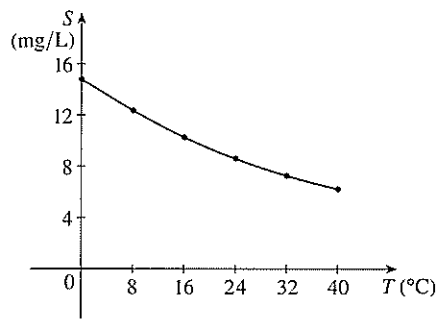
46. El número de bacterias después de t horas en un experimento de laboratorio controlado es $n = f(t)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(5)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Considere que existe una cantidad de espacio y nutrimentos para la bacteria. ¿Cuál es mayor $f'(5)$ o $f'(10)$? Si se limita el suministro de nutrimentos, ¿afectaría su conclusión?

47. Sea $T(t)$ la temperatura (en °F) en Dallas t horas después de la medianoche el 2 de junio de 2001. La tabla muestra los valores de esta función registrada cada dos horas. ¿Cuál es el significado de $T'(10)$? Estime su valor.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

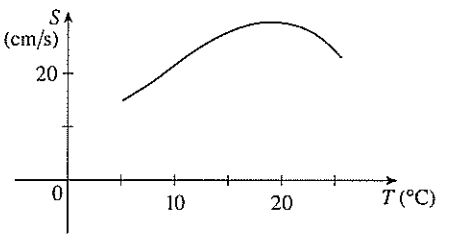
48. La cantidad (en libras) de un café que es vendido por una compañía en un precio de p dólares por cada libra es $Q = f(p)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(8)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿$f'(8)$ es positiva o negativa? Explique.

49. La cantidad de oxígeno que se puede disolver en agua depende de la temperatura del agua. (De esa manera la polución térmica induce el contenido de oxígeno en el agua.) La gráfica muestra cómo varía la solubilidad S de oxígeno como una función de la temperatura del agua T.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Estime e interprete el valor de $S'(16)$.



Adaptada de *Environmental Science: Science: Living Within the System of Nature*, 2d ed.; por Charles E. Kupchella, © 1989. Reimpreso, por autorización de Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, NJ.

50. La gráfica muestra la influencia de la temperatura T en la rapidez máxima sostenible de nado del salmón Coho.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $S'(T)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Estime los valores de $S'(15)$ y $S'(25)$ e interprételos.



51–52 Establezca si existe $f'(0)$.

51. $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

REDACCIÓN DE PROYECTO

MÉTODOS ANTICIPADOS PARA LA BÚSQUEDA DE TANGENTES

La primera persona en formular explícitamente las ideas de los límites y derivadas fue Isaac Newton, en la década de 1660. Pero Newton reconoció: "Si he visto más lejos que otros hombres, es porque he estado parado sobre los hombros de gigantes." Dos de esos gigantes fueron Pierre Fermat (1601-1665) y el maestro de Newton en Cambridge, Isaac Barrow (1630-1677). Newton estaba familiarizado con los métodos que estos hombres habían aplicado para hallar rectas tangentes y los métodos de ambos tuvieron que ver con la formulación final del cálculo a la que llegó Newton.

Las referencias siguientes contienen explicaciones de estos métodos. Lea una o varias y escriba un informe en que compare los métodos de Fermat o de Barrow con los métodos modernos. En particular, aplique el método de la sección 2.7 para hallar una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 2x$ en el punto $(1, 3)$ y muestre cómo habrían resuelto Fermat o Barrow el mismo problema. Aunque usted usó derivadas y ellos no, señale las semejanzas entre los dos métodos.

1. Carl Boyer y Uta Merzbach, *A History of Mathematics* (Nueva York: Wiley, 1989), pp. 389, 432.
2. C. H. Edwards, *The Historical Development of the Calculus* (Nueva York: Springer-Verlag, 1979), pp. 124, 132.
3. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, 6a. ed. (Nueva York: Saunders, 1990), pp. 391, 395.
4. Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Nueva York: Oxford University Press, 1972), pp. 344, 346.

2.8 LA DERIVADA COMO UNA FUNCIÓN

En la sección anterior consideró la derivada de una función f en un número fijo a:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad \boxed{1}$$

Ahora cambie su punto de vista y haga que el número a varíe. Si en la ecuación 1 reemplaza a con una variable x, obtiene

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}} \quad \boxed{2}$$

Dado cualquier número x para el cual este límite exista, asigne a x el número $f'(x)$. De modo que considere f' como una nueva función, llamada **derivada de** f y definida por medio de la ecuación 2. Sabe que el valor de f' en x, $f'(x)$, se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$.

La función f' se conoce como derivada de f, porque se ha "derivado" de f por medio de la operación de hallar el límite en la ecuación 2. El dominio de f' es el conjunto $\{x \mid f'(x) \text{ existe}\}$ y puede ser menor que el dominio de f.

EJEMPLO 1 En la figura 1 se muestra la gráfica de una función f. Úsela para dibujar la derivada f'.

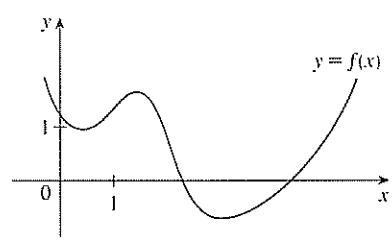
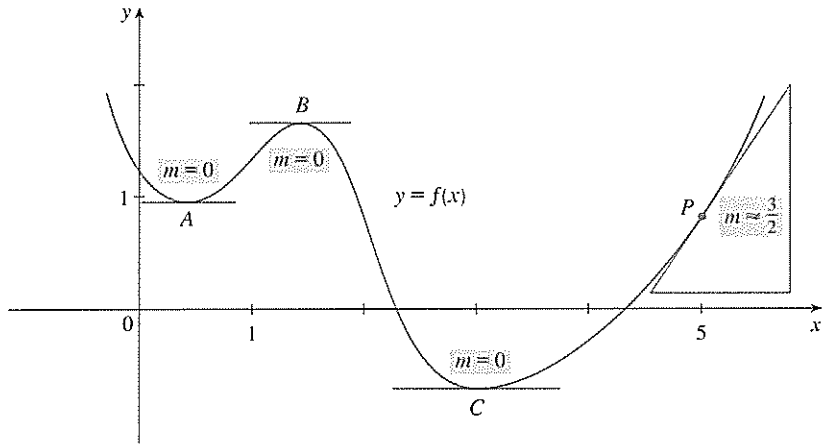
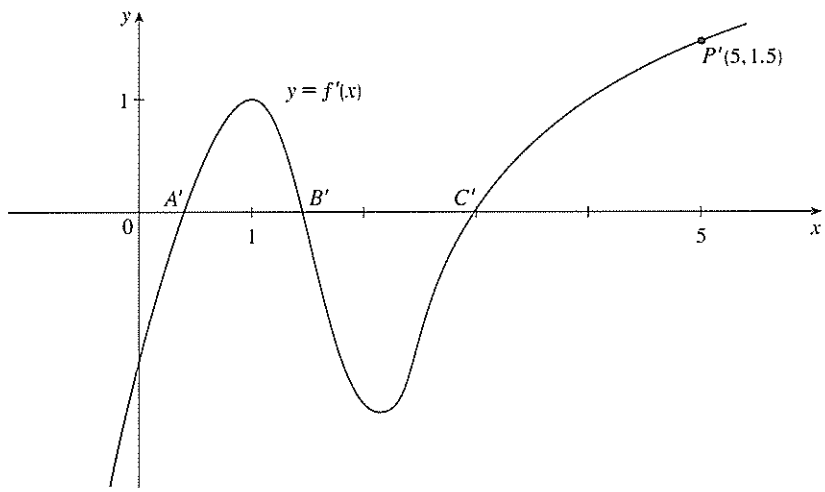


FIGURA 1

SOLUCIÓN Puede estimar el valor de la derivada, en cualquier valor de x, trazando la tangente en el punto $(x, f(x))$ y estimando su pendiente. Por ejemplo, para $x = 5$, trace la tangente en P de la figura 2(a) y estime su pendiente como alrededor de $\frac{3}{2}$, por tanto, $f'(5) \approx 1.5$. Esto permite situar el punto $P'(5, 1.5)$ en la gráfica de f' directamente debajo de P. Si repite este procedimiento en varios puntos, obtiene la gráfica que se muestra en la figura 2(b). Advierta que las tangentes en A, B y C son horizontales, de modo que la derivada es 0 allí y la gráfica de f' cruza el eje x en los puntos A', B' y C', directamente debajo de A, B y C. Entre A y B, las tangentes tienen pendiente positiva, por lo que $f'(x)$ es positiva allí. Pero entre B y C, las tangentes tienen pendientes negativas, de modo que $f'(x)$ es negativa allí.



