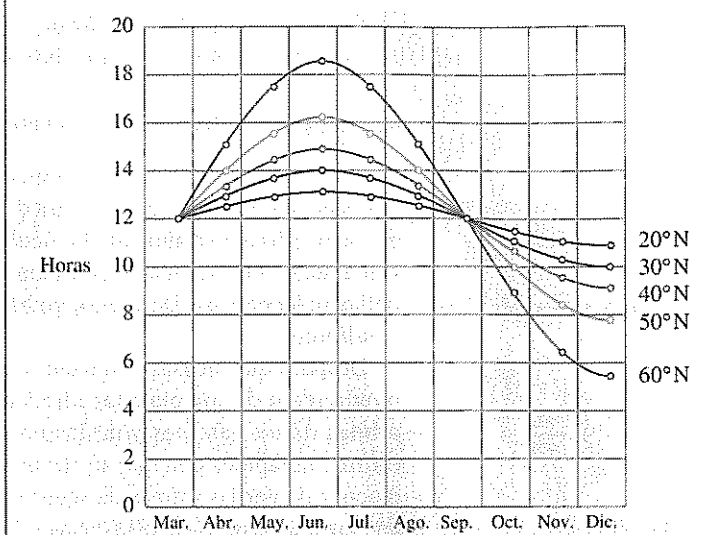
http://libreria-universitaria.blogspot.com

1

FUNCIONES Y MODELOS



Con frecuencia una representación gráfica de una función, en este caso la cantidad de horas con luz del Sol en función de la época del año en varias latitudes, es la manera más natural y conveniente de ilustrar la función.

El propósito fundamental del cálculo son las funciones. En este capítulo se prepara el camino para el cálculo al analizar las ideas básicas referentes a las funciones, sus gráficas y las maneras para transformarlas y combinarlas. Se hará hincapié en que una función se puede representar de diferentes modos: mediante una ecuación, en una tabla, con una gráfica o con palabras. Se considerarán los tipos principales de funciones que se presentan en el cálculo y se describirá el proceso de usarlas como modelos matemáticos de fenómenos del mundo real. También se expondrá el uso de las calculadoras graficadoras y del software para trazar gráficas.

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa mediante la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor de A, por lo que A es *función* de r.

B. La población humana del mundo, P, depende del tiempo t. En la tabla se dan estimaciones de la población del mundo, $P(t)$, en el tiempo t, para ciertos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor de tiempo t existe un valor de P correspondiente, por lo que P es una función de t.

Año	Población (en millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

C. El costo C de enviar por correo una carta de primera clase depende de su peso w. Aun cuando no existe una fórmula sencilla que relacione w con C, la oficina de correos tiene una regla parta determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo, según la mide un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. En la figura 1 se muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un valor dado de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

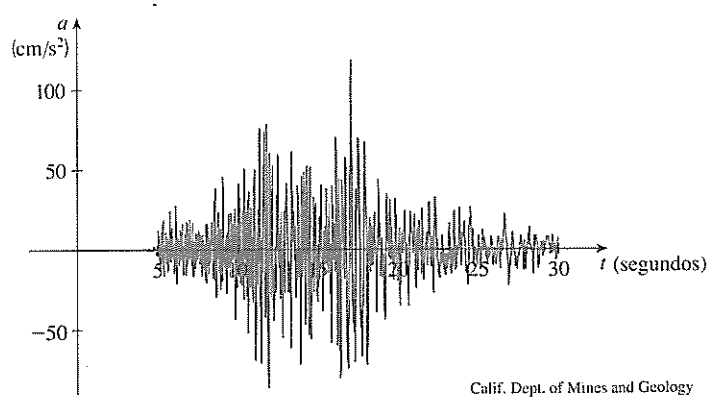


FIGURA 1
Aceleración vertical del suelo durante el terremoto de Northridge

En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número (r, t, w o t), se asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso, el segundo número es función del primero.

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Por lo común, se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f de x". El **intervalo** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *intervalo* de f se llama **variable dependiente**. En el ejemplo A, r es la variable independiente y A es la dependiente.

FIGURA 2
Diagrama de una máquina para una función f

Resulta útil concebir una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, por lo tanto cuando x entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puede concebir el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el intervalo como el conjunto de todas las salidas posibles.

Las funciones preprogramadas de una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla de raíz cuadrada en su calculadora calcula una de esas funciones. Usted oprime la tecla marcada como $\sqrt{\ }$ o $\sqrt{x}$ y registra la entrada x. Si $x < 0$, en tal caso x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, en tal caso aparecerá una *aproximación* a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, la tecla $\sqrt{x}$ de su calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Otra manera de representar una función es un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha une un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ con a, y así sucesivamente.

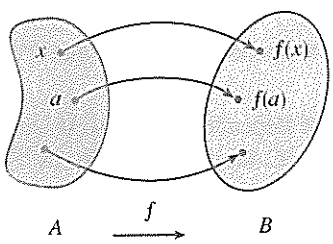


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio D, después su **gráfica** es el conjunto de las parejas ordenadas

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que son parejas entrada-salida.) En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado, tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f da una imagen útil del comportamiento, o la "historia de la vida", de una función. Como la coordenada y de cualquier punto (x, y) de la gráfica es $y = f(x)$, es posible leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de esta última arriba del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f también permite tener una imagen del dominio de f sobre el eje x y su intervalo en el eje y como en la figura 5.

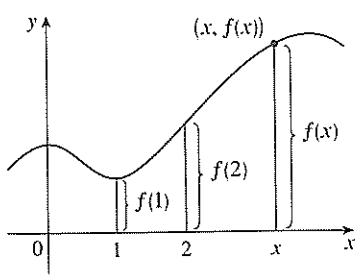


FIGURA 4

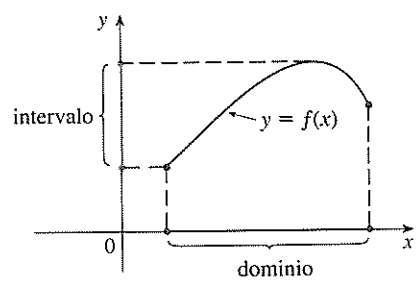


FIGURA 5

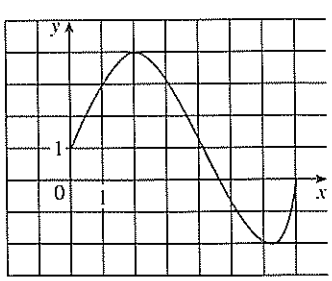


FIGURA 6

EJEMPLO 1 En la figura 6 se muestra la gráfica de una función f.
(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.
(b) ¿Cuáles son el dominio y el intervalo de f?

SOLUCIÓN
(a) En la figura 6 se ve que el punto $(1, 3)$ se encuentra sobre la gráfica de f, de modo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto de la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está tres unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra alrededor de 0.7 unidades debajo del eje x, por tanto, $f(5) \approx -0.7$

(b) $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, de modo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores desde -2 hasta 4, de manera que el intervalo de f es

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$ □

≡ La notación para intervalos aparece en el apéndice A.

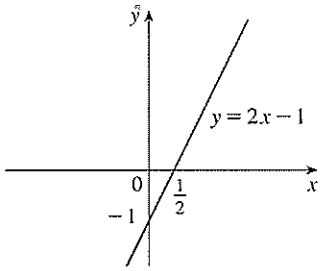


FIGURA 7

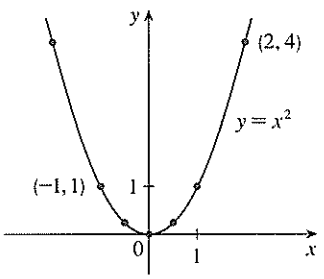


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace una gráfica y encuentre el dominio y el intervalo de cada función.
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN
(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y esto se reconoce como la ecuación de una línea con pendiente 2 y ordenada al origen -1. (Recuerde la forma de pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta: $y = mx + b$. Véase apéndice B.) Esto permite trazar la gráfica de f de la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, de modo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, el cual se denota con $\mathbb{R}$. En la gráfica se muestra que el intervalo también es $\mathbb{R}$.

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podría dibujar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$ junto con unos cuantos puntos más de la gráfica y unirlos para producir la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$, lo cual representa una parábola (véase el apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$. El intervalo de g consta de todos los valores de $g(x)$; es decir, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x y cualquier número positivo y es un cuadrado. De este modo, el intervalo de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto también se ve en la figura 8. □

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evaluar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

SOLUCIÓN Primero evalúe $f(a + h)$ sustituyendo x mediante $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5a - h + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto al sustituir en la expresión que se proporciona y simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a - 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$

□

■ La expresión

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se le denomina un **cociente de diferencia** y habitualmente sucede en cálculo. Como verá en el capítulo 2, representa la relación de cambio promedio $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES

Se tienen cuatro maneras posibles para representar una función:

- Verbalmente (mediante una descripción en palabras)
- Numéricamente (con una tabla de valores)
- Visualmente (mediante una gráfica)
- Algebraicamente (por medio de una fórmula explícita)

Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, con frecuencia resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de esa función. (Por ejemplo, en el ejemplo 2 se empieza con fórmulas algebraicas y, a continuación, se obtuvieron las gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más natural con uno

http://libreria-universitaria.blogspot.com

de los métodos que con otro. Con esto en mente, analice de nuevo las cuatro situaciones consideradas al principio de esta sección.

A. Quizá la representación más útil del área de un círculo como función de su radio sea la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores o trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Como un círculo debe tener un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, y el intervalo también es $(0, \infty)$.

Año	Población (en millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

B. Se ha descrito verbalmente la función: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. La tabla de valores de la población mundial da una representación conveniente de esta función. Si coloca estos valores en una gráfica, obtendrá la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) de la figura 9. También es una representación útil; pues nos permite absorber todos los datos a la vez. ¿Qué hay acerca de una fórmula? Por supuesto, es imposible idear una fórmula explícita que dé la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible hallar una expresión para una función que proporcione una *aproximación de* $P(t)$. De hecho, con la aplicación de los métodos que se explican en la sección 1.2, se obtiene la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t$$

y en la figura 10 se ilustra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que da una aproximación para el comportamiento de la función dada. Sin embargo, verá que las ideas del cálculo se pueden aplicar a una tabla de valores; no se necesita una fórmula explícita.

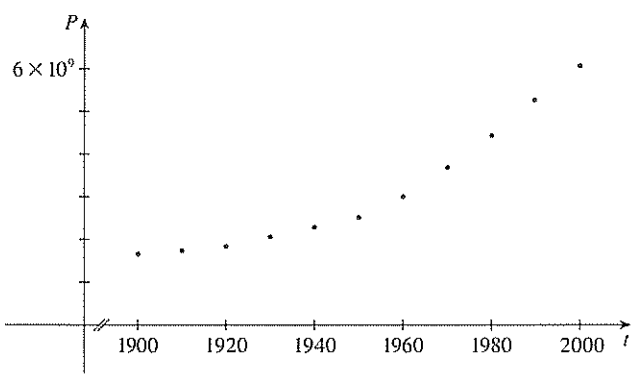


FIGURA 9

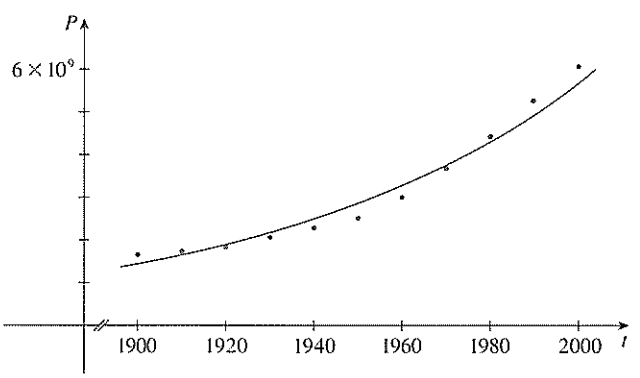


FIGURA 10

▨ Una función definida por una tabla de valores se conoce como *función tabular*.

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.39
$1 < w \leq 2$	0.63
$2 < w \leq 3$	0.87
$3 < w \leq 4$	1.11
$4 < w \leq 5$	1.35
.	.
.	.
.	.
$12 < w \leq 13$	3.27

La función P es típica entre las funciones que surgen siempre que intenta aplicar el cálculo al mundo real. Empieza con una descripción verbal de la función. En seguida, es posible que sea capaz de construir una tabla de valores de la función, quizá a partir de lecturas de instrumentos en un experimento científico. Aun cuando no tenga el conocimiento completo de los valores de la función, a lo largo del libro verá que todavía es posible realizar las operaciones del cálculo en una función de ese tipo.

C. Una vez más, la función está descrita en palabras: $C(w)$ es el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. La regla que en 1996 aplicaba el U.S. Postal Service (Servicio Postal de Estados Unidos) es la siguiente: el costo es de 39 centavos de dólar hasta por una onza, más 24 centavos por cada onza sucesiva, hasta 13 onzas. La tabla de valores que se muestra en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible trazar una gráfica (véase el ejemplo 10).

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que se podría compilar una tabla de valores e incluso

es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo, amplitudes y patrones, puede observarse con facilidad a partir de la gráfica. (Lo mismo se cumple para los patrones que se ven en los electrocardiogramas de los pacientes cardiacos y en los polígrafos para la detección de mentiras.)

En el ejemplo siguiente, se grafica una función definida verbalmente.

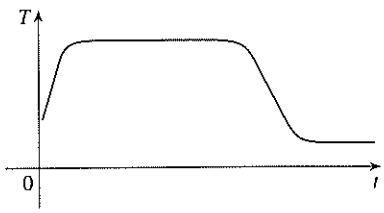


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Cuando abre un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. Trace una gráfica aproximada de T como función del tiempo t que ha transcurrido desde que se abrió el grifo.

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir la que se encuentra en el tanque de agua caliente, T aumenta con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua calentada del tanque. Cuando éste se drena, T decrece hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto permite realizar el boceto de gráfica de T como una función de t en la figura 11. □

El ejemplo que sigue, parte de una descripción verbal de una función, en una situación física, y se obtiene una fórmula algebraica explícita. La capacidad para llevar a cabo esto constituye una habilidad útil en los problemas de cálculo en los que se piden los valores máximo y mínimo de cantidades.

EJEMPLO 5 Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado y el material para los lados, cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

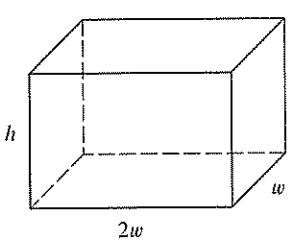


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibuje un diagrama como el de la figura 12 e introduzca la notación tomando w y $2w$ como el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h como la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, de modo que el costo, en dólares, del material para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen el área wh y el área de los otros dos es $2wh$, así el costo del material para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. En consecuencia el costo total es

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C como función sólo de w, necesita eliminar h, lo que sucede al aplicar el hecho de que el volumen es 10 m^3. De este modo,

$$w(2w)h = 10$$

lo cual da

$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Si se sustituye esto en la expresión para C

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por lo tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como función de w. □

▨ Al establecer funciones de aplicación, como en el ejemplo 5, puede resultar útil repasar los principios para la resolución de problemas como se plantean en la página 76, en particular el paso 1: *comprender el problema.*

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada función.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

SOLUCIÓN

■ Si se da una función mediante una fórmula y no se da el dominio explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

(a) Ya que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, de modo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Dado que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y la división entre 0 no está permitida, $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

lo cual también podría escribirse, con la notación de intervalos, como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$ □

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la cuestión: ¿cuáles curvas en el plano xy son gráficas de funciones? La siguiente prueba responde lo anterior.

PRUEBA DE LA LÍNEA VERTICAL Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna línea vertical se interseca con la curva más de una vez.

En la figura 13 se puede ver la razón de la veracidad de la prueba de la línea vertical. Si cada línea vertical $x = a$ interseca una curva sólo una vez, en (a, b), por lo tanto se define exactamente un valor funcional mediante $f(a) = b$. Pero si una línea $x = a$ se interseca con la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), en tal caso la curva no puede representar una función, porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

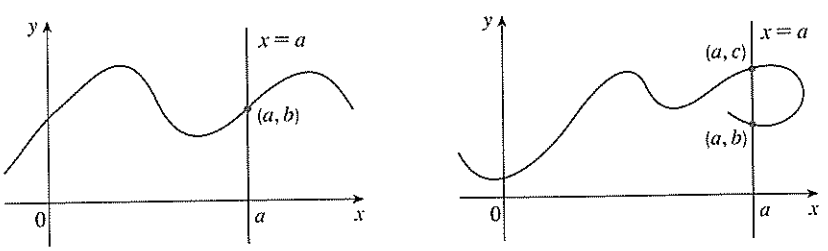


FIGURA 13

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que aparece en la figura 14(a) en la página que sigue no es la gráfica de una función de x porque, como el lector puede ver, existen líneas verticales que intersecan dos veces esa parábola. Sin embargo, la parábola en realidad contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Observe que $x = y^2 - 2$ significa $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por esto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [del ejemplo 6(a)] y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$ [véase las figuras 14(b) y (c)]. Observe que, si invierte los papeles de x y y, en tal caso la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como función de y (con y como la variable independiente y x como dependiente) y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h.

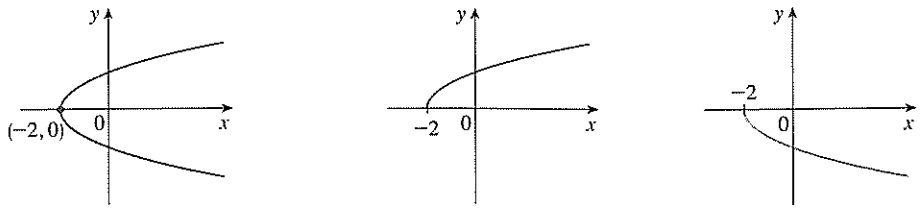


FIGURA 14 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

FUNCIONES SECCIONALMENTE DEFINIDAS

Las funciones de los cuatro ejemplos siguientes están definidas por fórmulas diferentes en diferentes partes de sus dominios.