(a)



(b)

TEC Visual 2.8 muestra una animación de la figura 2 para diferentes funciones.

FIGURA 2 □

EJEMPLO 2

(a) Si $f(x) = x^3 - x$, encuentre una fórmula para $f'(x)$.

(b) Ilústrela comparando las gráficas de f y f'.

SOLUCIÓN

(a) Cuando se usa la ecuación 2 para calcular una derivada, hay que recordar que la variable es h y que x se considera temporalmente como una constante, durante el cálculo del límite.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(x+h)^3 - (x+h)] - [x^3 - x]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) = 3x^2 - 1$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

(b) Use un aparato para trazar las gráficas de f y f' de la figura 3. Advierta que $f'(x) = 0$ cuando f tiene tangentes horizontales y que $f'(x)$ es positiva cuando las tangentes tienen pendientes positivas. De modo que estas gráficas sirven como comprobación de nuestra solución del inciso (a).

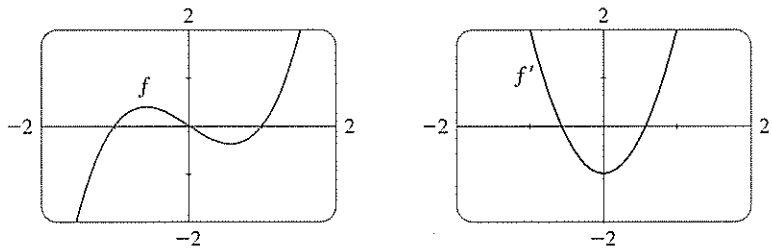


FIGURA 3

□

EJEMPLO 3 Si $f(x) = \sqrt{x}$, encuentre la derivada de f. Establezca el dominio de f'.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

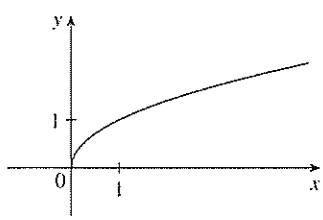
$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

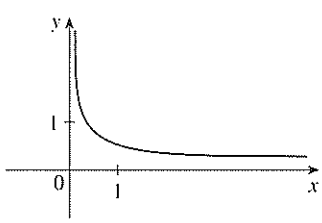
$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aquí racionalice el numerador.

Observe que $f'(x)$ existe si $x > 0$, de modo que el dominio de f' es $(0, \infty)$. Éste es menor que el dominio de f, el cual es $[0, \infty)$. □



(a) $f(x) = \sqrt{x}$



(b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

FIGURA 4

Compruebe que el resultado del ejemplo 3 es razonable observando las gráficas de f y f' en la figura 4. Cuando x está cerca de 0, $\sqrt{x}$ está cerca de 0, por lo tanto, $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ es muy grande y esto corresponde a las rectas tangentes empinadas cerca de (0, 0) de la figura 4(a) y a los valores grandes de $f'(x)$ justo a la derecha de 0 en la figura 5(b). Cuando x es grande, $f'(x)$ es muy pequeño y esto corresponde a las rectas tangentes más aplanadas en la extrema derecha de la gráfica de f y la asíntota horizontal de la gráfica de f'.

EJEMPLO 4 Encuentre f' si $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = -\frac{3}{(2+x)^2}$$

□

OTRAS NOTACIONES

Si usa la notación tradicional $y = f(x)$ para indicar que la variable independiente es x y la dependiente es y, en tal caso algunas otras notaciones comunes para la derivada son:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Los símbolos D y d/dx se llaman **operadores de derivación** porque indican la operación de **derivación**, que es el proceso de calcular una derivada.

El símbolo dy/dx introducido por Leibniz no debe considerarse como una razón (por ahora); es sencillamente un sinónimo de $f'(x)$. No obstante, es una notación útil y sugerente, en especial cuando se usa en la notación de incrementos. Con base en la ecuación 2.7.6, puede volver a escribir la definición de derivada en la notación de Leibniz en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Si desea indicar el valor de una derivada dy/dx en la notación de Leibniz en un número específico a, use la notación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \qquad \text{o bien} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$$

que es un sinónimo para $f'(a)$.

LEIBNIZ

Gottfried Wilhelm Leibniz nació en Leipzig, en 1646, y estudió leyes, teología, filosofía y matemáticas en la universidad de allí. Obtuvo el grado de bachiller a los 17 años. Después de lograr su doctorado en leyes a la edad de 20, ingresó al servicio diplomático y pasó la mayor parte de su vida viajando por las capitales de Europa, en misiones diplomáticas. En particular, trabajó para conjurar una amenaza militar francesa contra Alemania e intentó reconciliar las Iglesias católica y protestante.

Su estudio serio de las matemáticas no se inició sino hasta 1672, cuando se encontraba en una misión diplomática en París. Allí construyó una máquina para realizar cálculos y se encontró con científicos, como Huygens, quienes dirigieron su atención hacia los desarrollos más recientes en las matemáticas y las ciencias. Leibniz se empeñó en desarrollar una lógica simbólica y un sistema de notación que simplificara el razonamiento lógico. En la versión del cálculo que publicó en 1684 estableció la notación y las reglas para hallar derivadas que aún se usan en la actualidad.

Por desgracia, en la década de 1690 surgió una terrible disputa entre los seguidores de Newton y los de Leibniz acerca de quién había inventado el cálculo. Leibniz incluso fue acusado de plagio por los miembros de la Real Academia de Inglaterra. La verdad es que cada uno lo inventó por separado. Newton llegó primero a su versión del cálculo pero, debido a su temor a la controversia, no la publicó de inmediato. Por tanto, el informe de Leibniz del cálculo en 1684 fue el primero en publicarse.

3 DEFINICIÓN Una función f es **derivable en** a si $f'(a)$ existe. Es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) [o (a, ∞) o $(-\infty, a)$ $(-\infty, \infty)$] si es derivable en todo número del intervalo.

EJEMPLO 5 ¿Dónde es derivable la función $f(x) = |x|$?

SOLUCIÓN Si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y puede elegir h suficientemente pequeño que $x + h > 0$, de donde $|x + h| = x + h$. Por lo tanto, para $x > 0$ tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

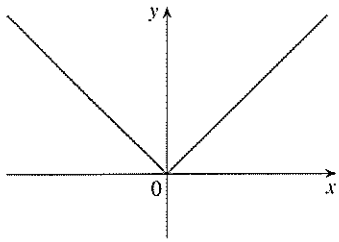
y así f es derivable para cualquier $x > 0$.

De manera análoga, para $x < 0$ tiene $|x| = -x$ y se puede elegir h suficientemente pequeño para que $x + h < 0$ y, así, $|x + h| = -(x + h)$. Por lo tanto, para $x < 0$,

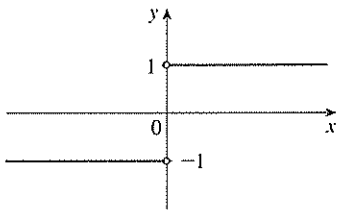
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{|x + h| - |x|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0} (-1) = -1$$

con lo que f es derivable para cualquier $x < 0$.



(a) $y = f(x) = |x|$



(b) $y = f'(x)$

FIGURA 5

Para $x = 0$ debe investigar

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - |0|}{h} \qquad \text{(si existe)}$$

Compare los límites por la izquierda y por la derecha, por separado:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0^+} 1 = 1$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|0 + h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-1) = -1$$

Como estos límites son diferentes, $f'(0)$ no existe. Así, f es derivable en toda x, excepto 0.