EJEMPLO 7 Una función f se define por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evalúe $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular, la regla es: primero se considera el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leq 1$, en tal caso el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otra parte, si $x > 1$, después el valor de $f(x)$ es x^2.

Como $0 \leq 1$, tenemos $f(0) = 1 - 0 = 1$.

Como $1 \leq 1$, tenemos $f(1) = 1 - 1 = 0$.

Como $2 > 1$, tenemos $f(2) = 2^2 = 4$.

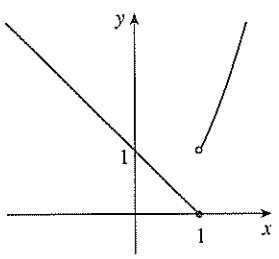


FIGURA 15

¿Cómo dibujar la gráfica de f? Observe que, si $x \leq 1$, por lo tanto $f(x) = 1 - x$ de modo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la línea vertical $x = 1$ debe coincidir con la línea $y = 1 - x$, la cual tiene la pendiente -1 y 1 como ordenada al origen. Si $x > 1$, después $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que está a la derecha de la línea $x = 1$ tiene que coincidir con la gráfica de $y = x^2$, la cual es una parábola. Esto permite trazar la gráfica de la figura 15. El punto relleno indica que el punto (1, 0) está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que el punto (1, 1) está fuera de la gráfica. □

El ejemplo siguiente de una función seccionalmente definida es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, denotado con $|a|$, es la distancia de a hasta 0, sobre la recta de los números reales. Las distancias siempre son positivas o 0; de tal manera

$$|a| \geq 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general,

$$\begin{aligned} |a| &= a \quad \text{si } a \geq 0 \\ |a| &= -a \quad \text{si } a < 0 \end{aligned}$$

(Recuerde que si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.)

Para un repaso más extenso de los valores absolutos, véase el apéndice A.

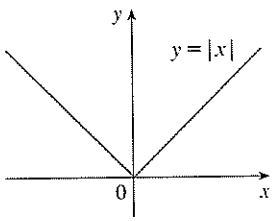


FIGURA 16

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de la función valor absoluto, $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN Con base en el análisis precedente, sabe que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al aplicar el método del ejemplo 7, la gráfica de f coincide con la línea $y = x$, a la derecha del eje y, y coincide con la línea $y = -x$, a la izquierda del eje y (véase la figura 16). □

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f que se dibuja en la figura 17.

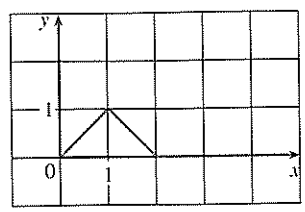


FIGURA 17

SOLUCIÓN La línea que pasa por (0, 0) y (1, 1) tiene pendiente $m = 1$ y su ordenada al origen es $b = 0$, de forma que su ecuación es $y = x$. Por esto, para la parte de la gráfica de f que une (0, 0) con (1, 1),

$$f(x) = x \qquad \text{si} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1$$

La línea que pasa por (1, 1) y (2, 0) tiene pendiente $m = -1$, de suerte que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2 - x$$

De tal manera que

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si} \qquad 1 < x \leqslant 2$$

Observe también que, para $x > 2$, la gráfica de f coincide con el eje x. Si reúne esta información, tiene la fórmula siguiente para f, en tres secciones:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

□

EJEMPLO 10 En el ejemplo C del principio de esta sección, se consideró el costo $C(w)$ de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. En realidad, ésta es una función seccionalmente definida porque, a partir de la tabla de valores, se tiene

$$C(w) = \begin{cases} 0.39 & \text{si } 0 < w \leqslant 1 \\ 0.63 & \text{si } 1 < w \leqslant 2 \\ 0.87 & \text{si } 2 < w \leqslant 3 \\ 1.11 & \text{si } 3 < w \leqslant 4 \\ \vdots & \end{cases}$$

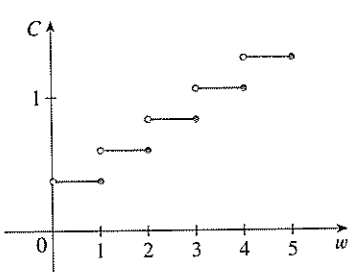


FIGURA 18

La gráfica se muestra en la figura 18. Usted puede ver por qué a las funciones semejantes a ésta se les llama **función escalón**: saltan de un valor al siguiente. En el capítulo 2 se estudiarán esas funciones. □

■ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

véase el apéndice B.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

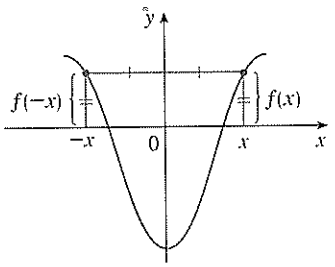


FIGURA 19
Una función par

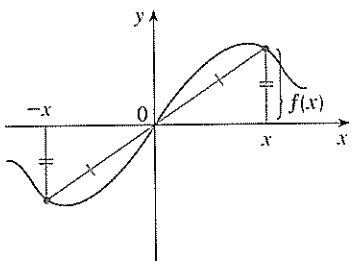


FIGURA 20
Una función impar

SIMETRÍA

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$, para todo número x en su dominio, en tal caso f se denomina **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la figura 19). Esto significa que si traza la gráfica de f para $x \geqslant 0$, obtiene toda la gráfica con sólo reflejar esta porción con respecto al eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$, para todo número x en su dominio, en seguida f se conoce como **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen (véase la figura 20). Si ya tiene la gráfica de f para $x \geqslant 0$, puede obtener la gráfica entera al hacerla girar 180° alrededor del origen.

EJEMPLO 11 Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

En consecuencia, f es una función impar.

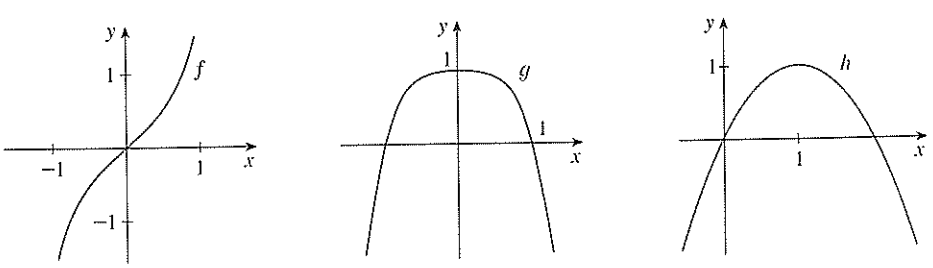
(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

De modo que g es par.

(c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Dado que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar. □

En la figura 21 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 11. Observe que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni respecto al origen.



(a) (b) (c)

FIGURA 21

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube desde A hasta B, desciende desde B hasta C, y vuelve a subir desde C hasta D. Se dice que la función f está creciendo sobre el intervalo $[a, b]$, decreciendo sobre $[b, c]$, y creciendo de nuevo sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera entre a y b, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Use esto como la propiedad que define una función creciente.

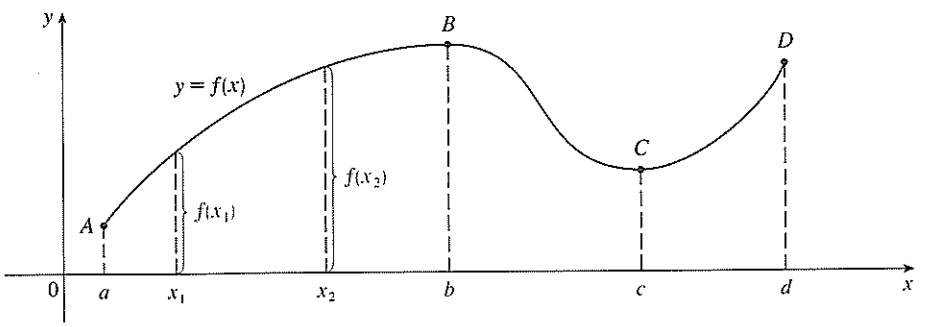


FIGURA 22

Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se dice que es **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

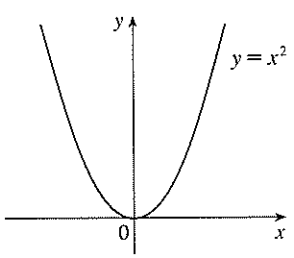


FIGURA 23

En la definición de función creciente es importante darse cuenta que se debe satisfacer la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ para *toda* pareja de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

A partir de la figura 23 es posible observar que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de una función f.

(a) Establezca el valor de $f(-1)$.

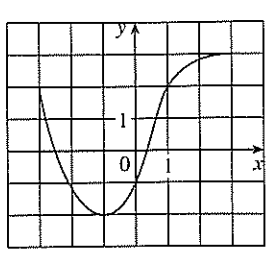
(b) Estime el valor de $f(2)$.

(c) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = 2$?

(d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.

(e) Establezca el dominio y el intervalo de f.

(f) ¿En qué intervalo es f creciente?



2. Se proporcionan las gráficas de f y g.

(a) Dé los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.

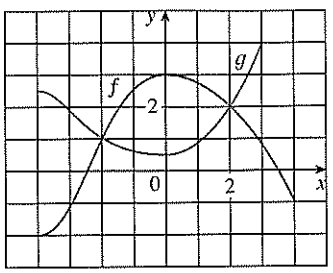
(b) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = g(x)$?

(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.

(d) ¿En qué intervalo f es decreciente?

(e) Dé el dominio y el intervalo de f.

(f) Dé el dominio y el intervalo de g.

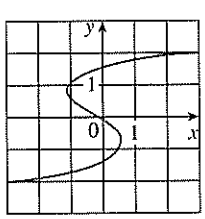


3. Un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología en el Hospital Universitario de la Universidad del Sur de California (USC) en Los Ángeles, registró la figura 1. Úsela para estimar el intervalo de la funcion aceleración vertical del suelo, en la USC durante el terremoto de Northridge.

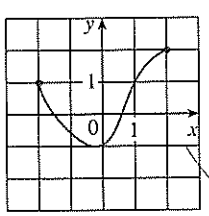
4. En esta sección se analizaron ejemplos de funciones, cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo del porte de correos es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dé otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describan verbalmente. ¿Qué puede decir acerca del dominio y del intervalo de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica aproximada de cada función.

5–8 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, dé el dominio y el intervalo de la función.

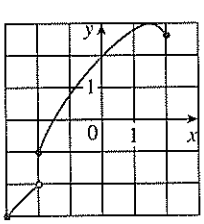
5.



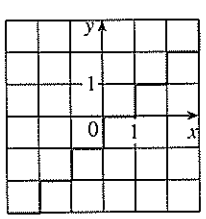
6.



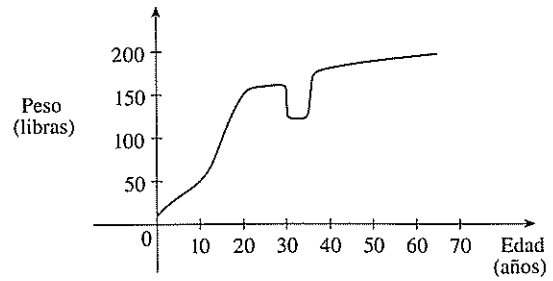
7.



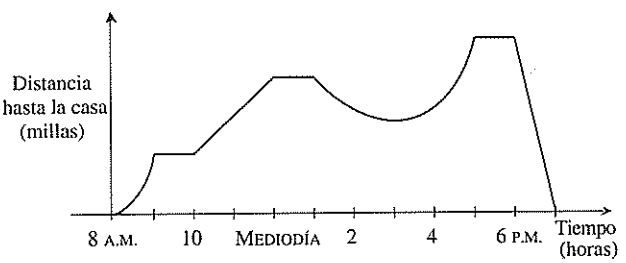
8.



9. La gráfica que se muestra da el peso de cierta persona como una función de la edad. Describa con palabras la manera en que varía el peso de esta persona a lo largo del tiempo. ¿Qué piensa el lector que sucedió cuando esta persona tenía 30 años?



10. La gráfica que se muestra da la distancia a la que se encuentra un vendedor de su casa como función del tiempo en cierto día. Describa con palabras lo que la gráfica indica con respecto al recorrido del vendedor en este día.



11. Usted pone algunos cubos de hielo en un vaso, lo llena con agua fría y lo deja sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

12. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz del día como función de la época del año.

13. Trace una gráfica aproximada de la temperatura exterior como función del tiempo durante un día típico de primavera.

14. Dibuje una gráfica aproximada del valor en el mercado, por un periodo de 20 años de un automóvil nuevo. Considere que se le da buen mantenimiento.

15. Dibuje la gráfica de la cantidad de una marca particular de café vendida por una tienda como una función del precio del café.

16. Usted coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. Luego, lo saca y lo deja enfriar, antes de comerlo. Describa cómo cambia la temperatura del pastel conforme pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

17. El propietario de una casa corta el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo durante un periodo de cuatro semanas.

18. Un avión sale de un aeropuerto y aterriza, una hora más tarde, en otro aeropuerto que se encuentra a 400 millas de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado

la terminal, sea $x(t)$ la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión. Trace.
(a) Una gráfica posible de $x(t)$.
(b) Una gráfica posible de $y(t)$.
(c) Una gráfica posible de la rapidez con respecto al suelo.
(d) Una gráfica posible de la velocidad vertical.

19. En la tabla se exhibe el número N (en millones) de usuarios de telefonos celulares en el mundo. (Se proporcionan estimaciones semestrales).

t	1990	1992	1994	1996	1998	2000
N	11	26	60	160	340	650

(a) Mediante los datos trace una gráfica de N en función de t.
(b) Utilice la gráfica para estimar la cantidad de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 1995 y 1999.

20. El 2 de junio de 2001 se tomaron lecturas de temperatura T (en °F) cada dos horas desde la medianoche hasta las 2:00 P.M. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

(a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica aproximada de T como una función de t.
(b) Utilice la gráfica que trazó para estimar la temperatura a las 11:00 A.M.

21. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encuentre $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ y $f(a+h)$.

22. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene el volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire que se requiere para inflarlo desde un radio de r pulgadas hasta otro de $r + 1$ pulgadas.

23–26 Valorar el cociente de diferencia para la función que se proporciona. Simplifique su respuesta.

23. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

24. $f(x) = x^3$, $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

26. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

27–31 Encuentre el dominio de la función.

27. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 1}$

28. $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

29. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

30. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4 - u}$

31. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

28. Encuentre el dominio, el intervalo y trace la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

33–44 Encuentre el dominio y trace la gráfica de la función.

33. $f(x) = 5$

34. $F(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$

35. $f(t) = t^2 - 6t$

36. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

37. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

38. $F(x) = |2x + 1|$

39. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

40. $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

41. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

45–50 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

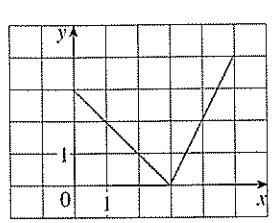
45. El segmento rectilíneo que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$

46. El segmento rectilíneo que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$

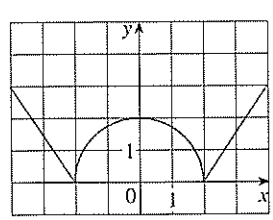
47. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$

48. La mitad superior del círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

49.



50.



51–55 Encuentre una fórmula para la función descrita y dé su dominio.

51. Un rectángulo tiene un perímetro de 20 m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

52. Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Exprese su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

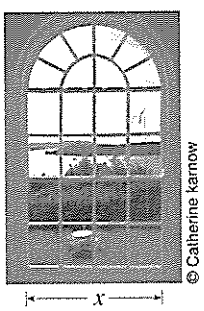
53. Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados.

54. Exprese el área superficial de un cubo como función de su volumen.

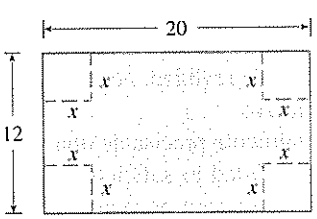
55. Una caja rectangular abierta, con volumen de 2 m^3, tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de uno de los lados de la base.

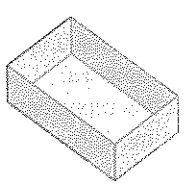
---

56. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de ella como función del ancho x de la misma.



57. Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de cartón que tiene las dimensiones de 12 pulgadas por 20 pulgadas, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.





58. Una compañía de taxis cobra dos dólares por la primera milla (o parte de una milla) y 20 centavos de dólar por cada décimo de milla (o parte) subsiguiente. Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función de la distancia x recorrida (en millas), para $0 < x < 2$, y dibuje la gráfica de esta función.

59. En cierto país, el impuesto sobre la renta se evalúa como se indica a continuación. No se paga impuesto sobre ingresos hasta de 10 000 dólares. Cualquier ingreso superior a 10 000 dólares paga un impuesto del 10% del mismo, hasta un ingreso de 20 000 dólares. Cualquier ingreso superior a 20 000 dólares paga impuesto con una tasa del 15%.

(a) Trace la gráfica de la tasa R de impuesto como función del ingreso I.

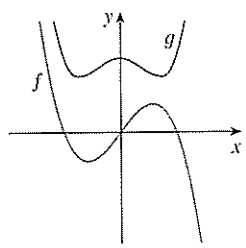
(b) ¿Cuál impuesto corresponde a un ingreso de 14 000 dólares y a otro de 26 000 dólares?

(c) Trace la gráfica del impuesto total correspondiente T como función del ingreso I.

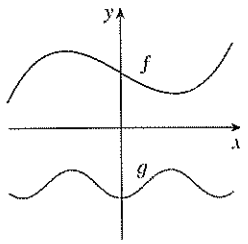
60. Las funciones del ejemplo 10 y de los ejercicios 58 y 59(a) se conocen como *funciones escalones* porque sus gráficas parecen escaleras. Dé otros dos ejemplos de funciones escalones que surjan en la vida cotidiana.

61–62 Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

61.



62.



---

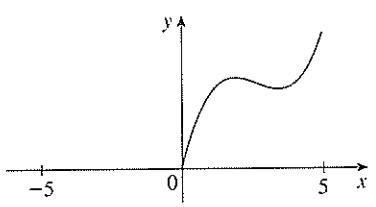
63. (a) Si el punto (5, 3) está sobre la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?

(b) Si el punto (5, 3) está sobre la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?

64. Una función f tiene el dominio $[-5, 5]$ y se muestra una parte de su gráfica.

(a) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es par.

(b) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es impar.



65–70 Determine si f es par, impar o ni par ni impar. Si tiene una calculadora graficadora, úsela para verificar de manera visual su respuesta

65. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

66. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

67. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

68. $f(x) = x|x|$

69. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

70. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$

---

http://libreria-universitaria.blogspot.com

1.2 MODELOS MATEMÁTICOS: UN CATÁLOGO DE FUNCIONES BÁSICAS

Un **modelo matemático** es una descripción matemática (con frecuencia mediante una función o una ecuación), de un fenómeno del mundo real, como por ejemplo el tamaño de una población, la demanda por un producto, la rapidez de caída de un objeto, la concentración de un producto en una reacción química, la expectativa de vida de una persona cuando nace o el costo de la reducción de emisiones. El propósito de este modelo es entender el fenómeno y quizá hacer predicciones con respecto al comportamiento futuro.

La figura 1 ilustra el proceso del modelado matemático. Una vez que se especifica un problema del mundo real, la primera tarea consiste en formular un modelo matemático identificando y dándole un nombre a las variables independientes y dependientes, así como hacer supuestos que simplifiquen, lo suficiente, el fenómeno como para hacer que sea susceptible de rastrearse en forma matemática. Utilice su conocimiento acerca de la situación física y sus habilidades matemáticas para obtener ecuaciones que relacionen las variables. En aquellas situaciones en las que no existen leyes físicas que lo guíen, tal vez necesite recabar información (ya sea de una biblioteca o de la Internet o llevando a cabo sus propios experimentos) y analizarlos en forma de tabla con objeto de discernir patrones. A partir de esta representación numérica quizá desee obtener una representación gráfica por medio del dibujo de los datos. En algunos casos, la gráfica puede hasta sugerir una forma algebraica adecuada.

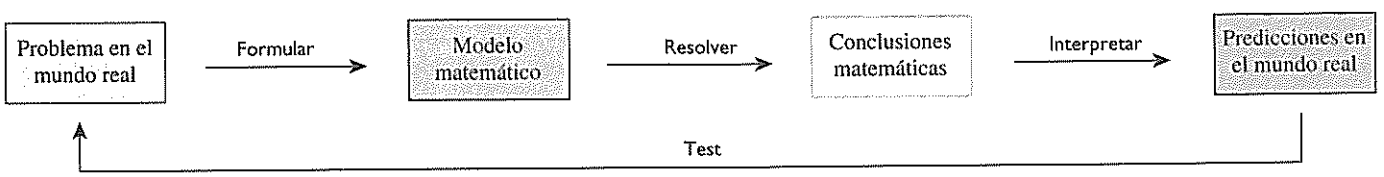


FIGURA 1 El proceso del modelado

La segunda etapa es aplicar las matemáticas que conoce (como por ejemplo el cálculo que se desarrollará en todas las partes de este libro) al modelo matemático formulado con el fin de deducir conclusiones matemáticas. Después, en la tercera etapa, tome esas conclusiones matemáticas e interprételas como información acerca del fenómeno original del mundo real por medio de ofrecer explicaciones o hacer predicciones. La etapa final es probar las predicciones que formuló verificándolas contra datos nuevos relativos al mundo real. Si las predicciones no se comparan de manera apropiada con la realidad, necesita afinar su modelo o bien formular uno nuevo y empezar el ciclo de nuevo.

Un modelo matemático nunca es una representación totalmente precisa de una situación física, es una *idealización*. Un buen modelo simplifica la realidad lo suficiente como para permitir cálculos matemáticos pero es lo suficientemente preciso para proveer conclusiones valiosas. Es importante darse cuenta de los límites del modelo. En última instancia, la madre naturaleza tiene la última palabra.

Existen muchos tipos diferentes de funciones que pueden usarse para modelar correspondencias que se observan en el mundo real. En las secciones subsecuentes, analizará el comportamiento y las gráficas de estas funciones y atenderá ejemplos de situaciones modeladas en forma apropiada por medio de esas funciones.

MODELOS LINEALES

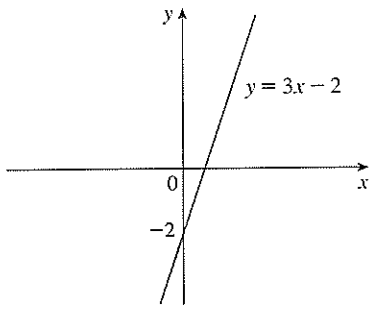
■ En el apéndice B se repasa la geometría analítica de las rectas.

Cuando dice que y es una **función lineal** de x, lo que quiere dar a entender es que la gráfica de la función es una recta, de tal manera puede usar la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta para escribir una fórmula para la función como

$$y = f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b es la coordenada al origen y.

Una característica representativa de las funciones lineales es que crecen en una proporción constante. La figura 2, por ejemplo, presenta una gráfica de la función lineal $f(x) = 3x - 2$ y una tabla de valores muestra. Observe que siempre que x aumenta en 0.1, el valor de $f(x)$ se incrementa en 0.3. Por eso $f(x)$ se incrementa tres veces tan rápido como x. De este modo la pendiente de la gráfica $y = 3x - 2$, en este caso 3, puede interpretarse como la relación de cambio de y con respecto a x.



x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

FIGURA 2

EJEMPLO 1

(a) A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es 20°C y la temperatura a la altura de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) como una función de la altura h (en kilómetros) suponiendo que es un modelo lineal adecuado.

(b) Trace la gráfica de la función del inciso (a). ¿Qué representa la pendiente?

(c) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 2.5 km?

SOLUCIÓN

(a) Como supone que T es una función lineal de h, puede escribir

$$T = mh + b$$

Se dice que $T = 20$ cuando $h = 0$, así

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

En otras palabras, la ordenada al origen y es $b = 20$.

Además, $T = 10$ cuando $h = 1$, de modo que

$$10 = m \cdot 1 + 20$$

Por lo tanto la pendiente de la recta es $m = 10 - 20 = -10$ y la función lineal requerida es

$$T = -10h + 20$$

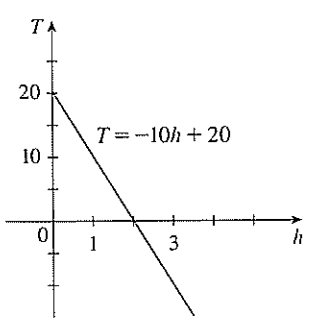


FIGURA 3

(b) La gráfica se traza en la figura 3. La pendiente es $m = -10$°C/km, y esto representa la relación de cambio de temperatura con respecto a la altura.

(c) A una altura $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -5°C$$

Si no existe una ley física o un principio que ayude a formular un modelo, se construye un **modelo empírico**, el cual se basa por completo en la información recabada. Se busca una curva que "coincida" con los datos en el sentido de que capte la tendencia fundamental de los puntos de los datos.

EJEMPLO 2 En la tabla 1 se enumera el nivel promedio de dióxido de carbono en la atmósfera, medido en partes por millón en el observatorio Mauna Loa de 1980 a 2002. Use la información que en ella aparece para encontrar un modelo para el nivel de dióxido de carbono.

SOLUCIÓN Use los datos que aparecen en la tabla 1 para trazar la gráfica de dispersión que se muestra en la figura 4, donde t representa el tiempo (en años) y C el nivel de CO_2 (en partes por millón, ppm)

TABLA 1

Año	Nivel de CO_2 (en ppm)	Año	Nivel de CO_2 (en ppm)
1980	338.7	1992	356.4
1982	341.1	1994	358.9
1984	344.4	1996	362.6
1986	347.2	1998	366.6
1988	351.5	2000	369.4
1990	354.2	2002	372.9

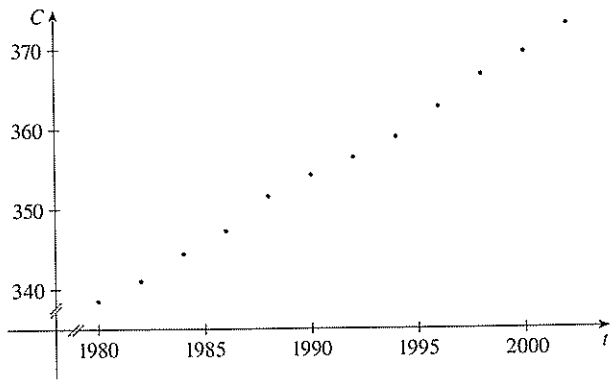


FIGURA 4 Gráfica de dispersión para el nivel de CO_2

Observe que al parecer los puntos correspondientes a la información se encuentran cerca de una recta, por tanto es natural que en este caso se elija un modelo lineal. Pero existen numerosas rectas posibles que se aproximan a estos puntos de información, por eso ¿cuál debe escoger? A partir de la gráfica, la línea que pasa por el primero y el último puntos de información parece ser una posibilidad. La pendiente de esta recta es

$$\frac{372.9 - 338.7}{2002 - 1980} = \frac{34.2}{22} = 1.5545$$

y su ecuación es

$$C - 338.7 = 1.5545(t - 1980)$$

o bien

$$C = 1.5545t - 2739.21 \qquad \boxed{1}$$

La ecuación 1 proporciona un modelo lineal posible para el nivel de dióxido de carbono; se grafica en la figura 5.

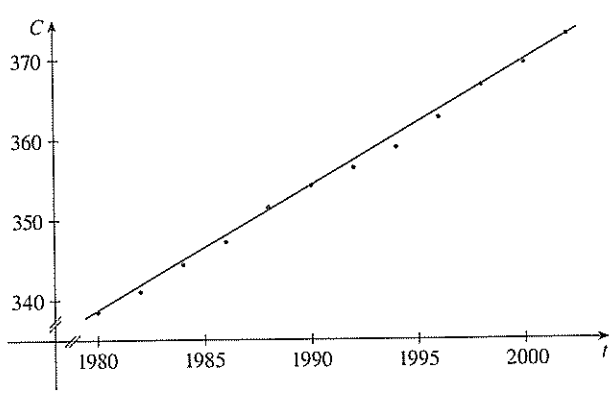


FIGURA 5
Modelo lineal a través del primero y último puntos de información

Si bien el modelo coincide razonablemente bien con la información, da puntos más altos que la mayor parte de los niveles reales de CO_2. Por medio de un procedimiento

■ Una computadora o una calculadora graficadora encuentra la recta de regresión por medio del método de **mínimos cuadrados**, el cual consiste en reducir al mínimo la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los puntos correspondientes a datos y la recta. En la sección 14.7 se explican detalles de lo anterior.

de estadística conocido como *regresión lineal*, se obtiene un mejor modelo lineal. Si utiliza una calculadora graficadora, registre los datos de la tabla 1 en el editor de datos y elija el comando de regresión lineal. (Con Maple use el comando Fit [least square] en el paquete de estadística; con Mathematica utilice el comando Fit). La máquina da la pendiente y la ordenada al origen y de la recta de regresión como

$$m = 1.55192 \qquad b = -2734.55$$

De esta manera nuestro modelo de mínimos cuadrados para el nivel de CO_2 es

$$C = 1.55192t - 2734.55 \quad \boxed{2}$$

En la figura 6 aparece la gráfica de la recta de regresión así como los puntos de información. Al compararla con la figura 5 se observa que da una mejor coincidencia que nuestro modelo lineal anterior.

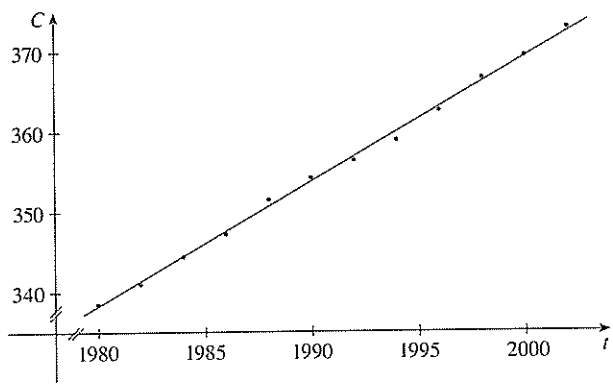


FIGURA 6
La recta de regresión

□

EJEMPLO 3 Use el modelo lineal que proporciona la ecuación 2 para estimar el nivel promedio de CO_2 correspondiente al año 1987 y predecir el nivel para el 2010. Según este modelo, ¿cuándo excederá el nivel de CO_2 las 400 partes por millón?

SOLUCIÓN Mediante la ecuación 2 con $t = 1987$, se estima que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue

$$C(1987) = (1.55192)(1987) - 2734.55 \approx 349.12$$

Esto es un ejemplo de *interpolación* porque ha estimado un valor *entre* valores observados. (De hecho, el observatorio Mauna Loa informó que el nivel promedio de CO_2 en 1987 fue 348.93 ppm, de igual manera su estimado es bastante preciso.)

Con $t = 2010$, obtiene

$$C(2010) = (1.55192)(2010) - 2734.55 \approx 384.81$$

De modo que se predice que el nivel promedio de CO_2 en el año 2010 será 384.8 ppm. Esto es un ejemplo de *extrapolación* porque pronosticó un valor *fuera* de la región de las observaciones. Por consecuencia, está mucho menos seguro acerca de la exactitud de su predicción.

Al usar la ecuación 2, observe que el nivel de CO_2 excede las 400 ppm cuando

$$1.55192t - 2734.55 > 400$$

Al resolver esta desigualdad tiene

$$t > \frac{3134.55}{1.55192} \approx 2019.79$$

En consecuencia, se pronostica que el nivel de CO_2 excederá de 400 ppm hacia el año 2020. Esta predicción es riesgosa hasta cierto punto porque implica un momento bastante remoto con respecto a sus observaciones. □

POLINOMIOS

A una función P se le lama **polinomio** si

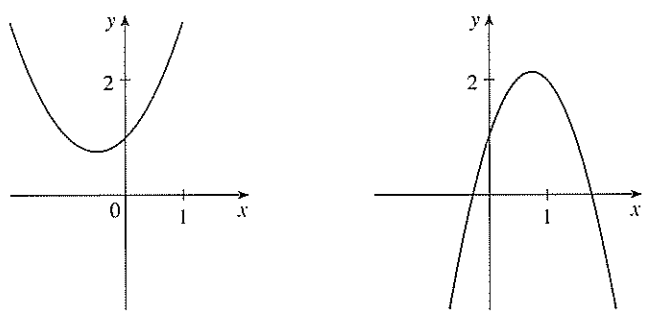
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes que se conocen como **coeficientes** del polinomio. El dominio de cualquier polinomio es $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Si el coeficiente principal $a_n \neq 0$, entonces el **grado** del polinomio es n. Por ejemplo, la función

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \tfrac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

es un polinomio de grado 6.

Un polinomio de grado 1 tiene la forma $P(x) = mx + b$ y de este modo es una función lineal. Un polinomio de grado 2 tiene la forma $P(x) = ax^2 + bx + c$ se le llama **función cuadrática**. Su gráfica es siempre una parábola que se obtiene, como verá en la sección siguiente, al cambiar la parábola $y = ax^2$. La parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. (Véase la figura 7.)



(a) $y = x^2 + x + 1$ (b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

FIGURA 7
Las gráficas de las funciones cuadráticas son parábolas.

Un polinomio de grado 3 tiene la forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad a \neq 0$$

y se le da el nombre de **función cúbica**. La figura 8 muestra la gráfica de una función cúbica en la parte (a) y gráficas de polinomios de grados 4 y 5 en las partes (b) y (c). Más adelante verá por qué las gráficas tienen las formas que se ilustran a continuación.

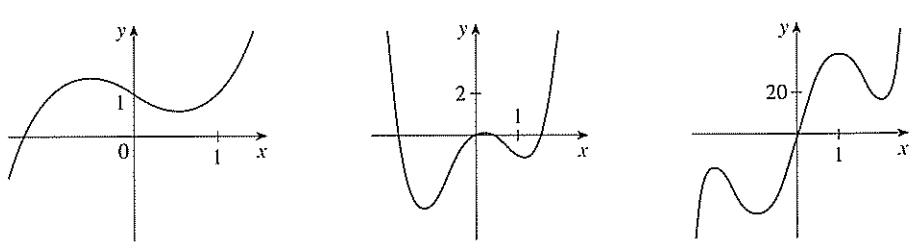


FIGURA 8 (a) $y = x^3 - x + 1$ (b) $y = x^4 - 3x^2 + x$ (c) $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Usualmente los polinomios se utilizan para modelar diversas cantidades que se suscitan en las ciencias naturales y sociales. En la sección 3.7, por ejemplo, se explica por qué los economistas suelen usar un polinomio $P(x)$ para representar el costo de producir x unidades de una mercancía. El ejemplo siguiente usa una fórmula cuadrática para modelar la caída de una pelota.