Se da una fórmula para f'

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y su gráfica aparece en la figura 5(b). La inexistencia de $f'(0)$ se refleja geométricamente en el hecho de que la curva $y = |x|$ no tiene una recta tangente en (0, 0). [Véase la figura 5(a).] □

Tanto la continuidad como la derivabilidad son propiedades deseables para una función y el teorema siguiente muestra cómo se relacionan ambas

4 TEOREMA Si f es derivable en a, en tal caso f es continua en a.

DEMOSTRACIÓN Para probar que f es continua en a, debe probar que $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Lleve a cabo esto demostrando que la diferencia $f(x) - f(a)$ tiende a 0.

La información dada es que f es derivable en a; es decir,

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. (Véase la ecuación 2.7.5.) Para vincular lo dado con lo desconocido, divida y multiplique $f(x) - f(a)$ por $x - a$ (lo cual es viable cuando $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

De este modo, si usa la ley de producto y la ecuación (2.7.5), puede escribir

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0 = 0$$

Para utilizar lo que acaba de probar, parta de $f(x)$ y súmele y réstele $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

En consecuencia, f es continua en a. □

NOTA El inverso del teorema 4 es falso; es decir, hay funciones que son continuas pero no son derivables. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ es continua en 0 porque

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0)$$

(Véase el ejemplo 7 de la sección 2.3.) Pero, en el ejemplo 5 demostró que f no es derivable en 0.

¿CÓMO DEJA DE SER DERIVABLE UNA FUNCIÓN?

En el ejemplo 5 vio que la función $y = |x|$ no es derivable en 0 y en la figura 5(a) muestra que su gráfica cambia de dirección repentinamente cuando $x = 0$. En general, si la gráfica de una función f tiene "esquinas" o "rizos", la gráfica de f no tiene tangente en esos puntos y f no es derivable allí. [Al intentar calcular $f'(a)$, encuentra que los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes.]

El teorema 4 señala otra forma en que una función no tiene derivada. En él se afirma que si f no es continua en a, después f no es derivable en a. Por ende, en cualquier discontinuidad (por ejemplo, una discontinuidad por salto), f deja de ser derivable.

Una tercera posibilidad es que la curva tenga una **recta tangente vertical** cuando $x = a$; es decir, f es continua en a y

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Esto significa que las rectas tangentes se vuelven más y más empinadas cuando $x \to a$. En la figura 6 se muestra una forma en que esto puede suceder; la figura 7(c) ilustra otra. Las tres posibilidades recién analizadas se ilustran en la figura 7.

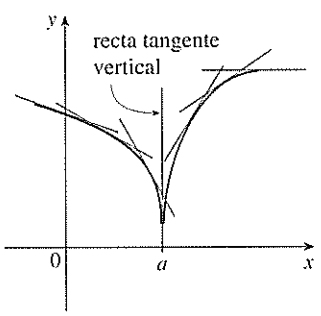
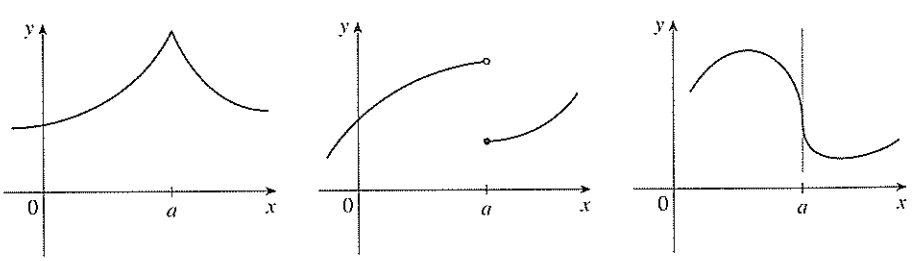


FIGURA 6



(a) Una esquina o rizo (b) Una dicontinuidad (c) Una tangente vertical

FIGURA 7
Tres maneras para que f no sea derivable en a

Una calculadora graficadora o una computadora ofrecen otra manera de ver la derivabilidad. Si f es derivable en a, por lo tanto, con un acercamiento al punto $(a, f(a))$, la gráfica se endereza y adquiere más y más la apariencia de un recta. (Véase la figura 8. Un ejemplo

específico es la figura 2 de la sección 2.7.) Pero no importa cuánto se acerque a puntos como los de las figuras 6 y 7(a), no puede eliminar el punto agudo o esquina. (Véase la figura 9.)

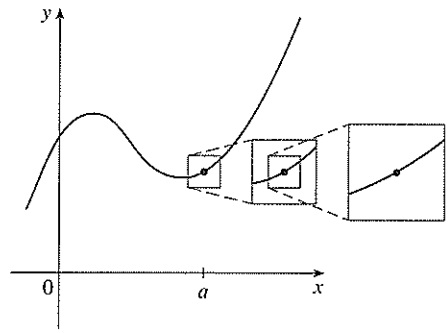


FIGURA 8
f es derivable en a

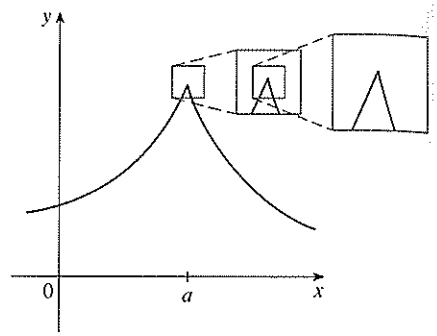


FIGURA 9
f no es derivable en a

DERIVADAS SUPERIORES

Si f es una función derivable, entonces su derivada f' también es una función, así, f' puede tener una derivada de sí misma, señalada por $(f')' = f''$. Esta nueva función f'' se denomina **segunda derivada** de f porque es la derivada de la derivada de f. Utilizando la notación de Leibniz, se escribe la segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^3 - x$, hallar e interpretar $f''(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 2 encontró que la primera derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$. De este modo, la segunda derivada es

$$f''(x) = (f')'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h) = 6x$$

Las gráficas de f, f' y f'' se exhiben en la figura 10.

Puede interpretar $f''(x)$ como la pendiente de la curva $y = f'(x)$ en el punto $(x, f'(x))$. En otras palabras, es la relación de cambio de la pendiente de la curva original $y = f(x)$.

Observe de la figura 10 que $f''(x)$ es negativa cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente negativa y positiva cuando $y = f'(x)$ tiene pendiente positiva. De esta manera, las gráficas sirven como una comprobación de sus cálculos. □

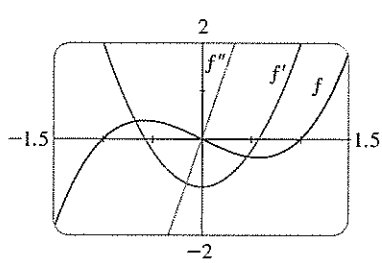


FIGURA 10

TEC En Module 2.8 puede ver cómo cambian los coeficientes de un polinomio f que afecta el aspecto de la gráfica de f, f' y f''.

En general, se puede interpretar una segunda derivada como una relación de cambio de una relación de cambio. El ejemplo más familiar es la *aceleración*, que se define como sigue.

Si $s = s(t)$ es la función posición de un objeto que se traslada en una línea recta, sabe que su primera derivada representa la velocidad $v(t)$ del objeto como una función del tiempo:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

A la relación de cambio de la velocidad instantánea con respecto al tiempo se le denomina **aceleración** $a(t)$ del objeto. En estos términos, la función aceleración es la derivada de la función velocidad y en consecuencia, es la segunda derivada de la función posición:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

o en la notación de Leibniz

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

La **tercera derivada** f''' es la derivada de la segunda derivada: $f''' = (f'')'$. De este modo, $f'''(x)$ se puede interpretar como la pendiente de la curva $y = f''(x)$ o como la relación de cambio de $f''(x)$. Si $y = f(x)$, por lo tanto, las notaciones alternativas para la tercera derivada son

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

El proceso puede continuar. La cuarta derivada f'''' usualmente se señala mediante $f^{(4)}$. En general, la n-esima derivada de f se señala mediante $f^{(n)}$ y se obtiene de f derivando n veces. Si $y = f(x)$, escriba

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

EJEMPLO 7 Si $f(x) = x^3 - x$, hallar $f'''(x)$ e interpretar $f^{(4)}(x)$.

SOLUCIÓN En el ejemplo 6 encontró que $f''(x) = 6x$. La gráfica de la segunda derivada tiene ecuación $y = 6x$ y de este modo, es una línea recta con pendiente 6. Ya que la derivada $f'''(x)$ es la pendiente de $f''(x)$, se tiene

$$f'''(x) = 6$$

para todos los valores de x. Así, f''' es una función constante y su gráfica es una línea horizontal. En consecuencia, para todos los valores de x,

$$f^{(4)}(x) = 0$$ □

Se puede interpretar la tercera derivada físicamente en el caso donde la función es la función posición $s = s(t)$ de un objeto que se traslada a lo largo de una línea recta. Porque $s''' = (s'')' = a'$, la tercera derivada de la función posición es la derivada de la función aceleración y se le denomina **jerk**:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3s}{dt^3}$$

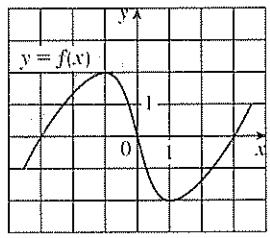
Por esto el jerk j es la relación de cambio de la aceleración. Nombre apropiado porque un jerk considerable significa un cambio repentino de aceleración, que ocasiona un movimiento repentino en un vehículo.

Se ha visto que una aplicación de la segunda y tercera derivada sucede al analizar el movimiento de objetos empleando aceleración y jerk. Se investigará otra aplicación de la segunda derivada en la sección 4.3, donde se muestra cómo el conocer f'' proporciona información acerca de la forma de la gráfica de f. En el capítulo 11 vera cómo la segunda derivada y derivadas superiores permiten representar funciones como sumas de series infinitas.

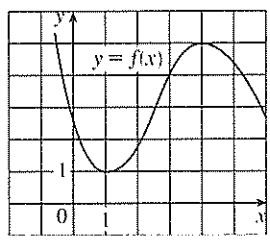
2.8 EJERCICIOS

1–2 Use la gráfica que se proporciona para estimar el valor de cada derivada. Luego dibuje f'.

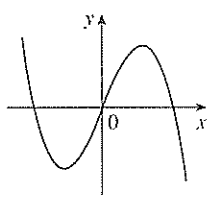
1. (a) $f'(-3)$
(b) $f'(-2)$
(c) $f'(-1)$
(d) $f'(0)$
(e) $f'(1)$
(f) $f'(2)$
(g) $f'(3)$

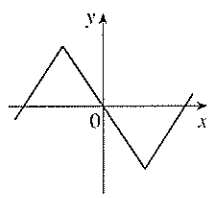


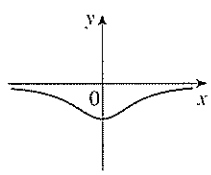
2. (a) $f'(0)$
(b) $f'(1)$
(c) $f'(2)$
(d) $f'(3)$
(e) $f'(4)$
(f) $f'(5)$

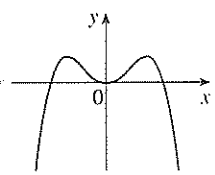


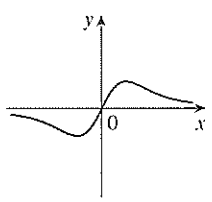
3. Correlacione la gráfica de cada función dada en las figuras (a)-(d) con las gráficas de sus derivadas en las figuras I a IV. Dé las razones para sus selecciones.

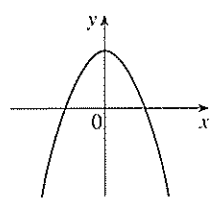
(a)


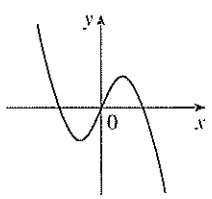
(b)


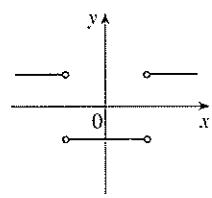
(c)


(d)


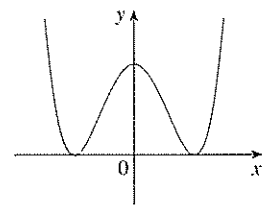
I


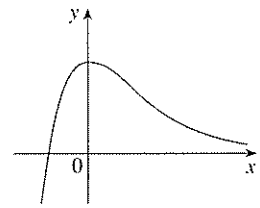
II


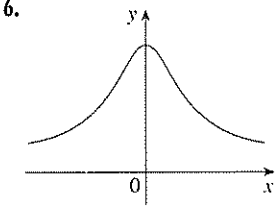
III


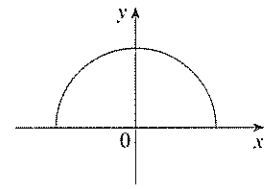
IV


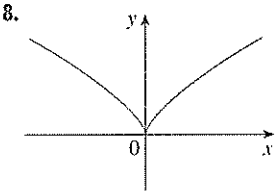
4–11 Trace o copie la gráfica de la función dada f. (Suponga que los ejes tienen escalas iguales.) Luego aplique el método del ejemplo 1 para trazar la gráfica de f' debajo de ella.

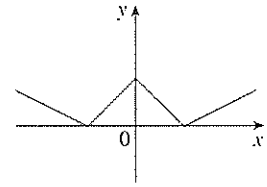
4.


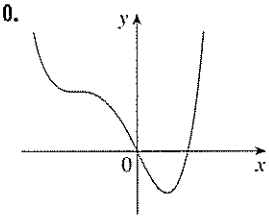
5.


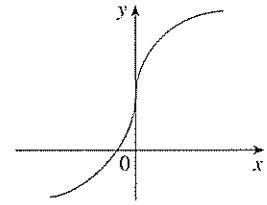
6.


7.


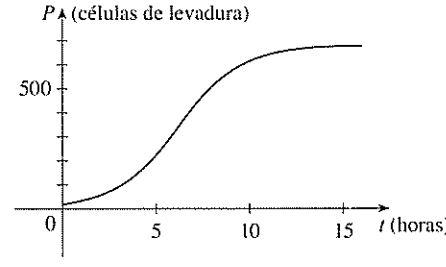
8.


9.


10.


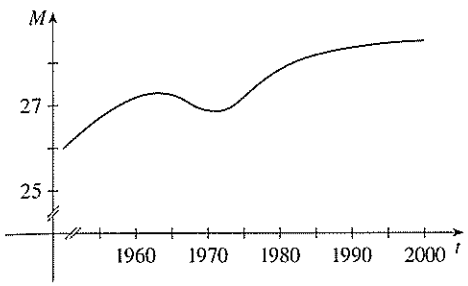
11.


12. Se muestra la gráfica de la función de población $P(t)$ para célu las de levadura en un cultivo de laboratorio. Use el método del



ejemplo 1 para dibujar la derivada $P'(t)$. ¿Qué indica la gráfica de P' acerca de la población de levadura?

13. La gráfica ilustra cómo ha variado la edad promedio en que contraían matrimonio por primera vez los hombres japoneses en la segunda mitad del siglo XX. Trace la gráfica de la función derivada $M'(t)$. ¿Durante cuáles años fue negativa la derivada?



14–16 Trace una gráfica cuidadosa de f y, debajo de ella, la gráfica de f' de la misma manera que en los ejercicios 4–11. ¿Puede intentar una fórmula para $f'(x)$ a partir de su gráfica?

14. $f(x) = \operatorname{sen} x$

15. $f(x) = e^x$

16. $f(x) = \ln x$

---

17. Sea $f(x) = x^2$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$ y $f'(2)$ usando un aparato graficador para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$ y $f'(-2)$.
(c) Con los resultados de los incisos (a) y (b), proponga una fórmula para $f'(x)$.
(d) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (c) es correcta.