TABLA 2

Tiempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

EJEMPLO 4 Desde la plataforma superior de observación de la torre CN, a 450 m sobre el nivel, se deja caer una pelota y en la tabla 2 se registra su altura h del suelo sobre el nivel a intervalos de un segundo. Encuentre un modelo que coincida con la información y úselo para predecir el tiempo en que la pelota toca el suelo.

SOLUCIÓN En la figura 9 se traza una gráfica de dispersión de la información y se observa que no es adecuada una gráfica lineal. Pero parece ser que quizás los puntos de información se encuentren sobre una parábola, de este modo se hace la prueba con un modelo cuadrático. Al utilizar una calculadora graficadora o una computadora provista de sistema algebraico (que utiliza el método de mínimos cuadrados), se obtiene el modelo cuadrático siguiente:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2 \quad \boxed{3}$$

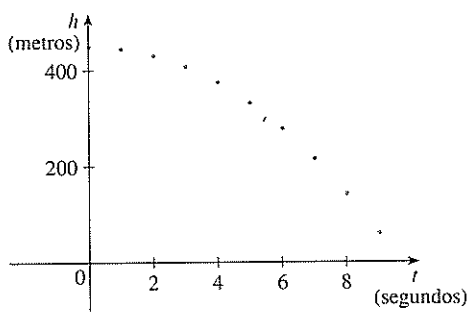


FIGURA 9
Diagrama de dispersión para una pelota que cae

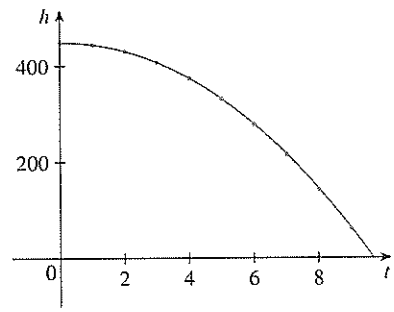


FIGURA 10
Modelo cuadrático para una pelota que cae

En la figura 10 se traza la gráfica de la ecuación 3 con los puntos de información y se observa que el modelo cuadrático da una coincidencia adecuada.

La pelota toca el suelo cuando $h = 0$, de modo que se resuelve la ecuación cuadrática

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

La fórmula cuadrática da

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

La raíz positiva es $t \approx 9.67$, por lo tanto se pronostica que la pelota tocará el suelo después de casi de 9.7 segundos. □

FUNCIONES DE POTENCIA

Una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es constante se llama **función potencia**. Considere varios casos.

(i) $a = n$, donde n es un entero positivo

La figura 11 ilustra las gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. (Éstos son polinomios con un solo término.) Ya conoce la forma de las gráficas de $y = x$ (una línea a través del origen con pendiente 1) y $y = x^2$ [una parábola, véase el ejemplo 2(b) en la sección 1.1].

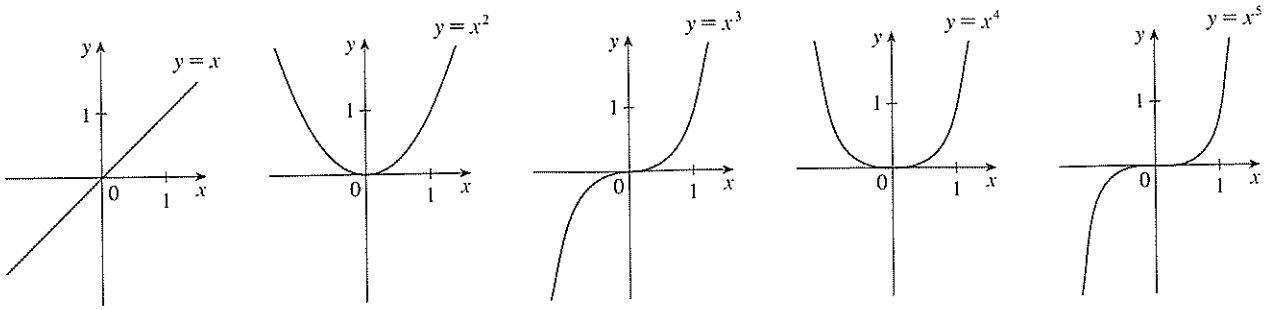


FIGURA 11 Gráficas de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

La forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar. Si n es par, en tal caso $f(x) = x^n$ es una función par y su gráfica es semejante a la de la parábola $y = x^2$. Si n es impar, en tal caso $f(x) = x^n$ es una función impar y su gráfica es similar a la de $y = x^3$. Sin embargo, observe en la figura 12 que conforme aumenta n, la gráfica se hace más plana cerca de 0 y más pronunciada cuando $|x| \geqslant 1$. (Si x es pequeña después x^2 es más pequeña, x^3 aún más pequeña, x^4 es más pequeña y así sucesivamente.)

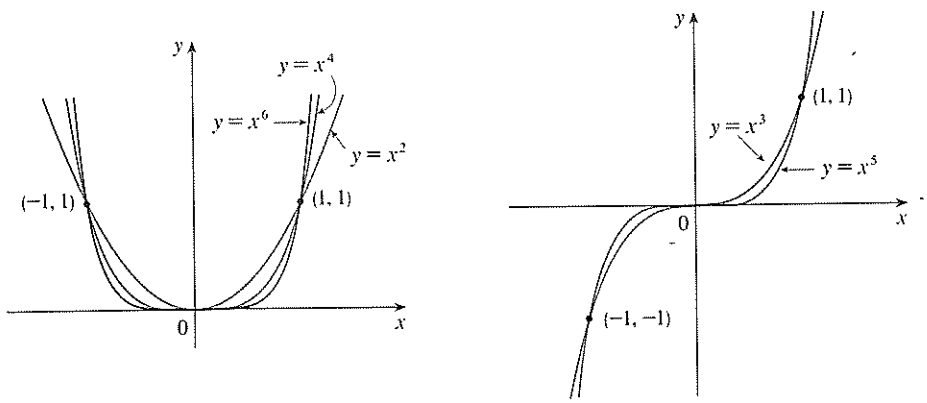


FIGURA 12
Familias de funciones de potencia

(ii) $a = 1/n$, donde n es un entero positivo

La función $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ es una **función raíz**. Para $n = 2$ es la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$, cuyo dominio es $[0, \infty)$ y cuya gráfica es la mitad superior de la parábola $x = y^2$. [Véase la figura 13(a).] Para otros valores pares de n, la gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ es similar a la de $y = \sqrt{x}$. Para $n = 3$ tenemos la función raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ (recuerde que todo número real tiene una raíz cúbica) y cuya gráfica se ilustra en la figura 13(b). La gráfica de $y = \sqrt[n]{x}$ para n impar ($n > 3$) es similar a la de $y = \sqrt[3]{x}$.

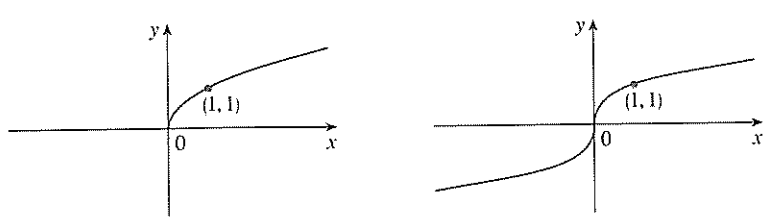


FIGURA 13
Gráficas de funciones raíz

(a) $f(x) = \sqrt{x}$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

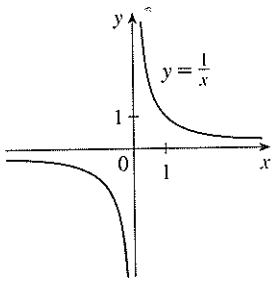


FIGURA 14
La función recíproca

(iii) $a = -1$

En la figura 14 se presenta la gráfica de la **función recíproca** $f(x) = x^{-1} = 1/x$. Su gráfica tiene la ecuación $y = 1/x$, o $xy = 1$ y es una hipérbola con sus ejes de coordenadas como sus asíntotas. Esta función surge en la física y en la química en conexión con la ley de Boyle, la cual dice que, cuando la temperatura es constante, el volumen V de un gas es inversamente proporcional a la presión P:

$$V = \frac{C}{P}$$

donde C es una constante. En estos términos, la gráfica de V como una función de P (véase la figura 15) tiene la misma forma general que la mitad derecha de la figura 14.

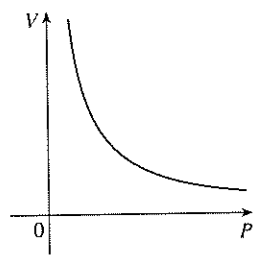


FIGURA 15
El volumen como una función de la presión a temperatura constante

En el ejercicio 26 se analiza otra situación en la que se utiliza una función potencia para modelar un fenómeno físico.

FUNCIONES RACIONALES

Una **función racional** f es una razón de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. El dominio consiste de todos los valores de x tales que $Q(x) \neq 0$. Un ejemplo sencillo de una función racional es la función $f(x) = 1/x$, cuyo dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$; esto es la función recíproca que se dibuja en la figura 14. La función

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

es una función racional con dominio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$. En la figura 16 se ilustra su gráfica.

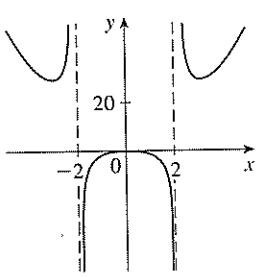


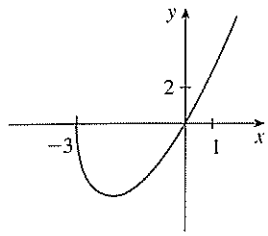
FIGURA 16
$f(x) = \dfrac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$

FUNCIONES ALGEBRAICAS

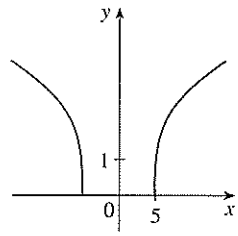
Si una función puede construirse usando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación y sacar raíces) se le llama **función algebraica**. Cualquier función racional automáticamente es una función algebraica. A continuación dos ejemplos más:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

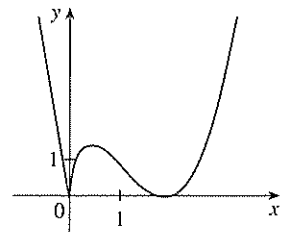
Cuando trace funciones algebraicas en el capítulo 4, verá que sus gráficas adoptan diversas formas. La figura 17 ilustra algunas de las posibilidades.



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$



(b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$



(c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

FIGURA 17

En la teoría de la relatividad surge un ejemplo de funciones algebraicas. La masa de una partícula con velocidad v, es

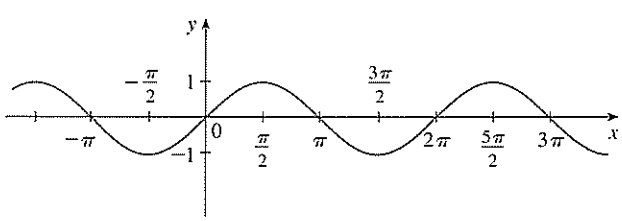
$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y $c = 3.0 \times 10^5$ km/s es la rapidez de la luz en el vacío.

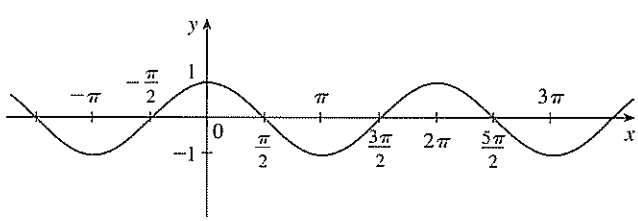
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

■ Las páginas de referencia RP están localizadas al final del libro.

La trigonometría y las funciones trigonométricas se repasan en la página de referencias 2 y también en el apéndice D. En el cálculo la convención es que siempre se utiliza la medida en radianes (excepto cuando se indique lo contrario). Por ejemplo, cuando se usa la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, se supone que sen x significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es x. Por consiguiente, las gráficas de las funciones seno y coseno son como las que se ilustran en la figura 18.



(a) $f(x) = \operatorname{sen} x$



(b) $g(x) = \cos x$

FIGURA 18

Observe que tanto para la función seno como coseno el dominio es $(-\infty, \infty)$ y el alcance es el intervalo cerrado $[-1, 1]$. En estos términos, para todos los valores de x, se tiene

$$-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$

o, en términos de valores absolutos,

$$|\operatorname{sen} x| \leqslant 1 \qquad |\cos x| \leqslant 1$$

Además, los ceros de las funciones seno surgen en múltiplos enteros de π; es decir,

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{donde} \quad x = n\pi \quad n \text{ es un número positivo}$$

Una propiedad importante de las funciones seno y coseno es que son funciones periódicas y tienen periodos 2π. Esto significa que para todas las funciones de x,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

La naturaleza periódica de estas funciones las hace adecuadas para modelar fenómenos repetitivos como por ejemplo las mareas, los resortes vibratorios y las ondas sonoras. En el caso del ejemplo 4 de la sección 1.3, verá que un modelo razonable para el número de horas de luz en Filadelfia t días después del 1 de enero está dado por la función

$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

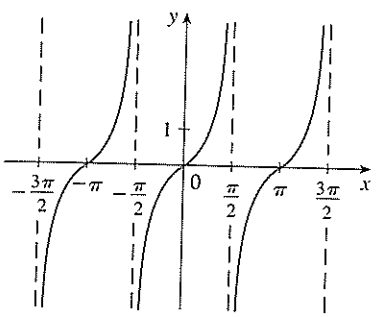


FIGURA 19
$y = \tan x$

La función tangente se relaciona con las funciones seno y coseno por medio de la ecuación

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y su gráfica se muestra en la figura 19. Es indefinida siempre que $\cos x = 0$, es decir, cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$. Su intervalo es $(-\infty, \infty)$. Observe que la función tangente tiene periodos π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{para toda } x$$

Las tres funciones trigonométricas restantes (cosecante, secante y cotangente) son recíprocas de las funciones seno, coseno y tangente. Sus gráficas se ilustran en el apéndice D.

FUNCIONES EXPONENCIALES

Las **funciones exponenciales** son las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva. En la figura 20 se muestran las gráficas de $y = 2^x$ y $y = (0.5)^x$. En ambos casos el dominio es $(-\infty, \infty)$ y $(0, \infty)$ es el intervalo.

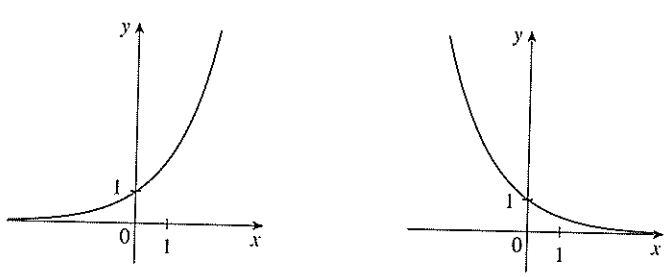


FIGURA 20
(a) $y = 2^x$ (b) $y = (0.5)^x$

En la sección 1.5 se estudiarán las funciones exponenciales con mayores detalles y verá que resultan útiles para modelar muchos fenómenos naturales, como por ejemplo el crecimiento de la población (si $a > 1$) y el decaimiento radiactivo (si $a < 1$).

http://libreria-universitaria.blogspot.com

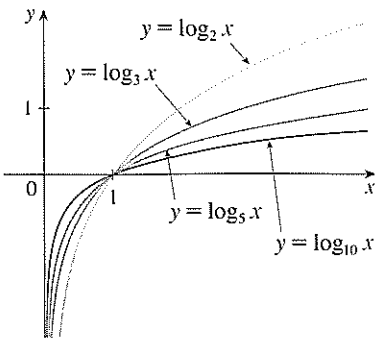


FIGURA 21

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Las **funciones logarítmicas** $f(x) = \log_a x$, donde la base a es una constante positiva, son las inversas de las funciones exponenciales. Las primeras se estudian en la sección 1.6. En la figura 21 se muestran las gráficas de cuatro funciones logarítmicas con varias bases. En cada caso el dominio es $(0, \infty)$, el intervalo es $(-\infty, \infty)$, y la función crece lentamente cuando $x > 1$.

FUNCIONES TRASCENDENTES

Estas funciones no son algebraicas. El conjunto de funciones trascendentes incluye la trigonométrica, la trigonométrica inversa, exponencial y logarítmica, además comprende un buen número de otras funciones que nunca han recibido nombre. En el capítulo 11 se analizarán las funciones trascendentes que se definen como sumas de series infinitas.

EJEMPLO 5 Clasifique las funciones siguientes como uno de los tipos de funciones recién analizadas.

(a) $f(x) = 5^x$ (b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ (d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

SOLUCIÓN

(a) $f(x) = 5^x$ es una función exponencial. (La x es el exponente.)

(b) $g(x) = x^5$ es una función potencia. (La x es la base.) Podría considerar también que es un polinomio de grado 5.

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$ es una función algebraica.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ es un polinomio de grado 4. □

1.2 EJERCICIOS

1–2 Clasifique cada función como función potencia, función raíz, polinomio (señale su grado), función racional, función algebraica, función trigonométrica, función exponencial o función logarítmica.