18. Sea $f(x) = x^3$.
(a) Estime los valores de $f'(0)$, $f'(\frac{1}{2})$, $f'(1)$, $f'(2)$ y $f'(3)$ usando un aparato graficador para hacer un acercamiento sobre la gráfica de f.
(b) Aplique la simetría para deducir los valores de $f'(-\frac{1}{2})$, $f'(-1)$, $f'(-2)$ y $f'(-3)$.
(c) Use los valores de los incisos (a) y (b) para trazar la gráfica f'.
(d) Proponga una fórmula parar $f'(x)$.
(e) Aplique la definición de derivada para probar que su proposición del inciso (d) es correcta.

19–29 Encuentre la derivada de la función dada aplicando la definición de derivada. Dé los dominios de la función y de su derivada.

19. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

20. $f(x) = mx + b$

21. $f(t) = 5t - 9t^2$

22. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

23. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

24. $f(x) = x + \sqrt{x}$

25. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

26. $f(x) = \dfrac{3 + x}{1 - 3x}$

27. $G(t) = \dfrac{4t}{t + 1}$

28. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$

29. $f(x) = x^4$

---

30. (a) Dibuje $f(x) = \sqrt{6 - x}$ a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ aplicando las transformaciones de la sección 1.3.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para trazar la de f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$. ¿Cuáles son los dominios de f y de f'?
(d) Use un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su esquema del inciso (b).

31. (a) Si $f(x) = x^3 + 2x$, encuentre $f'(x)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

32. (a) Si $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, encuentre $f'(t)$.
(b) Vea si su respuesta al inciso (a) es razonable comparando las gráficas de f y de f'.

33. La tasa de desempleo $U(t)$ varía con el tiempo. La tabla del Bureau of Labor Statistics (Oficina de Estadísticas de Empleo) proporciona el porcentaje de desempleados en la fuerza laboral de Estados Unidos de 1993 al 2002.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1993	6.9	1998	4.5
1994	6.1	1999	4.2
1995	5.6	2000	4.0
1996	5.4	2001	4.7
1997	4.9	2002	5.8

(a) ¿Cuál es el significado de $U'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $U'(t)$.

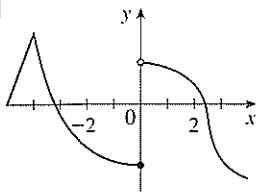
34. Sea $P(t)$ el porcentaje de estadounidenses por debajo de 18 años de edad en el instante t. La tabla proporciona valores de esta función en los años en que se levantó un censo de 1950 a 2000.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1950	31.1	1980	28.0
1960	35.7	1990	25.7
1970	34.0	2000	25.7

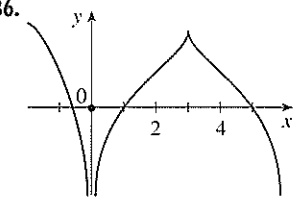
(a) ¿Cuál es el significado de $P'(t)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) Construya una tabla de valores para $P'(t)$.
(c) Dibuje P y P'.
(d) ¿Cómo sería posible obtener valores más precisos para $P'(t)$?

35–38 Se proporciona la gráfica de f. Establezca, con argumentos, los números en que f no es derivable.

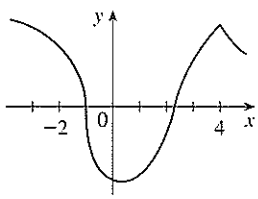
35.



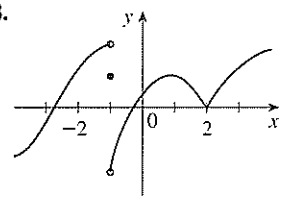
36.



37.



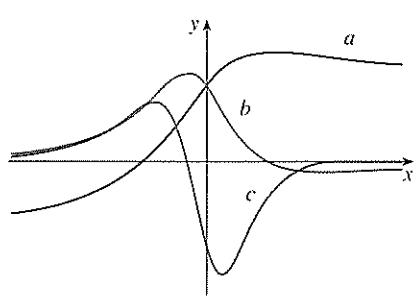
38.



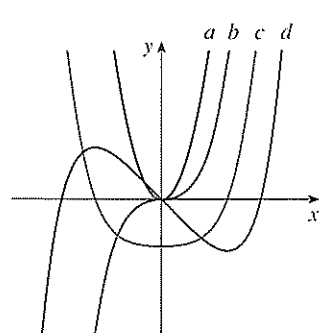
39. Dibuje la función $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Haga acercamientos sucesivos primero hacia el punto $(-1, 0)$ y luego en dirección al origen. ¿Qué diferencia existe en cuanto al comportamiento de f en las cercanías de estos dos puntos? ¿Qué conclusiones infiere acerca de la derivabilidad de f?

40. Haga un acercamiento hacia los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(-1, 0)$ sobre la gráfica de la función $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. ¿Qué advierte? Registre lo que observa en términos de la derivabilidad de g.

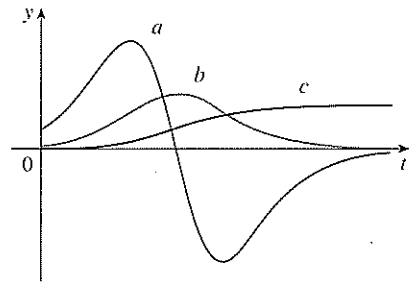
41. La figura exhibe las gráficas de f, f' y f''. Indique cada curva y explique su elección.



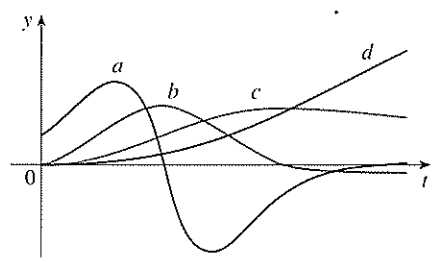
42. La figura muestra gráficas de f, f', f'' y f'''. Identifique cada curva y explique su alternativa.



43. La figura describe las gráficas de tres funciones. Una es la función posición de un automóvil, otra es la velocidad del mismo, y la de su aceleración. Identifique cada curva y explique su opción.



44. La figura muestra las gráficas de cuatro funciones posición de un automóvil, otra la velocidad de él, la aceleración y la que resta su jerk. Identifique cada curva y explique su preferencia.

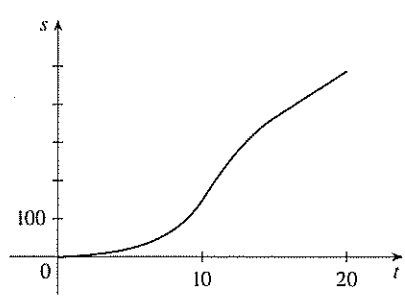


45–46 Aplique la definición de una derivada para hallar $f'(x)$ y $f''(x)$. Después, grafique f, f' y f'' en una misma pantalla y verifique para ver si sus respuestas son justas.

45. $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **46.** $f(x) = 1/x$

47. Si $f(x) = 2x^2 - x^3$, hallar $f'(x), f''(x), f'''(x)$ y $f^{(4)}(x)$. Grafique f, f', f'' y f''' en una misma pantalla. ¿Las gráficas son consistentes con la interpretación geométrica de estas derivadas?

48. (a) Se muestra la gráfica de una función posición de un automóvil, donde s se mide en pies y t en segundos. Utilice la gráfica de la velocidad y la aceleración del automóvil. ¿Cuál es la aceleración en $t = 10$ segundos?



(b) Aplique la curva de aceleración del inciso (a) para estimar el jerk en $t = 10$ segundos. ¿Cuáles son las unidades del jerk?

49. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Si $a \neq 0$, use la ecuación 2.7.5 para hallar $f'(a)$.
(b) Demuestre que $f'(0)$ no existe.
(c) Demuestre que $y = \sqrt[3]{x}$ tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$. (Recuerde la forma de la función de f. Véase la figura 13 de la sección 1.2.)

50. (a) Si $g(x) = x^{2/3}$, demuestre que $g'(0)$ no existe.
(b) Si $a \neq 0$, encuentre $g'(a)$.
(c) Demuestre que $y = x^{2/3}$ tiene una recta tangente vertical en $(0, 0)$.
(d) Ilustre el inciso (c) dibujando $y = x^{2/3}$.

51. Demuestre que la función $f(x) = |x - 6|$ no es derivable en 6. Encuentre una fórmula para f' y trace su gráfica.

52. ¿Dónde es no derivable la función entero máximo $f(x) = [\![x]\!]$? Halle una fórmula para f' y trace su gráfica.

53. (a) Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x\,|x|$.
(b) Para qué valores de x es f derivable.
(c) Halle una fórmula para f'.

54. Las **derivadas izquierda** y **derecha** de f en a están definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

y

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si existen estos límites. En tal caso, $f'(a)$ existe si y sólo si estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

(b) Dibuje la gráfica de f.
(c) ¿Dónde es f discontinua?
(d) ¿Dónde f no es derivable?

55. Recuerde que a una función se le denomina como *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x en su dominio e *impar* si $f(-x) = -f(x)$ para toda x. Pruebe cada uno de los siguientes
(a) La derivada de una función par es una función impar.
(b) La derivada de una función impar es una función par.

56. Cuando abre un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende del tiempo que el agua ha estado corriendo.
(a) Trace una gráfica posible de T como función del tiempo transcurrido desde que abrió el grifo.
(b) Describa cómo varía la relación de cambio de T con respecto a t, conforme ésta aumenta.
(c) Dibuje la derivada de T.

57. Sea ℓ la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$. El *ángulo de inclinación* de ℓ es el ángulo ϕ que ℓ describe con la dirección positiva del eje x. Calcule ϕ correcto al grado más cercano.

2 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. Explique qué significa cada una de las siguientes e ilustre mediante un boceto.

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Describa varias formas en que un límite puede no existir. Ilustre con bocetos.

3. Enuncie las leyes de los límites siguientes.
(a) Ley de la suma (b) Ley de la diferencia
(c) Ley del múltiplo constante (d) Ley del producto
(e) Ley del cociente (f) Ley de la potencia
(g) Ley de la raíz

4. ¿Qué dice el teorema de la compresión?

5. (a) ¿Qué quiere darse a entender al decir que la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.
(b) Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las diversas posibilidades.

6. ¿Cuál de las curvas siguientes tiene asíntotas verticales? ¿Cuál tiene asíntotas horizontales?
(a) $y = x^4$ (b) $y = \operatorname{sen} x$
(c) $y = \tan x$ (d) $y = \tan^{-1} x$
(e) $y = e^x$ (f) $y = \ln x$
(g) $y = 1/x$ (h) $y = \sqrt{x}$

7. (a) ¿Qué significa que f sea continua en a?
(b) ¿Qué significa que f sea continua en el intervalo $(-\infty, \infty)$? ¿Qué puede decir acerca de la gráfica de tal función?

8. ¿Qué dice el teorema del valor intermedio?

9. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

10. Suponga que un objeto se mueve a lo largo de una línea recta con posición $f(t)$ en el instante t. Escriba una expresión para la velocidad instantánea de un objeto en el instante $t = a$. ¿Cómo puede interpretar esta velocidad en términos de la gráfica de f?

11. Si $y = f(x)$ y x cambia de x_1 a x_2, escriba expresiones para lo siguiente:
(a) La razón de cambio promedio de y con respecto a x a lo largo del intervalo $[x_1, x_2]$.
(b) La razón instantánea de cambio de y con respecto a x en $x = x_1$.

12. Defina la derivada $f'(a)$. Analice dos maneras de interpretar este número.

13. Defina la segunda derivada de f. Si $f(x)$ es la función de posición de una partícula, ¿cómo puede interpretar la segunda derivada?

14. (a) ¿Qué significa que f sea derivable en a?
(b) ¿Cuál es la relación entre la derivabilidad y la continuidad de una función?
(c) Trace la gráfica de una función que es continua pero no derivable en $a = 2$.

15. Describa varias maneras en que una función puede no ser derivable. Ilustre con bocetos.

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. $\lim_{x\to 4}\left(\dfrac{2x}{x-4} - \dfrac{8}{x-4}\right) = \lim_{x\to 4}\dfrac{2x}{x-4} - \lim_{x\to 4}\dfrac{8}{x-4}$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+5x-6} = \dfrac{\lim_{x\to 1}(x^2+6x-7)}{\lim_{x\to 1}(x^2+5x-6)}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+2x-4} = \dfrac{\lim_{x\to 1}(x-3)}{\lim_{x\to 1}(x^2+2x-4)}$

4. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

5. Si $\lim_{x\to 5} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 5} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to 5}[f(x)/g(x)]$ no existe.

6. Si $\lim_{x\to 6} f(x)g(x)$ existe, entonces el límite tiene que ser $f(6)g(6)$.

7. Si p es un polinomio, entonces $\lim_{x\to b} p(x) = p(b)$.

8. Si $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$, luego $\lim_{x\to 0}[f(x) - g(x)] = 0$.

9. Una función puede tener dos asíntotas horizontales distintas.

10. Si f tiene un dominio $[0, \infty)$ y no tiene asíntota horizontal entonces $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ o $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.

11. Si la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$, entonces f no está definida en 1.

12. Si $f(1) > 0$ y $f(3) < 0$, entonces existe un número c entre 1 y 3 tal que $f(c) = 0$.

13. Si f es continua en 5 y $f(5) = 2$ y $f(4) = 3$, entonces $\lim_{x\to 2} f(4x^2 - 11) = 2$.

14. Si f es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = 4$ y $f(1) = 3$, entonces existe un número r tal que $|r| < 1$ y $f(r) = \pi$.

15. Sea f una función tal que $\lim_{x\to 0} f(x) = 6$. Entonces existe un número δ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x) - 6| < 1$.

16. Si $f(x) > 1$ para toda x y $\lim_{x\to 0} f(x)$ entonces $\lim_{x\to 0} f(x) > 1$.

17. Si f es continua en a, entonces f es derivable en a.

18. Si $f'(r)$ existe, entonces $\lim_{x\to r} f(x) = f(r)$.

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

20. La ecuación $x^{10} - 10x^2 + 5 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, 2)$

EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de f.

(a) Encuentre cada uno de los límites o explique por qué no existe.

(i) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to -3^+} f(x)$

(iii) $\lim_{x \to -3} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to 4} f(x)$

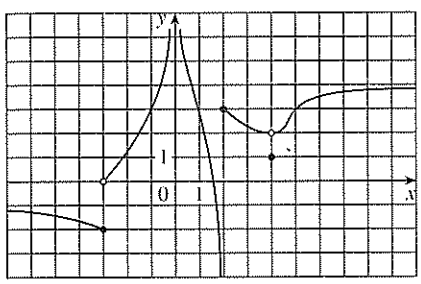
(v) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$

(vii) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ (viii) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

(b) Enuncie las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

(c) Enuncie las ecuaciones de las asíntotas verticales.

(d) ¿En qué números f es discontinua?



2. Trace la gráfica de un ejemplo de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \infty$,

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2$,

f es continua desde la derecha en 3.

3–20 Encuentre el límite

3. $\lim_{x \to 1} e^{x^3 - x}$

4. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

5. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

6. $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 3}$

7. $\lim_{h \to 0} \dfrac{(h - 1)^3 + 1}{h}$

8. $\lim_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 4}{t^3 - 8}$

9. $\lim_{r \to 9} \dfrac{\sqrt{r}}{(r - 9)^4}$

10. $\lim_{v \to 4^+} \dfrac{4 - v}{|4 - v|}$

11. $\lim_{u \to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 + 5u^2 - 6u}$

12. $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 6} - x}{x^3 - 3x^2}$

13. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

14. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{2x - 6}$

15. $\lim_{x \to \pi^-} \ln(\operatorname{sen} x)$

16. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1 - 2x^2 - x^4}{5 + x - 3x^4}$

17. $\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 1} - x)$

18. $\lim_{x \to -\infty} e^{x - x^3}$

19. $\lim_{x \to 0^+} \tan^{-1}(1/x)$

20. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$

21–22 Use las gráficas para descubrir las asíntotas de la curva. Luego pruebe qué ha descubierto.