1. (a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

(c) $h(x) = x^9 + x^4$ (d) $r(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x}$

(e) $s(x) = \tan 2x$ (f) $t(x) = \log_{10} x$

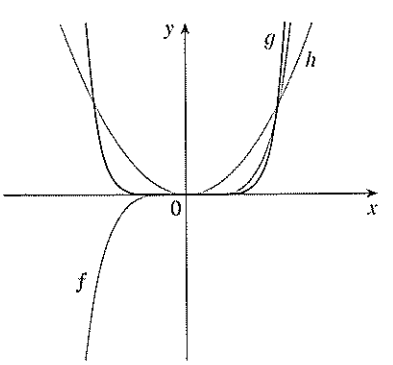
2. (a) $y = \dfrac{x - 6}{x + 6}$ (b) $y = x + \dfrac{x^2}{\sqrt{x - 1}}$

(c) $y = 10^x$ (d) $y = x^{10}$

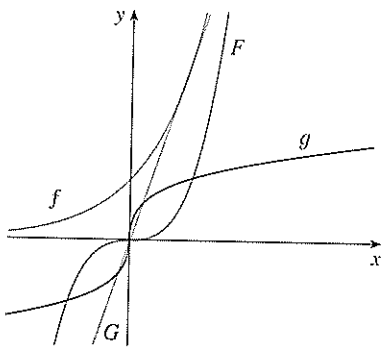
(e) $y = 2t^6 + t^4 - \pi$ (f) $y = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta$

3–4 Haga coincidir cada ecuación con su gráfica. Explique sus selecciones. (No use una computadora ni una calculadora graficadora.)

3. (a) $y = x^2$ (b) $y = x^5$ (c) $y = x^8$



4. (a) $y = 3x$ (b) $y = 3^x$
(c) $y = x^3$ (d) $y = \sqrt[3]{x}$



5. (a) Encuentre una ecuación para la familia de funciones lineales con pendiente 2 y trace la gráfica de varios miembros de la familia.

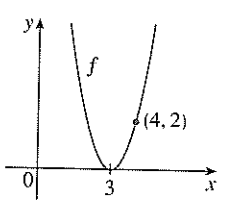
(b) Halle una ecuación para la familia de funciones lineales tal que $f(2) = 1$ y dibuje varios miembros de la familia.

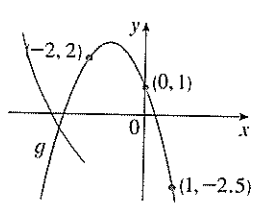
(c) ¿Qué función pertenece a ambas familias?

6. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Trace la gráfica de varios miembros de la familia.

7. ¿Qué tienen en común todos los miembros de la familia de funciones lineales $f(x) = c - x$? Trace la gráfica de varios miembros de la familia.

8. Halle las expresiones para las funciones cuadráticas cuyas gráficas son mostradas.





9. Hallar una expresión para una función cúbica f si $f(-1) = 6$ y $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$.

10. Estudios recientes indican que la temperatura superficial de la Tierra se ha estado incrementando de manera firme. Algunos científicos han modelado la temperatura mediante la función lineal $T = 0.02t + 8.50$, donde T es la temperatura en °C y t representa años desde 1900.

(a) ¿Qué representa la pendiente y la intersección a T?
(b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura superficial global al promedio al 2100.

11. Si la dosificación recomendada para un adulto de una droga es D (en mg), entonces, para establecer la dósis apropiada c para un infante de edad a, el químico farmacéutico utiliza la ecuación $c = 0.0417D(a + 1)$. Considere que la dósis para un adulto es 200 mg.

(a) Hallar la pendiente de la gráfica de c. ¿Qué representa?
(b) ¿Cuál es la dósis para un recién nacido?

12. El gerente de un bazar de fin de semana sabe con base en experiencias anteriores que si cobra x dólares por la renta de espacio en el bazar, entonces el número y de espacios que puede rentar está dado por la ecuación $y = 200 - 4x$.

(a) Trace una gráfica de esta función lineal. (Recuerde que la renta que se cobra por espacio y el número de espacios que pueden rentarse no pueden ser cantidades negativas.)

(b) ¿Qué representan la pendiente, la ordenada al origen y y la intersección x de la gráfica?

13. La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) está dada por la función lineal $F = \frac{9}{5}C + 32$.

(a) Trace una gráfica de esta función.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa? ¿Cuál es la intersección de F y qué representa?

14. Jason sale de Detroit a las 2:00 P.M. y conduce con rapidez constante hacia el oeste a lo largo de la carretera I-96. Pasa por Ann Arbor, a 40 millas de Detroit a las 2:50

(a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.
(b) Dibuje la gráfica de la ecuación del inciso (a).
(c) ¿Cuál es la pendiente de esta línea? ¿Qué representa?

15. Los biólogos han notado que la cantidad de chirridos que emiten los grillos de cierta especie está relacionada con la temperatura y la correspondencia parece ser casi lineal. Un grillo produce 113 chirridos por minuto a 70°F y 173 chirridos por minuto a 80°F.

(a) Encuentre una ecuación lineal que modele la temperatura como una función del número de chirridos por minuto N.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica? ¿Qué representa?
(c) Si los grillos están chirreando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

16. El gerente de una fábrica de muebles encontró que cuesta 2 200 dólares fabricar 100 sillas en un día y 4 800 dólares producir 300 en un día.

(a) Exprese el costo como una función del número de sillas que se producen, suponiendo que es lineal. Luego trace la gráfica.
(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?
(c) ¿Cuál es la intersección de y de la gráfica y qué representa?

17. En la superficie del océano la presión del agua es la misma que la presión del aire por arriba del agua, 15 lb/pulg^2. Por debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies de descenso.

(a) Exprese la presión del agua como función de la profundidad por debajo de la superficie del océano.
(b) ¿A qué profundidad es 100 lb/pulg^2 la presión?

18. El costo mensual de conducir un automóvil depende del número de millas que se recorran. Lynn encontró que en el mes de mayo recorrer 480 millas le costó 380 dólares y en junio le costó 460 dólares recorrer 800 millas.

(a) Exprese el costo mensual C como una función de la distancia recorrida d, suponiendo que la correspondencia lineal provee un modelo adecuado.

(b) Utilice el inciso (a) para predecir el costo de conducir 1 500 millas por cada mes.

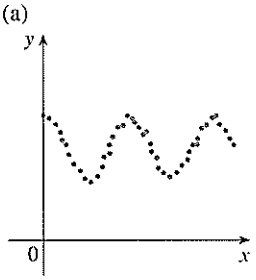
(c) Trace la gráfica de la función lineal. ¿Qué representa la pendiente?

(d) ¿Qué representa la intersección de y?

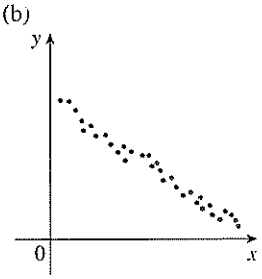
(e) ¿Por qué una función lineal proporciona un modelo apropiado en esta situación?

19–20 Determine, para cada una de las gráficas de dispersión, qué tipo de función elegiría como modelo para la información. Explique sus elecciones.

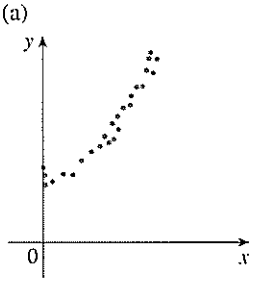
19. (a)



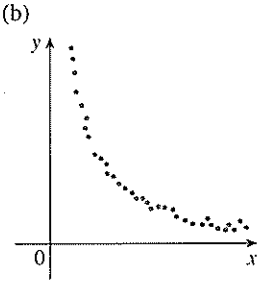
(b)



20. (a)



(b)



21. La tabla muestra las tasas de incidencia de úlcera péptica (a lo largo de toda la vida) respecto del ingreso de diversas familias (por cada 100 habitantes) según reportó el National Health Interview Survey (Encuesta Nacional de Salud por medio de Entrevistas) en 1989.

Ingreso	Incidencia de úlcera (por cada 100 habitantes)
$4 000	14.1
$6 000	13.0
$8 000	13.4
$12 000	12.5
$16 000	12.0
$20 000	12.4
$30 000	10.5
$45 000	9.4
$60 000	8.2

(a) Trace una gráfica de dispersión y determine si es adecuado un modelo lineal.

(b) Halle y dibuje un modelo lineal utilizando el primero y el último puntos de información.

(c) Encuentre y dibuje la línea de regresión por mínimos cuadrados.

(d) Utilice el modelo lineal del inciso (c) para estimar la incidencia de úlcera para un ingreso de 25 000 dólares.

(e) Según el modelo, ¿qué tan probable es que alguien que percibe un ingreso de 80 000 dólares sufra úlcera péptica?

(f) ¿Cree usted que sería razonable aplicar el modelo a alguien que tiene un ingreso de 200 000 dólares?

22. Los biólogos han observado que la cantidad de chirridos que emiten los grillos de cierta especie parece estar relacionada con la temperatura. La tabla muestra la cantidad de chirridos para distintas temperaturas.

Temperatura (°F)	Cantidad de chirridos (chirridos/minuto)	Temperatura (°F)	Cantidad de chirridos (chirridos/minuto)
50	20	75	140
55	46	80	173
60	79	85	198
65	91	90	211
70	113		

(a) Realice una gráfica de dispersión de la información.

(b) Encuentre y dibuje la línea de regresión.

(c) Use el modelo lineal de la parte (b) para estimar la cantidad de chirridos a 100°F.

23. La tabla proporciona las alturas ganadoras en las competencias de salto con garrocha de los Juegos Olímpicos durante el siglo XX.

Año	Altura (pies)	Año	Altura (pies)
1900	10.83	1956	14.96
1904	11.48	1960	15.42
1908	12.17	1964	16.73
1912	12.96	1968	17.71
1920	13.42	1972	18.04
1924	12.96	1976	18.04
1928	13.77	1980	18.96
1932	14.15	1984	18.85
1936	14.27	1988	19.77
1948	14.10	1992	19.02
1952	14.92	1996	19.42

(a) Dibuje una gráfica de dispersión y determine si un modelo lineal es adecuado.

(b) Encuentre y dibuje la línea de regresión.

(c) Utilice el modelo lineal para predecir la altura del salto con garrocha ganador en los Juegos Olímpicos del año 2000 y compárelo con la altura ganadora real de 19.36 pies.

(d) ¿Es razonable usar el modelo para predecir las alturas vencedoras en los Juegos Olímpicos del año 2100?

24. Un estudio que realizó la U.S. Office of Science and Technology (Oficina de Ciencia y Tecnología de Estados Unidos) en 1972 estimó el costo (en dólares de 1972) de reducir el costo de las emisiones de vehículos automotores en ciertos porcentajes:

Reducción de emisiones (%)	Costo por vehículo (en dólares)	Reducción de emisiones (%)	Costo por vehículo (en dólares)
50	45	75	90
55	55	80	100
60	62	85	200
65	70	90	375
70	80	95	600

Encuentre un modelo que capte la tendencia de "rendimientos decrecientes" de esta información.

25. Utilice la información que aparece en la tabla para modelar la población del mundo en el siglo XX por medio de una función cúbica. Utilice enseguida su modelo para estimar la población en el año 1925.

Años	Población (millones)	Años	Población (millones)
1900	1 650	1960	3 040
1910	1 750	1970	3 710
1920	1 860	1980	4 450
1930	2 070	1990	5 280
1940	2 300	2000	6 080
1950	2 560		

26. La tabla muestra las distancias medias (promedio) d de los planetas al Sol (suponiendo que la unidad de medida es la distancia de la Tierra al Sol) y sus periodos T (tiempo de revolución en años).

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784

(a) Haga que un modelo de potencias coincida con la información.

(b) La tercera ley de Kepler del movimiento planetario establece que

"El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media respecto del Sol."

¿El modelo que formuló corrobora la tercera ley de Kepler?

1.3 FUNCIONES NUEVAS A PARTIR DE FUNCIONES ANTIGUAS

Esta sección inicia con las funciones básicas analizadas en la sección 1.2 para obtener funciones nuevas mediante el desplazamiento, el alargamiento y la reflexión de sus gráficas. También es mostrará cómo combinar pares de funciones por medio de operaciones aritméticas estándar o por composición.

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Al aplicar ciertas transformaciones a la gráfica de una función dada, puede obtener las gráficas de ciertas funciones relacionadas. Esto le proporcionará la habilidad para trazar a mano las gráficas de muchas funciones. Además le permitirá escribir ecuaciones para gráficas conocidas. En primer lugar, se considera las **traslaciones**. Si c es un número positivo, por lo tanto la gráfica de $y = f(x) + c$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada hacia arriba una distancia de c unidades (ya que a cada coordenada y se incrementa el mismo número c). Del mismo modo, si $g(x) = f(x - c)$, donde $c > 0$, por lo tanto el valor de g en x es el mismo que el valor de f en $x - c$ (c unidades a la izquierda de x). En consecuencia, la gráfica de $y = f(x - c)$ es precisamente la de $y = f(x)$ desplazada c unidades a la derecha (véase la figura 1).

DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES Suponga que $c > 0$. Para obtener la gráfica de

$y = f(x) + c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia arriba

$y = f(x) - c$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia abajo

$y = f(x - c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la derecha

$y = f(x + c)$, se desplaza la gráfica de $y = f(x)$ una distancia de c unidades hacia la izquierda

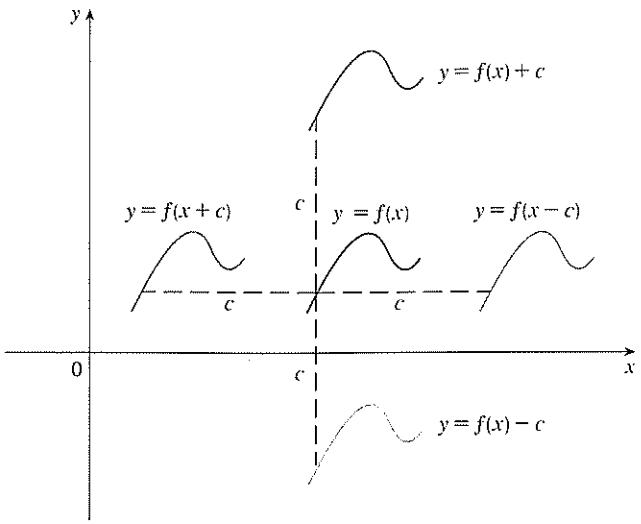


FIGURA 1
Traslación de la gráfica de f

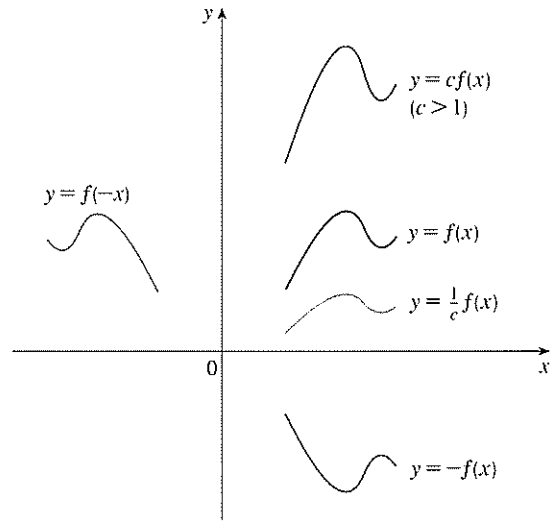


FIGURA 2
Alargamiento y reflexión de la gráfica de f

Considere ahora las transformaciones de **alargamiento** y **reflexión**. Si $c > 1$, en tal caso la gráfica de $y = cf(x)$ es la de $y = f(x)$ alargada en el factor c en la dirección vertical (porque cada coordenada y se multiplica por el mismo número c) La gráfica de $y = -f(x)$ es la de $y = f(x)$ reflejada respecto al eje x, porque el punto (x, y) reemplaza al punto $(x, -y)$. (Véase la figura 2 y la tabla a continuación, donde también se dan los resultados de otras transformaciones de alargamiento, compresión y reflexión.)

ALARGAMIENTOS Y REFLEXIONES VERTICALES Y HORIZONTALES Suponga que $c > 1$. Para obtener la gráfica de

$y = cf(x)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ verticalmente en un factor de c

$y = (1/c)f(x)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ verticalmernte en un factor de c

$y = f(cx)$, comprímase la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c

$y = f(x/c)$, alárguese la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente en un factor de c

$y = -f(x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje x

$y = f(-x)$, refléjese la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje y

La figura 3 ilustra estas transformaciones de alargamiento cuando se aplican a la función coseno con $c = 2$. Por ejemplo, para obtener la gráfica de $y = 2\cos x$ multiplique la coordenada y de cada punto en la gráfica de $y = \cos x$ por 2. Esto significa que la gráfica de $y = \cos x$ se alarga en dirección vertical por un factor de 2.

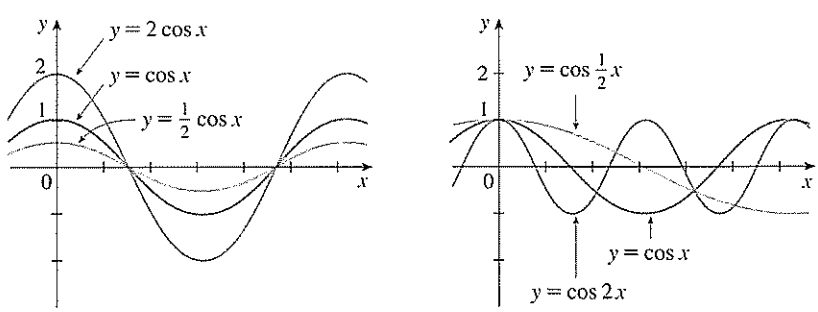
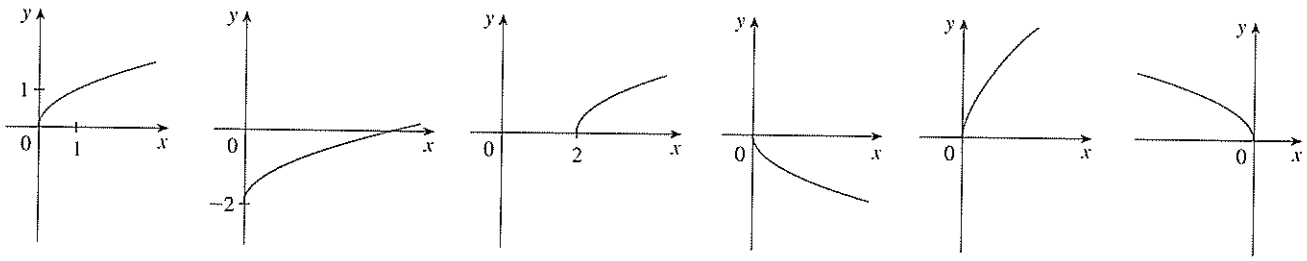


FIGURA 3

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJEMPLO 1 Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use las transformaciones para dibujar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$.