21. $y = \dfrac{\cos^2 x}{x^2}$

22. $y = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}$

23. Si $2x - 1 \leq f(x) \leq x^2$ para $0 < x < 3$, encuentre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

24. Pruebe que $\lim_{x \to 0} x^2 \cos(1/x^2) = 0$.

25–28 Demuestre que cada afirmación es verdadera usando la definición precisa de límite.

25. $\lim_{x \to 2} (14 - 5x) = 4$

26. $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} = 0$

27. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 3x) = -2$

28. $\lim_{x \to 4} \dfrac{2}{\sqrt{x - 4}} = \infty$

29. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leq x < 3 \\ (x - 3)^2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

(a) Evalúe cada límite, si existe.

(i) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (iii) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(iv) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ (v) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (vi) $\lim_{x \to 3} f(x)$

(b) ¿Dónde es discontinua f?

(c) Trace la gráfica de f.

30. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2 - x & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si } 3 < x < 4 \\ \pi & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

(a) Para cada uno de los números 2, 3 y 4, descubra si g es continua por la izquierda, por la derecha o continua en el número.

(b) Bosqueje la gráfica de g.

31–32 Demuestre que cada función es continua en su dominio. Dé el dominio.

31. $h(x) = xe^{\operatorname{sen} x}$

32. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2 - 2}$

33–34 Aplique el teorema del valor intermedio para demostrar que existe una raíz de la ecuación en el intervalo dado.

33. $2x^3 + x^2 + 2 = 0, \quad (-2, -1)$

34. $e^{-x^2} = x, \quad (0, 1)$

---

35. (a) Encuentre la pendiente de la recta tangente en la curva $y = 9 - 2x^2$ en el punto $(2, 1)$.
(b) Escriba una ecuación de esta tangente.

36. Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la curva

$$y = \frac{2}{1 - 3x}$$

en los puntos de abcisas 0 y -1.

37. La expresión $s = 1 + 2t + \frac{1}{4}t^2$, da el desplazamiento (en metros) de un objeto que se mueve en una línea recta. En dicha expresión, t se mide en segundos.
(a) Encuentre la velocidad promedio en los siguientes periodos
(i) $[1, 3]$ (ii) $[1, 2]$
(iii) $[1, 1.5]$ (iv) $[1, 1.1]$
(b) Halle la velocidad instantánea cuando $t = 1$.

38. Según la ley de Boyle, si la temperatura de un gas confinado se mantiene fija, entonces el producto de la presión P y el volumen V es constante. Suponga que, para cierto gas, $PV = 800$, donde P se mide en libras por pulgada cuadrada y V en pulgadas cúbicas.
(a) Encuentre la razón promedio de cambio de P cuando V se incrementa de 200 pulg^3 a 250 pulg^3.
(b) Exprese V como función de P y demuestre que la razón instantánea de cambio de V con respecto a P es inversamente proporcional al cuadrado de esta última.

39. (a) Use la definición de derivada para hallar $f'(2)$, donde $f(x) = x^3 - 2x$.
(b) Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto $(2, 4)$.
(c) Ilustre el inciso (b) dibujando la curva y la recta tangente en la misma pantalla.

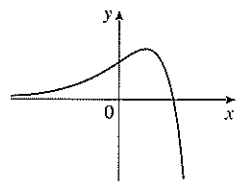
40. Encuentre una función f y un número a tales que

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^6 - 64}{h} = f'(a)$$

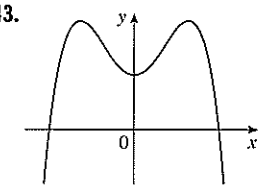
41. El costo total de pagar un préstamo para estudiante, a una tasa de interés de $r\%$ por año es $C = f(r)$.
(a) ¿Cuál es el significado de la derivada $f'(r)$? ¿Cuáles son sus unidades?
(b) ¿Qué significa la proposición $f'(10) = 1200$?
(c) ¿$f'(r)$ siempre es positiva o cambia de signo?

42–44 Trace o copie la gráfica de la función dada. Luego dibuje directamente debajo su derivada.

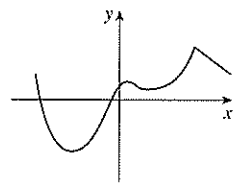
42.



43.



44.

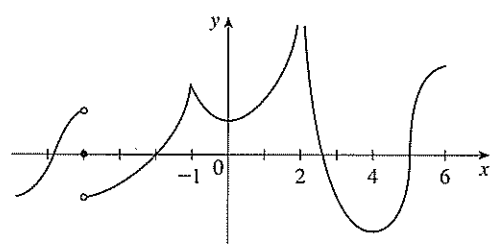


---

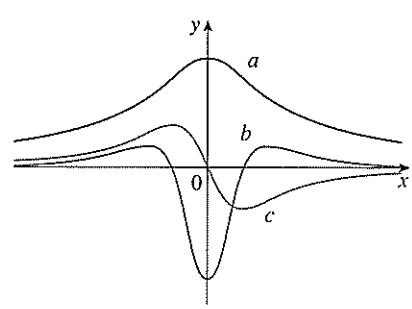
45. (a) Si $f(x) = \sqrt{3 - 5x}$, use la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(b) Encuentre los dominios de f y f'.
(c) Trace f y f' en una pantalla común. Compare las gráficas para ver si su respuesta al inciso (a) es razonable.

46. (a) Encuentre las asíntotas de la gráfica de $f(x) = (4 - x)/(3 + x)$ y úselas para dibujar la gráfica.
(b) Use la gráfica del inciso (a) para graficar f'.
(c) Aplique la definición de derivada para hallar $f'(x)$.
(d) Utilice un aparato graficador para trazar la gráfica de f' y compárela con su dibujo del inciso (b).

47. Se muestra la gráfica de f. Enuncie, con razones, los números en que f no es diferenciable.



48. La figura muestra la gráfica de f, f' y f''. Identifique cada cuerva y explique su elección.



49. Sea $C(t)$ el valor total de certificados bancarios en circulación en el instante t. La tabla de valores de esta función de 1980 a 2000, en miles de millones de dólares. Estime e interprete el valor de $C'(1990)$.

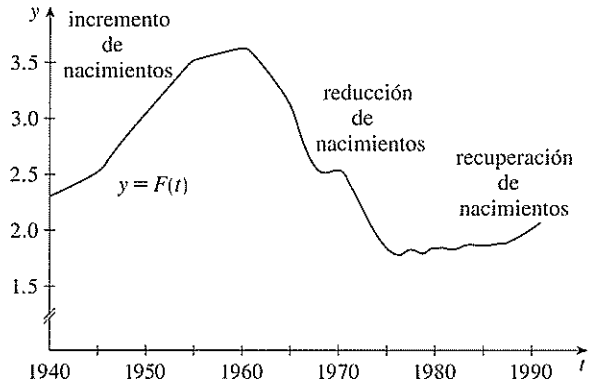
t	1980	1985	1990	1995	2000
$C(t)$	129.9	187.3	271.9	409.3	568.6

50. La *tasa de fertilidad total*, en el tiempo t, denotada con $F(t)$, es una estimación del número promedio de niños nacidos de cada mujer (suponiendo que las tasas de natalidad actuales permanezcan constantes). En la gráfica de la tasa de fertilidad total en Estados Unidos, se muestran las fluctuaciones desde 1940 hasta 1990.

(a) Estime los valores de $F'(1950)$, $F'(1965)$ y $F'(1987)$.

(b) ¿Cuáles son los significados de estas derivadas?

(c) ¿Puede sugerir razones de los valores de estas derivadas?



51. Suponga que $|f(x)| \leq g(x)$ para todo x, y que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Encuentre el $\lim_{x \to a} f(x)$.

52. Sea $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$.

(a) ¿Para qué valores de a existe $\lim_{x \to a} f(x)$?

(b) ¿En qué números es discontinua la función f?

PROBLEMAS ADICIONALES

En el análisis de los principios para la resolución de problemas, se consideró la estrateg para resolver problemas llamada *Introduzca algo adicional* (véase la página 76). En el ejen plo siguiente, se muestra cómo este principio resulta útil a veces cuando evalúa límites. I idea es cambiar la variable —introducir una nueva variable relacionada con la original— tal manera que el problema se haga más sencillo. Más adelante, en la sección 5.5, utiliza más esta idea general.

EJEMPLO 1 Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}$, donde c es una constante.

SOLUCIÓN Según se ve, este límite parece desafiante. En la sección 2.3 evaluó varios límites los que tanto el numerador como el denominador tendieron a 0. Allí, la estrategia fue realiz cierto tipo de manipulación algebraica que condujo a una cancelación simplificadora, pero este caso no está claro qué clase de álgebra se necesita.

Por lo tanto, se introduce una nueva variable t mediante la ecuación

$$t = \sqrt[3]{1 + cx}$$

También necesita expresar x en términos de t, de modo que resuelva esta ecuación:

$$t^3 = 1 + cx$$

$$x = \frac{t^3 - 1}{c}$$

Advierta que $x \to 0$ equivale a $t \to 1$. Esto permite convertir el límite dado en uno que comprende la variable t:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{(t^3 - 1)/c}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1}$$

El cambio de variable permitió reemplazar un límite relativamente complicado con uno más sencillo de un tipo que ya ha visto. Si factoriza el denominador como un diferencia de cubos, obtiene

$$\lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{t^3 - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{c(t - 1)}{(t - 1)(t^2 + t + 1)}$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{c}{t^2 + t + 1} = \frac{c}{3}$$

Los problemas siguientes sirven para poner a prueba y desafiar sus habilidades para resolver problemas. Algunos requieren una cantidad considerable de tiempo para pensa de modo que no se desaliente si no los puede resolver de inmediato. Si tiene alguna dificultad, quizás le sirva consultar el análisis de los principios para la resolución de problemas en la página 76.

PROBLEMAS

1. Evalúe $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

2. Encuentre los números a y b tales que $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3. Evalúe $\lim_{x \to 0} \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x}$.

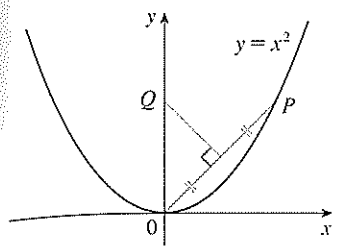


FIGURA PARA EL PROBLEMA 4

4. En la figura se muestra un punto P, en la parábola $y = x^2$ y el punto Q donde la mediatriz de OP interseca al eje y. Conforme P se aproxima al origen, a lo largo de la parábola, ¿qué sucede con Q? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.

5. Si $[\![x]\!]$ denota la función entero, encuentre $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x}{[\![x]\!]}$.

6. Dibuje la región en el plano definida por cada una de las ecuaciones siguientes.
(a) $[\![x]\!]^2 + [\![y]\!]^2 = 1$ (b) $[\![x]\!]^2 - [\![y]\!]^2 = 3$ (c) $[\![x + y]\!]^2 = 1$ (d) $[\![x]\!] + [\![y]\!] = 1$

7. Encuentre todos los valores de a tales que f sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq a \\ x^2 & \text{si } x > a \end{cases}$$

8. Un **punto fijo** de una función f es un número c en su dominio tal que $f(c) = c$. (La función no mueve a c; éste permanece fijo.)
(a) Dibuje la gráfica de una función continua con dominio $[0, 1]$ cuyo rango también se encuentre en $[0, 1]$. Localice un punto fijo de f.
(b) Intente graficar una función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ que *no* tenga un punto fijo. ¿Cuál es el obstáculo?
(c) Use el teorema de valor intermedio para comprobar que cualquier función continua con dominio $[0, 1]$ y rango en $[0, 1]$ tiene que tener un punto fijo.

9. Si $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = 1$, encuentre $\lim_{x \to a} f(x)g(x)$.

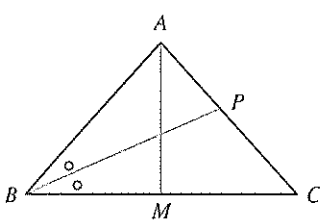


FIGURA PARA EL PROBLEMA 10

10. (a) En la figura se muestra un triángulo isósceles ABC con $\angle B = \angle C$. La bisectriz del ángulo B interseca el lado AC en el punto P. Suponga que la base BC permanece fija, pero que la altura $|AM|$ del triángulo tiende a 0, de modo que A se aproxima al punto medio M de BC. ¿Qué sucede con P durante este proceso? ¿Tiene una posición límite? Si es así, encuéntrela.
(b) Intente trazar la trayectoria recorrida por P durante este proceso. A continuación halle la ecuación de esta curva y úsela para dibujarla.

11. (a) Si parte de la latitud 0° y avanza en dirección oeste, puede denotar con $T(x)$ la temperatura en el punto x en cualquier tiempo dado. Suponga que T es una función continua de x, y demuestre que, en cualquier tiempo fijo, existen por lo menos dos puntos opuestos sobre el ecuador que tienen exactamente la misma temperatura.
(b) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para puntos que estén sobre cualquier círculo sobre la superficie de la Tierra?
(c) ¿El resultado del inciso (a) se cumple para la presión barométrica y para la altitud arriba del nivel del mar?

12. Si f es una función derivable y $g(x) = xf(x)$, use la definición derivada para demostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

13. Suponga que f es una función que satisface $f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$ para todos los números reales x y y. Suponga también que

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

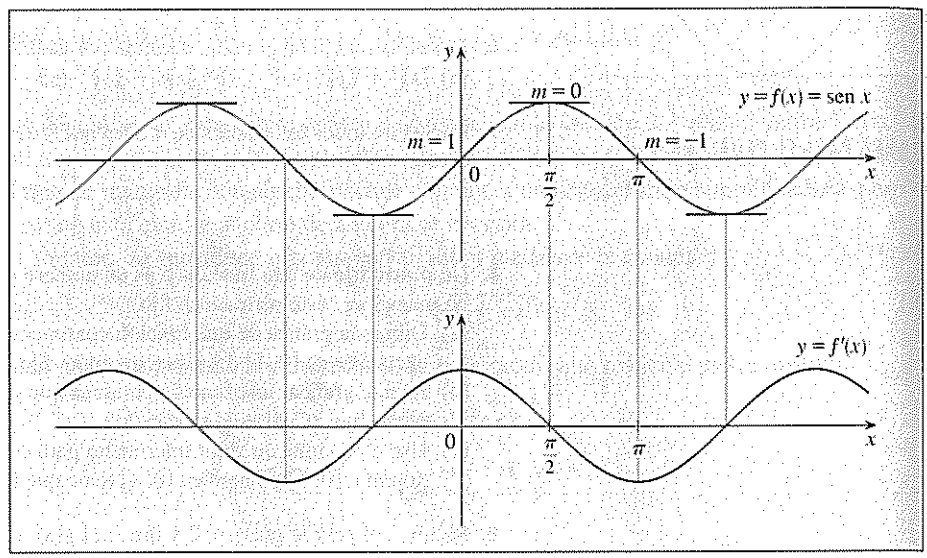
(a) Encuentre $f(0)$. (b) Encuentre $f'(0)$. (c) Encuentre $f'(x)$.

14. Suponga que f es una función con la propiedad de que $|f(x)| \leq x^2$ para toda x. Muestre que $f(0) = 0$. Enseguida, muestre que $f'(0) = 0$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

3

REGLAS DE DERIVACIÓN



Al medir las pendientes en puntos que se localizan en la curva seno obtiene claras evidencias de que la derivada de la función seno es la función coseno

Hasta aquí, ha visto cómo interpretar las derivadas como pendientes y relaciones de cambio y ha estudiado cómo estimar las derivadas de funciones dadas por medio de tablas de valores. También ha aprendido la manera de graficar las derivadas de funciones que se definen gráficamente y ha usado la definición de derivada para calcular las derivadas de funciones definidas mediante fórmulas. Pero sería tedioso si siempre tuviéra que aplicar la definición, de modo que, en este capítulo se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente esa definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas, funciones exponenciales y logarítmicas y funciones trigonométricas inversas. A continuación usará estas reglas para resolver problemas en que intervienen relaciones de cambio, tangentes a curvas paramétricas y la aproximación de funciones.