SOLUCIÓN En la figura 4(a) aparece la gráfica de la función raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$, que se obtuvo de la figura 13(a) en la sección 1.2. En las otras partes de la figura, se ha trazado $y = \sqrt{x} - 2$ al desplazarla 2 unidades hacia abajo; $y = \sqrt{x - 2}$ al desplazarla 2 unidades hacia la derecha; $y = -\sqrt{x}$ al reflejarla respecto al eje x; $y = 2\sqrt{x}$ al alargarla verticalmente un factor de 2, y $y = \sqrt{-x}$ al reflejarla respecto al eje y.



(a) $y = \sqrt{x}$ (b) $y = \sqrt{x} - 2$ (c) $y = \sqrt{x - 2}$ (d) $y = -\sqrt{x}$ (e) $y = 2\sqrt{x}$ (f) $y = \sqrt{-x}$

FIGURA 4

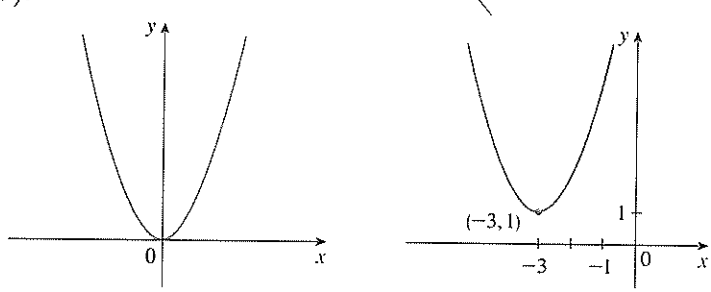
□

EJEMPLO 2 Dibuje la función $f(x) = x^2 + 6x + 10$.

SOLUCIÓN Al completar el cuadrado, escriba la ecuación de la gráfica como

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Esto quiere decir que obtiene la gráfica deseada si parte de la parábola $y = x^2$ y la desplaza 3 unidades a la izquierda y, a continuación, 1 unidad hacia arriba (véase la figura 5).



(a) $y = x^2$ (b) $y = (x + 3)^2 + 1$

FIGURA 5

□

EJEMPLO 3 Trace las gráficas de las funciones siguientes:

(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = 1 - \operatorname{sen} x$

SOLUCIÓN

(a) Obtiene la gráfica de $y = \operatorname{sen} 2x$ a partir de la de $y = \operatorname{sen} x$, si la comprime horizontalmente un factor de 2 (véase las figuras 6 y 7). De modo que, mientras el periodo de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, el periodo de $y = \operatorname{sen} 2x$ es $2\pi/2 = \pi$.

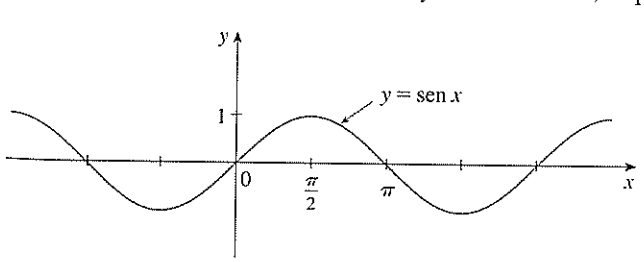


FIGURA 6

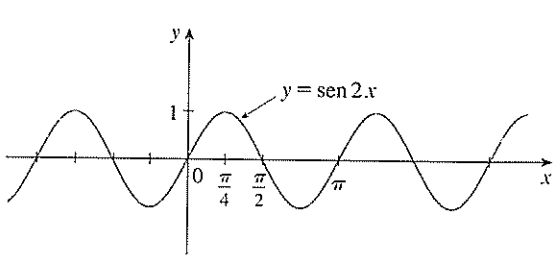


FIGURA 7

(b) Para obtener la gráfica de $y = 1 - \operatorname{sen} x$, una vez más empiece con $y = \operatorname{sen} x$. La refleja con respecto al eje x, para obtener la gráfica de $y = -\operatorname{sen} x$ y, a continuación, desplácela 1 unidad hacia arriba para obtener $y = 1 - \operatorname{sen} x$ (véase la figura 8).

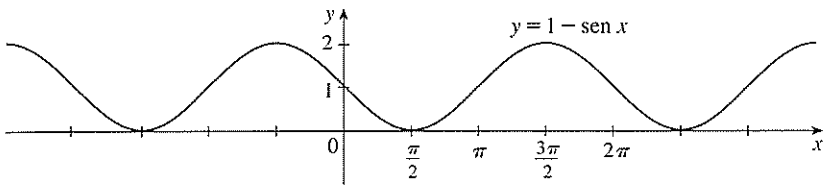


FIGURA 8

□

EJEMPLO 4 La figura 9 muestra gráficas del número de horas de luz diurna como funciones de la época del año en diversas latitudes. Dado que la ciudad de Filadelfia está ubicada a 40° de latitud N, encuentre una función que modele la duración de la luz diurna en la ciudad mencionada.

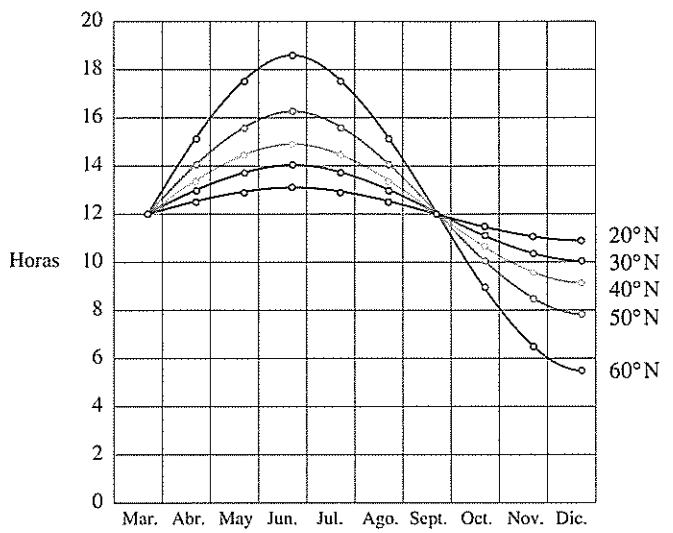


FIGURA 9
Gráfica de la duración de la luz diurna del 21 de marzo al 21 de diciembre en diversas latitudes
Fuente: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (New York: Silver, Burdett, 1935) página 40.

SOLUCIÓN Observe que cada curva se parece a una función seno desplazada y alargada. Al observar la curva de color azul parece que, en la latitud de Filadelfia, la luz diurna dura alrededor de 14.8 horas el 21 de junio y 9.2 horas el 21 de diciembre, de manera que la amplitud de la curva (el factor por el cual debe alargar la curva seno verticalmente) es $\frac{1}{2}(14.8 - 9.2) = 2.8$.

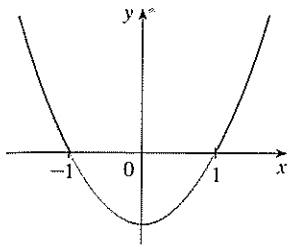
¿Por qué factor necesita alargar la curva seno horizontalmente si mide el tiempo t en días? Debido a que en un año hay 365 días, el periodo del modelo debe ser 365 días. Pero el periodo de $y = \operatorname{sen} t$ es 2π, por consiguiente el factor de alargamiento horizontal es $c = 2\pi/365$.

Se observa también que la curva inicia su ciclo el 21 de marzo, el 80o. día del año, de modo que desplace la curva 80 unidades hacia la derecha. Además, la desplaza 12 unidades hacia arriba. En consecuencia, modele la duración de la luz diurna en Filadelfia sobre el t-ésimo. día del año mediante la función

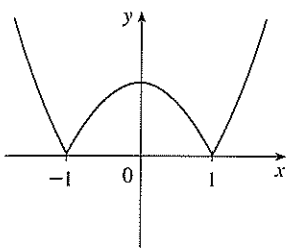
$$L(t) = 12 + 2.8 \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right]$$

□

Otra transformación de cierto interés es tomar el valor absoluto de una función. Si $y = |f(x)|$, en tal caso, según la definición de valor absoluto, $y = f(x)$ cuando $f(x) \geq 0$ y $y = -f(x)$ cuando $f(x) < 0$. Esto dice cómo obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$: la parte de la gráfica que se encuentra arriba del eje x sigue siendo la misma; la sección debajo del eje x se refleja respecto a este eje.



(a) $y = x^2 - 1$



(b) $y = |x^2 - 1|$

FIGURA 10

EJEMPLO 5 Dibuje la función $y = |x^2 - 1|$.

SOLUCIÓN En primer lugar, dibuje la parábola $y = x^2 - 1$ de la figura 10(a) desplazando la parábola $y = x^2$ hacia abajo 1 unidad. La gráfica se encuentra debajo del eje x cuando $-1 < x < 1$, de modo que reflejamos esa parte de la gráfica respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = |x^2 - 1|$ de la figura 10(b) □

COMBINACIONES DE FUNCIONES

Se pueden combinar las dos funciones f y g para formar funciones nuevas $f + g$, $f - g$, fg y f/g de manera semejante a la que aplica para sumar, restar, multiplicar y dividir números reales. Se definen la suma y resta de funciones mediante

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Si el dominio de f es A y el de g es B, en tal caso el dominio de $f + g$ es la intersección $A \cap B$ porque tanto $f(x)$ y $g(x)$ estan definidas. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $A = [0, \infty)$ y el dominio de $g(x) = \sqrt{2 - x}$ es $B = (-\infty, 2]$, de esa manera, el dominio de $(f + g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2 - x}$ es $A \cap B = [0, 2]$

De manera análoga, se definen el producto y el cociente mediante

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

El dominio de fg es $A \cap B$, pero no puede dividir entre 0 y así, el dominio de f/g es $\{x \in A \cap B \mid (x) \neq 0\}$. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 1$, en tal caso, el dominio de la función racional $(f/g)(x) = x^2/(x - 1)$ es $\{x/x \neq 1\}$, o bien $(-\infty,1) \cup (1, \infty)$.

Existe otra manera de combinar dos funciones, para obtener una función nueva. Por ejemplo, considere que $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2 + 1$. Ya que y es una función de u y u es, en su momento, una función de x, por último surge que y es una función de x. Calcule esto mediante la sustitución:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$$

El procedimiento se denomina composición porque la función nueva es compuesta de las dos funciones conocidas f y g.

En general, conocidas dos funciones cualesquiera f y g, inicie con un número x en el dominio de g y halle su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, en seguida puede calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una función nueva $h(x) = f(g(x))$ que se obtiene al sustituir g en f. Esto se denomina composición (o composite) de f y g y se señala mediante $f \circ g$ ("f círculo g")

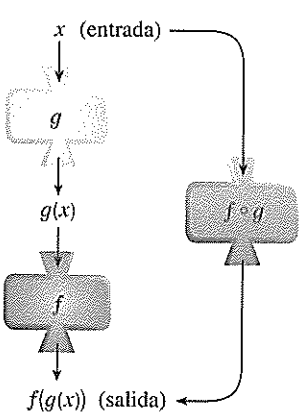


FIGURA 11
El dispositivo $f \circ g$ está constituido del dispositivo g (primero) y en seguida el dispositivo f.

DEFINICIÓN Conocidas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también denominada la **composición** de f y g) se define mediante

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida cada vez que tanto $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. La figura 11 exhibe cómo describir $f \circ g$ en términos de dispositivos.

EJEMPLO 6 Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$, encuentre las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$.

SOLUCIÓN Tiene

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = (x - 3)^2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3$$ □

NOTA Con base en el ejemplo 7 puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde, la notación $f \circ g$ significa que primero se aplica la función g y luego f. En el ejemplo 6, $f \circ g$ es la función que *primero* resta 3 y *a continuación* eleva al cuadrado; $g \circ f$ es la función que *en primer lugar* eleva al cuadrado y *luego* resta 3.

EJEMPLO 7 Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre cada función y su dominio.
(a) $f \circ g$ (b) $g \circ f$ (c) $f \circ f$ (d) $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{\sqrt{2 - x}} = \sqrt[4]{2 - x}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant 2\} = (-\infty, 2]$.

(b) $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}$$

Si $0 \leqslant a \leqslant b$, entonces $a^2 \leqslant b^2$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debe tener $x \geqslant 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida debe tener $2 - \sqrt{x} \geqslant 0$, es decir, $\sqrt{x} \leqslant 2$, o bien, $x \leqslant 4$. Por esto, tiene $0 \leqslant x \leqslant 4$, así el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(c) $$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d) $$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\sqrt{2 - x}\right) = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

Esta expresión se define cuando $2 - x \geqslant 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geqslant 0$. La primera desigualdad significa que $x \leqslant 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leqslant 2$, o $2 - x \leqslant 4$, o bien $x \geqslant -2$. En estos términos $-2 \leqslant x \leqslant 2$, de esta manera el dominio de $g \circ g$ es el intervalo cerrado $[-2, 2]$. □

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar primero h, a continuación g y, luego, f, como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 8 Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN $$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x + 3))$$

$$= f((x + 3)^{10}) = \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1}$$ □

Hasta ahora, ha usado la composición para construir funciones complicadas a partir de otras más sencillas. Pero en cálculo a menudo resulta útil descomponer una función complicada en otras más sencillas, como en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 9 Dada $F(x) = \cos^2(x + 9)$, encuentre las funciones f, g y h tales que $F = f \circ g \circ h$.

SOLUCIÓN Como $F(x) = [\cos(x + 9)]^2$, la fórmula dada para F dice: primero sume 9, después tome el coseno del resultado y, por último, eleve al cuadrado. De modo que

$$h(x) = x + 9 \qquad g(x) = \cos x \qquad f(x) = x^2$$

Entonces

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) = f(g(x + 9)) = f(\cos(x + 9)) \\ &= [\cos(x + 9)]^2 = F(x)\end{aligned}$$

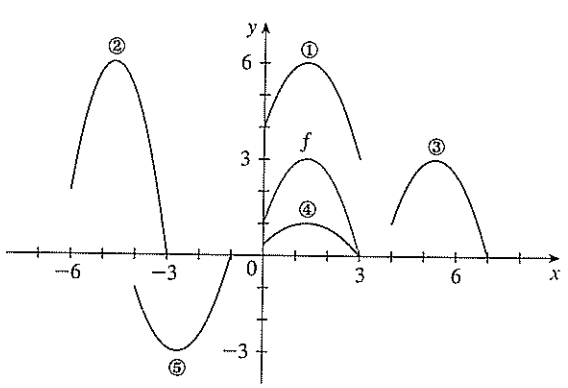
□

1.3 EJERCICIOS

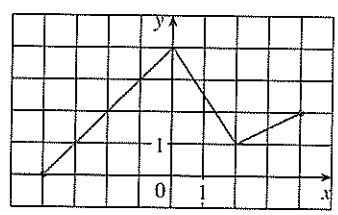
1. Suponga que se da la gráfica de f. Escriba las ecuaciones para las gráficas que se obtienen a partir de la gráfica de f, como se indica a continuación.
(a) Desplácela 3 unidades hacia arriba.
(b) Desplácela 3 unidades hacia abajo.
(c) Desplácela 3 unidades a la derecha.
(d) Desplácela 3 unidades a la izquierda.
(e) Refléjela respecto al eje x.
(f) Refléjela respecto al eje y.
(g) Alárguela verticalmente un factor de 3.
(h) Contráigala verticalmente un factor de 3.

2. Explique cómo se obtienen las gráficas siguientes a partir de la gráfica de $y = f(x)$.
(a) $y = 5f(x)$ (b) $y = f(x - 5)$
(c) $y = -f(x)$ (d) $y = -5f(x)$
(e) $y = f(5x)$ (f) $y = 5f(x) - 3$

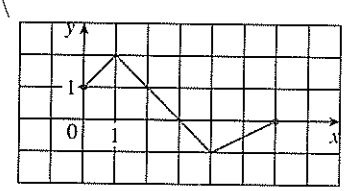
3. Se da la gráfica de $y = f(x)$. Haga que coincida cada ecuación con su gráfica y mencione los motivos de sus elecciones.
(a) $y = f(x - 4)$ (b) $y = f(x) + 3$
(c) $y = \frac{1}{3}f(x)$ (d) $y = -f(x + 4)$
(e) $y = 2f(x + 6)$



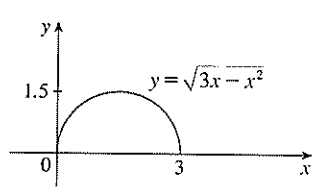
4. Se da la gráfica de f. Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.
(a) $y = f(x + 4)$ (b) $y = f(x) + 4$
(c) $y = 2f(x)$ (d) $y = -\frac{1}{2}f(x) + 3$



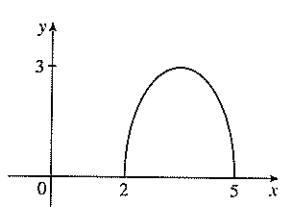
5. Se da la gráfica de f. Úsela para trazar la gráfica de las funciones siguientes.
(a) $y = f(2x)$ (b) $y = f(\frac{1}{2}x)$
(c) $y = f(-x)$ (d) $y = -f(-x)$



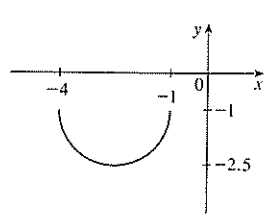
6–7 Se da la gráfica de $y = \sqrt{3x - x^2}$. Use transformaciones para crear una función cuya gráfica sea como la que se ilustra.



6.



7.



http://libreria-universitaria.blogspot.com

8. (a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = 2 \operatorname{sen} x$ con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$? Use su respuesta y la figura 6(a) para graficar $y = 2 \operatorname{sen} x$.

(b) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = 1 + \sqrt{x}$ con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Use su respuesta y la figura 4(a) para graficar $y = 1 + \sqrt{x}$.

9–24 Dibuje cada función a mano, no por medio de la situación de puntos, sino a partir de la gráfica de una de las funciones estándares que se dan en la sección 1.2 y, luego, aplicando las transformaciones apropiadas.

9. $y = -x^3$

10. $y = 1 - x^2$

11. $y = (x + 1)^2$

12. $y = x^2 - 4x + 3$

13. $y = 1 + 2 \cos x$

14. $y = 4 \operatorname{sen} 3x$

15. $y = \operatorname{sen}(x/2)$

16. $y = \dfrac{1}{x - 4}$

17. $y = \sqrt{x + 3}$

18. $y = (x + 2)^4 + 3$

19. $y = \frac{1}{2}(x^2 + 8x)$

20. $y = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$

21. $y = \dfrac{2}{x + 1}$

22. $y = \dfrac{1}{4} \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

23. $y = |\operatorname{sen} x|$

24. $y = |x^2 - 2x|$

---

25. La ciudad de Nueva Orleáns está ubicada a una latitud 30°N. Use la figura 9 para encontrar una función que modele el número de horas de luz diurna en esa ciudad como función de la época del año. Para verificar la precisión de su modelo, utilice el hecho de que el 31 de marzo, en Nueva Orleáns el Sol sale a las 5:51 A.M. y se pone a las 6:18 P.M.

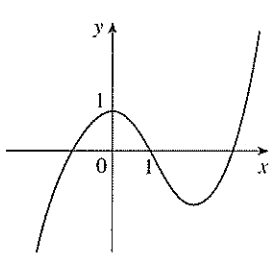
26. Una estrella variable es aquella cuyo brillo aumenta y disminuye alternadamente. Para la estrella variable más cercana Delta Céfida, el tiempo entre periodos de brillo máximo es 5.4 días, el brillo promedio (o magnitud) de la estrella es 4.0 y su brillo varía en una magnitud de ± 0.35. Halle una función que modele el brillo de Delta Céfida como una función del tiempo.

27. (a) ¿Cómo se relaciona la gráfica de $y = f(|x|)$ con la gráfica de f?

(b) Dibuje $y = \operatorname{sen} |x|$.

(c) Dibuje $y = \sqrt{|x|}$.

28. Use la gráfica de f que se dio para dibujar $y = 1/f(x)$. ¿Cuáles características de f son las más importantes para trazar la gráfica de $y = 1/f(x)$? Explique cómo se usan.



29–30 Encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y establezca sus dominios.

29. $f(x) = x^3 + 2x^2, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

30. $f(x) = \sqrt{3 - x}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

31–36 Encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, y (d) $g \circ g$ y sus dominios.

31. $f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = 1 - 2, \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

33. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = \cos x$

34. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \sqrt[3]{1 - x}$

35. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

37–40 Encuentre $f \circ g \circ h$.

37. $f(x) = x - 1, \quad g(x) = 2x, \quad h(x) = x - 1$

38. $f(x) = 2x - 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 1 - x$

39. $f(x) = \sqrt{x - 3}, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = x^3 + 2$

40. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

41–46 Exprese la función en la forma $f \circ g$.

41. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$

42. $F(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$

43. $F(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}}$

44. $G(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x}{1 + x}}$

45. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

46. $u(t) = \dfrac{\tan t}{1 + \tan t}$

47–49 Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

47. $H(x) = 1 - 3^{x^2}$

48. $H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$

49. $H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$

---

50. Utilice la tabla para evaluar cada expresión

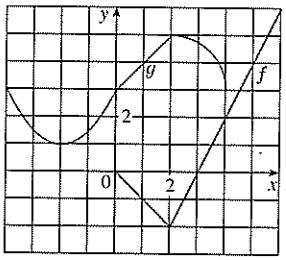
(a) $f(g(1))$ (b) $g(f(1))$ (c) $f(f(1))$

(d) $g(g(1))$ (e) $(g \circ f)(3)$ (f) $(f \circ g)(6)$

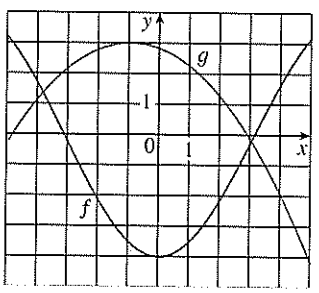
x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

51. Use las gráficas dadas de f y g para evaluar cada expresión, o bien, explique por qué no está definida.

(a) $f(g(2))$ (b) $g(f(0))$ (c) $(f \circ g)(0)$
(d) $(g \circ f)(6)$ (e) $(g \circ g)(-2)$ (f) $(f \circ f)(4)$



52. Use las gráficas dadas de f y g para estimar el valor de $f(g(x))$ para $x = -5, -4, -3, \ldots, 5$. Use estas estimaciones para trazar una gráfica aproximada de $f \circ g$.



53. Se deja caer una piedra en un lago, que crea una ola circular que viaja hacia afuera con rapidez de 60 cm/s.

(a) Exprese el radio r de este círculo como función del tiempo t (en segundos).
(b) Si A es el área de este círculo como función del radio, encuentre $A \circ r$ e interprétela.

54. Se infla un balón esférico y el radio del mismo se incrementa en una cantidad de 2 cm/s.

(a) Exprese el radio r del balón como una función del tiempo t (en segundos).
(b) Si V es el volumen del balón como una función del radio, halle $V \circ r$ e interprete

55. Un barco se mueve con una rapidez de 30 km/h paralelo al borde recto de la playa. El barco está a 6 km de la playa y pasa por un faro al medio día.

(a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como una función de d, la distancia que el barco recorre desde el medio día; es decir, hallar f de modo que $s = f(d)$
(b) Exprese a d como una función de t, el tiempo transcurrido desde el medio día; es decir, hallar g de tal manera que $d = g(t)$
(c) Hallar $f \circ g$ ¿Qué representa esta función?

56. Un avión vuela con rapidez de 350 mi/h, a una altitud de una milla y pasa directamente sobre una estación de radar en el instante $t = 0$

(a) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que el avión ha volado como función de t.
(b) Exprese la distancia s entre el avión y la estación de radar como función de d.
(c) Aplique la composición para expresar s como función de t.

57. La **función de Heaviside** H está definida por

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Se usa en el estudio de los circuitos eléctricos para representar la oleada repentina de corriente eléctrica, o de voltaje, cuando un interruptor se cierra instantáneamente.

(a) Dibuje la función de Heaviside.
(b) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ y se aplican instantáneamente 120 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$.
(c) Dibuje el voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 5$ segundos y se aplican de manera instantánea 240 volts al circuito. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$. (Note que partir de $t = 5$ corresponde a una traslación.)

58. La función de Heaviside que se definió en el ejercicio 57 puede utilizarse también para definir la **función rampa** $y = ctH(t)$, la cual representa un aumento gradual del voltaje o la corriente en un circuito.

(a) Dibuje la función rampa $y = tH(t)$.
(b) Dibuje el voltaje $V(t)$ en un circuito si el interruptor se cierra en el instante $t = 0$ y el voltaje se incrementa gradualmente hasta 120 volts durante un intervalo de 60 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$, para $t \leqslant 60$.
(c) Trace la gráfica del voltaje $V(t)$ en un circuito, si el interruptor se cierra en el instante $t = 7$ segundos y el voltaje se incrementa gradualmente hasta 100 volts durante un periodo de 25 segundos. Escriba una fórmula para $V(t)$ en términos de $H(t)$, para $t \leqslant 32$.

59. Sea f y g funciones lineales con ecuaciones $f(x) = m_1x + b_1$ y $g(x) = m_2x + b_2$. ¿También $f \circ g$ es una función lineal? Si es así, ¿cuál es la pendiente de su gráfica?

60. Si invierte x dolares al 4% de interés compuesto anual, por lo tanto la cantidad $A(x)$ de la inversios después de un año es $A(x) = 1.04x$. Hallar $A \circ A$, $A \circ A \circ A$, y $A \circ A \circ A \circ A$. ¿Qué representan estas composiciones? Encontrar una formula para la composición de n copias de A.

61. (a) Si $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Piense qué operaciones tendrá que efectuar en la formula para g para terminar por obtener la fórmula para h.)
(b) Si $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, encuentre una función g tal que $f \circ g = h$.

62. Si $f(x) = x + 4$ y $h(x) = 4x - 1$, encuentre una función tal que $g \circ f = h$.

63. (a) Supongo que f y g son funciones pares. ¿Que puede decir sobre $f + g$ y fg?
(b) ¿Que diría si f y g son impares?

64. Supongo que f es par y g es impar. ¿Que puede decir sobre fg?

65. Suponga que g es una función par y sea $h = f \circ g$. ¿h siempre es una función par?

66. Suponga que g es una función impar y sea $h = f \circ g$.¿Es h siempre una función impar? ¿Qué pasa si f es impar? ¿Qué pasa si f es par?

1.4 CALCULADORAS GRAFICADORAS Y COMPUTADORAS

En esta sección, se supondrá que tiene acceso a una calculadora graficadora o a una computadora con software para trazar gráficas. Se dará cuenta de que el uso de uno de esos aparatos le da capacidad para trazar gráficas de funciones más complicadas y resolver problemas más complejos de lo que sería posible de otra forma. También encontrará algunas de las dificultades que se pueden presentar con estas máquinas.

Ambos dispositivos pueden dar gráficas muy exactas de las funciones. Pero, en el capítulo 4, verá que sólo usando el cálculo puede estar seguro de haber descubierto todos los aspectos interesantes de una gráfica.

Una calculadora graficadora o una computadora presentan una parte rectangular de la gráfica de una función en una **ventana de visualización** o **pantalla**, a los cuales se hará refencia simplemente como **rectángulo de visualización**. La pantalla predeterminada a menudo da una imagen incompleta o engañosa, de modo que es importante elegir con cuidado el rectángulo de visualización. Si elige que los valores x varíen desde un valor mínimo de $Xmín = a$ hasta un valor máximo de $Xmáx = b$ y que los valores y varíen desde uno mínimo de $Ymín = c$ hasta uno máximo de $Ymáx = d$, entonces la parte visible de la gráfica se encuentra en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

que se muestra en la figura 1. A este espacio se le refiere como el *rectángulo de visualización* de $[a, b]$ *por* $[c, d]$.

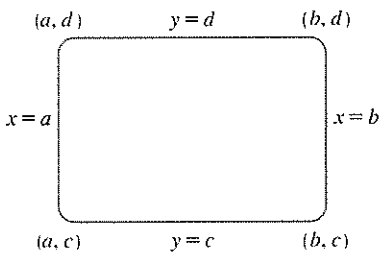


FIGURA 1
La pantalla de $[a, b]$ por $[c, d]$

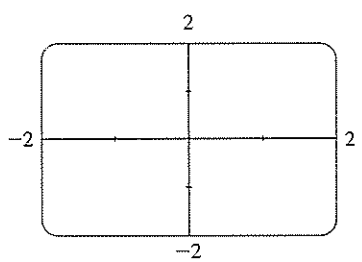
La máquina dibuja la gráfica de una función f de modo muy semejante a como usted lo haría. Sitúa los puntos de la forma $(x, f(x))$ para un cierto número de valores igualmente espaciados de x entre a y b. Si un valor x no está en el dominio de f o si $f(x)$ queda fuera el rectangulo de visualización, la máquina pasa al valor x siguiente. Une cada punto con el anterior para formar una representación de la gráfica de f.

EJEMPLO 1 Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 3$ en cada uno de los siguientes rectángulos de visualización.

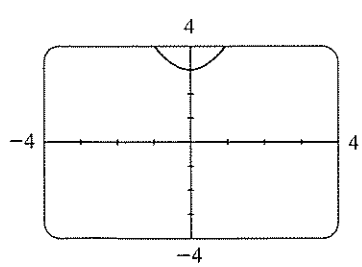
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$
(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ (d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

SOLUCIÓN Para el inciso (a), seleccione el intervalo al establecer $Xmín = -2$, $Xmáx = 2$, $Ymín = -2$ y $Ymáx = 2$. En la figura 2(a), aparece la gráfica resultante. ¡La pantalla está en blanco! Un momento de reflexión da la explicación: observe que $x^2 \geq 0$ para toda x, de modo que $x^2 + 3 \geq 3$ para toda x. Por lo tanto, el intervalo de la función $f(x) = x^2 + 3$ es $[3, \infty)$. Esto significa que la gráfica de f está por completo fuera de la pantalla $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

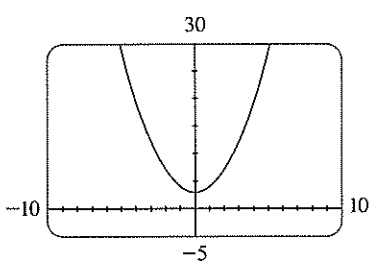
En la figura 2, también se muestran las gráficas para las pantallas de los incisos (b), (c) y (d). Observe que obtiene una imagen más completa en los incisos (c) y (d), pero en el inciso (d) no se ve con claridad que la intersección con el eje y es 3.



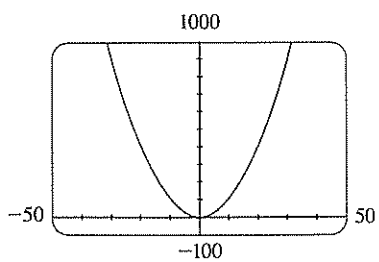
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$



(b) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$



(c) $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$



(d) $[-50, 50]$ por $[-100, 1000]$

FIGURA 2 Gráficas de $f(x) = x^2 + 3$

□

Con base en el ejemplo 1, la elección de un rectángulo de visualización puede dar lugar a una gran diferencia en el aspecto de una gráfica. A veces es necesario cambiar a un rectángulo de visualización más grande para obtener una imagen más global de la gráfica. Pero una pantalla demasiado grande también puede ser engañosa. En el ejemplo siguiente, el conocimiento del dominio y del intervalo de una función a veces proporciona información suficiente para seleccionar un buen rectángulo de visualización.

EJEMPLO 2 Determine un rectángulo de visualización apropiada para la función $f(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ y úsela para trazar la gráfica de f.

SOLUCIÓN La expresión para $f(x)$ está definida cuando

$$8 - 2x^2 \geqslant 0 \iff 2x^2 \leqslant 8 \iff x^2 \leqslant 4$$
$$\iff |x| \leqslant 2 \iff -2 \leqslant x \leqslant 2$$

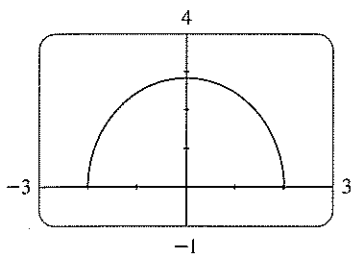


FIGURA 3

Debido a eso, el dominio de f es el intervalo $[-2, 2]$. Además,

$$0 \leqslant \sqrt{8 - 2x^2} \leqslant \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83$$

de modo que el alcance de f es el intervalo $[0, 2\sqrt{2}]$.

Elija el rectángulo de visualización de modo que el intervalo x sea algo mayor que el dominio y que el intervalo y sea mayor que el alcance. Si lo define en $[-3, 3]$ por $[-1, 4]$, obtiene la gráfica que se muestra en la figura 3. □

EJEMPLO 3 Dibuje la función $y = x^3 - 150x$.

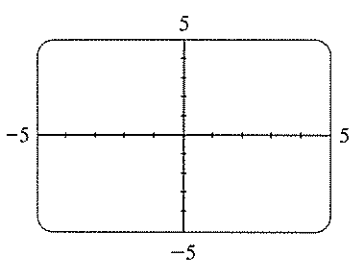
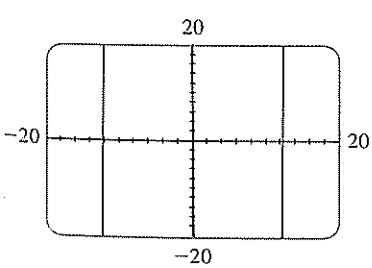


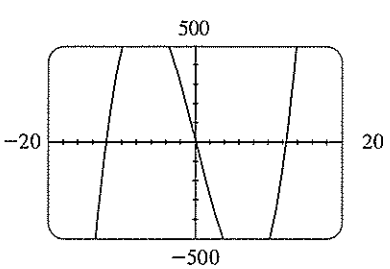
FIGURA 4

SOLUCIÓN En este caso, el dominio es $\mathbb{R}$, el conjunto de todos los números reales. Eso no ayuda a seleccionar un rectángulo de visualización. Experimente. Si empieza con el rectángulo de visualización $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$, obtiene la gráfica de la figura 4. Al parecer está en blanco, pero en realidad es casi tan vertical que se mezcla con el eje y.

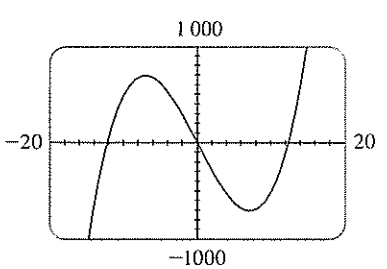
Si cambia el rectángulo de visualización a $[-20, 20]$ por $[-20, 20]$, obtiene la imagen que se muestra en la figura 5(a). La gráfica parece consistir en rectas verticales, pero sabe que no es correcto. Si mira con cuidado mientras se traza la gráfica, veá que ésta sale de la pantalla y vuelve a aparecer durante el proceso. Esto indica que necesita ver más en dirección vertical, de modo que cambie el rectángulo de visualización a $[-20, 20]$ por $[-500, 500]$. En la figura 5(b) aparece la gráfica resultante. Todavía no revela todas las características principales de la función, de modo que pruebe con $[-20, 20]$ por $[-1\,000, 1\,000]$ en la figura 5(c). Ahora tiene más confianza de contar con un rectángulo de visualización apropiada. En el capítulo 4 será capaz de ver que la gráfica que se muestra en la figura 5(c) revela todas las características principales de la función.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 5 $y = x^3 - 150x$

□

EJEMPLO 4 Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} 50x$ en un rectángulo de visualización apropiada.

SOLUCIÓN En la figura 6(a) se ilustra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando un rectángulo de visualización $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista, la gráfica parece ser razonable. Pero si cambia el rectángulo de visualización a las que se presentan en las siguientes partes de la figura 6, la gráfica se ve muy diferente. Algo extraño está pasando.

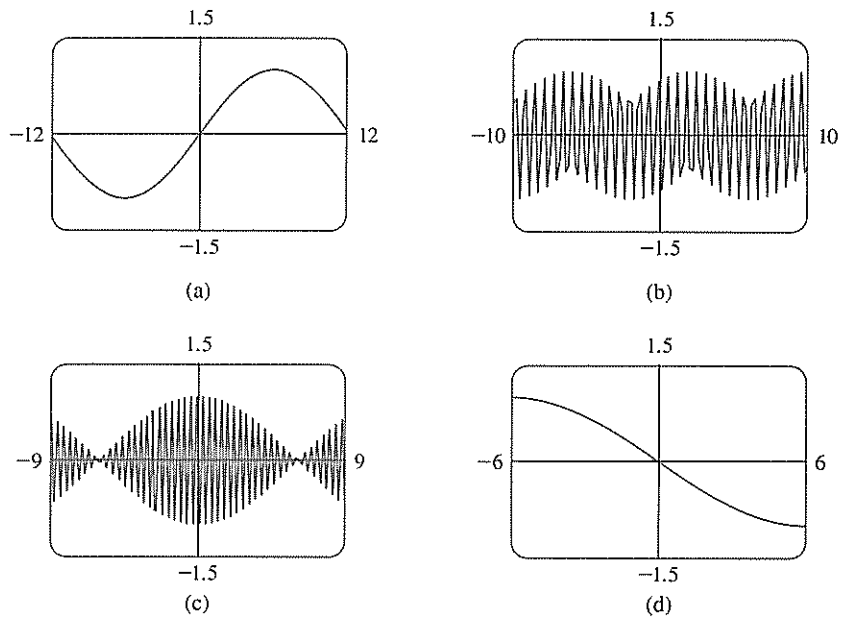


FIGURA 6
Gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} 50x$ en cuatro rectángulos de visualización

El aspecto de las gráficas de la figura 6 depende de la máquina que se use. Es posible que las gráficas que obtenga con su dispositivo graficador no se parezcan a estas figuras, pero también serán bastante inexactas.

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y hallar un rectángulo de visualización adecuado, necesita hallar el periodo de la función $y = \operatorname{sen} 50x$. Puntos que la función $y = \operatorname{sen} x$ tiene el periodo 2π, y la gráfica de $y = \operatorname{sen} 50x$ se comprime horizontalmente por un factor de 50, el periodo de $y = \operatorname{sen} 50x$ es

$$\frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que sólo debe tratar con valores pequeños de x con el fin de mostrar sólo unas cuantas oscilaciones de la gráfica. Si elige el rectángulo de visualización $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtiene la gráfica que se muestra en la figura 7.

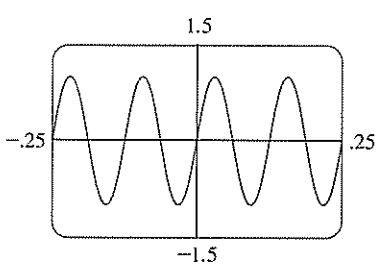


FIGURA 7
$f(x) = \operatorname{sen} 50x$

Ahora sabe en dónde estuvo el error en la figura 6. Las oscilaciones de $y = \operatorname{sen} 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora sitúa los puntos y los une, falla en la mayor parte de los puntos máximos y mínimos y, en consecuencia, da una impresión muy engañosa de la gráfica. □

Ha visto que el uso de un rectángulo de visualización inadecuado puede proporcionar una impresión engañosa de la gráfica de una función. En los ejemplos 1 y 3, resolvió el problema al cambiar a un rectángulo de visualización más grande. En el ejemplo 4, tuvo que reducirlo. En el ejemplo siguiente, verá una función para la que no existe un rectángulo de visualización sencilla que revele la verdadera forma de la gráfica.

EJEMPLO 5 Trace la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{100}\cos 100x$.

SOLUCIÓN En la figura 8 aparece la gráfica de f producida por una calculadora graficadora con el rectángulo de visualización $[-6.5, 6.5]$ por $[-1.5, 1.5]$. Se ve muy semejante a la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, pero con algunas protuberancias. Si realiza un acercamiento hacia el rectángulo de visualización $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.1]$, puede ver con mucho mayor claridad

http://libreria-universitaria.blogspot.com

la forma de las protuberancias de la figura 9. La razón de este comportamiento es que el segundo término, $\frac{1}{100}\cos 100x$, es muy pequeño en comparación con el primero, sen x. Así, en realidad necesita dos gráficas para ver la verdadera naturaleza de esta función.

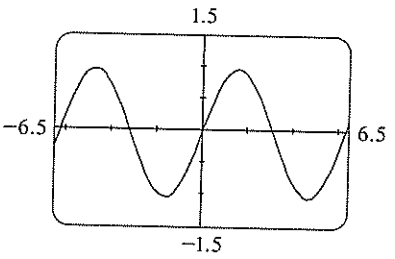


FIGURA 8

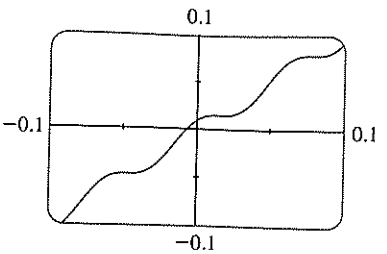
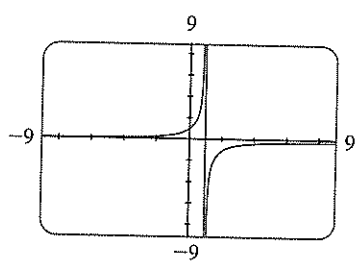


FIGURA 9 □

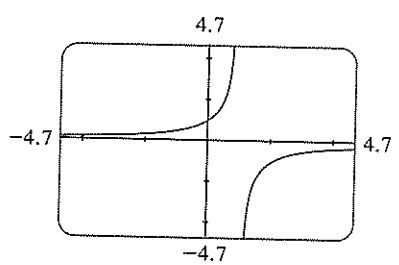
EJEMPLO 6 Dibuje la gráfica de la función $y = \dfrac{1}{1-x}$.

SOLUCIÓN En la figura 10(a) se ilustra la gráfica producida por una calculadora graficadora con el réctangulo de visualización $[-9, 9]$ por $[-9, 9]$. Al unir los puntos sucesivos de la gráfica, la calculadora produjo un segmento rectilíneo empinado de la parte superior a la inferior de la pantalla. Ese segmento rectilíneo en verdad no es parte de la gráfica. Note que el dominio de la función $y = 1/(1-x)$ es $\{x \mid x \neq 1\}$. Puede eliminar la extraña recta casi vertical experimentando con un cambio de escala. Cuando cambia al rectángulo de visualización más pequeño $[-4.7, 4.7]$ por $[-4.7, 4.7]$, en esta calculadora en particular, obtiene la gráfica mucho mejor que aparece en la figura 10(b).

▩ Otra forma de evitar la recta extraña es cambiar el modo de trazar las gráficas en la calculadora, de manera tal que los puntos no se unan.



(a)



(b)

FIGURA 10

EJEMPLO 7 Trace la gráfica de la función $y = \sqrt[3]{x}$.

SOLUCIÓN Algunos dispositivos graficadores despliegan la gráfica como en la figura 11, en tanto que otros producen una gráfica como la de la figura 12. Por lo que se vio en la sección 1.2 (figura 13), sabe que la gráfica de la figura 12 es la correcta; de esa manera, ¿qué sucedió en la figura 11? La explicación es que, algunas máquinas, calculan la raíz cúbica de x utilizando un logaritmo, en el cual no está definido si x es negativa, así que sólo se produce la mitad derecha de la gráfica.

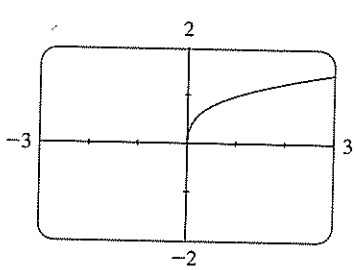


FIGURA 11

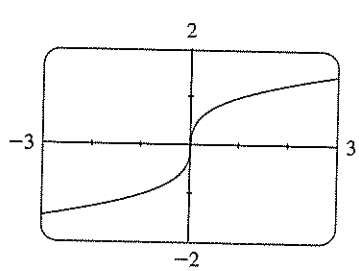


FIGURA 12

Usted debe experimentar con su máquina para ver cuál de estas dos gráficas se produce. Si obtiene la de la figura 11, puede obtener la imagen correcta al trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \cdot |x|^{1/3}$$

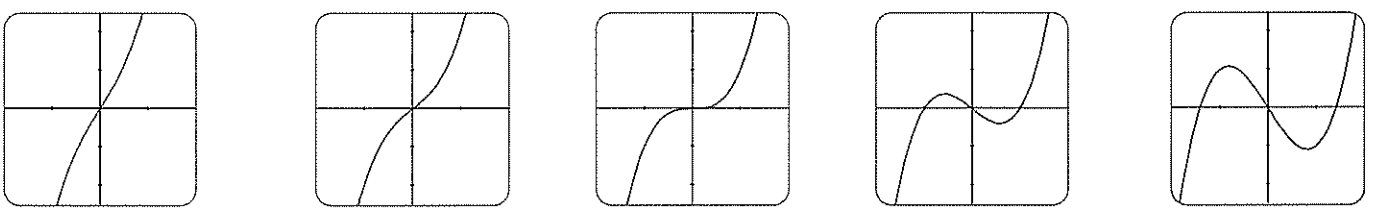
Note que esta función es igual a $\sqrt[3]{x}$, excepto cuando $x = 0$. □

Para comprender cómo se relaciona la expresión de una función con su gráfica, ayuda trazar la gráfica de una **familia de funciones**; es decir, una colección de funciones cuyas ecuaciones están relacionadas. En el ejemplo siguiente, se trazan las gráficas de los miembros de una familia de polinomios.

EJEMPLO 8 Dibuje $y = x^3 + cx$ para varios valores del número c. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar c?

SOLUCIÓN En la figura 13 se muestran las gráficas de $y = x^3 + cx$ para $c = 2$, 1, 0, -1 y -2, para valores positivos de c, la gráfica crece de izquierda a derecha sin puntos máximos ni mínimos (picos o valles). Cuando $c = 0$, la curva es plana en el origen. Cuando c es negativo, la gráfica tiene un punto máximo y uno mínimo. Conforme c disminuye, el punto máximo se vuelve más alto y el mínimo, más bajo.

TEC En Visual 1.4 puede ver una animación de la figura 13



(a) $y = x^3 + 2x$ (b) $y = x^3 + x$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^3 - x$ (e) $y = x^3 - 2x$

FIGURA 13
Varios miembros de la familia de funciones $y = x^3 + cx$, se grafican todas en el rectángulo de visualización $[-2, 2]$ por $[-2.5, 2.5]$

□

EJEMPLO 9 Encuentre la solución de la ecuación $\cos x = x$ correcta hasta dos cifras decimales.

SOLUCIÓN Las soluciones de la ecuación $\cos x = x$ son las coordenadas x de los puntos de intersección de las curvas $y = \cos x$ y $y = x$. En la figura 14(a), se ve que sólo existe una solución y que se encuentra entre 0 y 1. Si se hace un acercamiento al rectángulo de visualización $[0, 1]$ por $[0, 1]$, en la figura 14(b) se observa que la raíz está entre 0.7 y 0.8. De modo que al acercarse más hasta el rectángulo de visualización $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ de la figura 14(c). Si mueve el cursor hasta el punto de intersección de las dos curvas, o por inspección y con base en que la escala x es 0.01, verá que la raíz de la ecuación es casi de 0.74. (Muchas calculadoras tienen una capacidad de intersección integrada.)

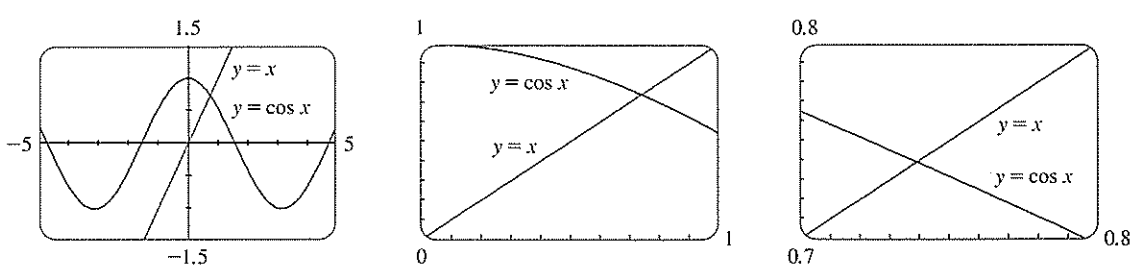


FIGURA 14
Localización de las raíces de $\cos x = x$

(a) $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$ escala-$x = 1$ (b) $[0, 1]$ por $[0, 1]$ escala-$x = 0.1$ (c) $[0.7, 0.8]$ por $[0.7, 0.8]$ escala-$x = 0.01$ □

1.4 EJERCICIOS

1. Mediante una calculadora que grafique o una computadora determine cuál de los rectángulos de visualización da lugar a la gráfica más adecuada de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$.
   (a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$ (b) $[0, 10]$ por $[0, 2]$
   (c) $[0, 10]$ por $[0, 10]$

2. Por medio de una calculadora que grafique o una computadora determine cuál de los rectángulos de visualización origina la gráfica más adecuada de la función $f(x) = x^4 - 16x^2 + 20$.
   (a) $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$ (b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
   (c) $[-50, 50]$ por $[-50, 50]$ (d) $[-5, 5]$ por $[-50, 50]$

3–14 Determine un rectángulo de visualización adecuado para la función que se proporciona y úsela para dibujar la gráfica

3. $f(x) = 5 + 20x - x^2$
4. $f(x) = x^3 + 30x^2 + 200x$
5. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$
6. $f(x) = \sqrt{0.1x + 20}$
7. $f(x) = x^3 - 225x$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 100}$
9. $f(x) = \operatorname{sen}^2(1000x)$
10. $f(x) = \cos(0.001x)$
11. $f(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$
12. $f(x) = \sec(20\pi x)$
13. $y = 10 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 100x$
14. $y = x^2 + 0.002 \operatorname{sen} 50x$

15. Dibuje la elipse $4x^2 + 2y^2 = 1$, al trazar las funciones cuyas gráficas son las mitades superior e inferior de la elipse.

16. Dibuje la hipérbola $y^2 - 9x^2 = 1$ dibujando las funciones cuyas gráficas son las ramas superior e inferior de la hipérbola.

17–18 ¿Los dibujos cruzan en el rectángulo de visualización que se proporciona? Si es así, ¿cuántos puntos de intersección están ahí?.

17. $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0.23x - 2.25$; $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$

18. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

19–21 Encuentre todas las soluciones de la ecuación correcta hasta dos cifras decimales.

19. $x^3 - 9x^2 - 4 = 0$
20. $x^3 = 4x - 1$
21. $x^2 = \operatorname{sen} x$

22. En el ejemplo 9 se vio que la ecuación $\cos x = x$ tiene una solución.
   (a) Use una gráfica para demostrar que la ecuación $\cos x = 0.3x$ tiene tres soluciones y encuentre sus valores correctos hasta dos cifras decimales.
   (b) Encuentre un valor aproximado de m tal que la ecuación $\cos x = mx$ tiene dos soluciones.

23. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = 10x^2$ y $g(x) = x^3/10$ será mayor en algún momento (es decir, mayor cuando x es muy grande).

24. Use gráficas para determinar cuál de las funciones $f(x) = x^4 - 100x^3$ y $g(x) = x^3$ termina por ser mayor.

25. ¿Para cuáles valores de x se cumple que $|\operatorname{sen} x - x| < 0.1$?

26. Trace las gráficas de los polinomios $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ y $Q(x) = 3x^5$ en la misma pantalla, usando en primer lugar el rectángulo de visualización $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ y luego cambie al $[-10, 10]$ por $[-10000, 10000]$. ¿Qué observa a partir de estas gráficas?

27. En este ejercicio se considera la familia de las funciones $f(x) = \sqrt[n]{x}$, en donde n es un entero positivo.
   (a) Trace las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[6]{x}$ en la misma pantalla $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$.
   (b) Trace las gráficas de las funciones $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla, $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$. (Véase el ejemplo 7.)
   (c) Trace las gráficas de las funciones $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$ y $y = \sqrt[5]{x}$ en la misma pantalla $[-1, 3]$ por $[-1, 2]$.
   (d) ¿A qué conclusiones puede llegar a partir de estas gráficas?

28. En este ejercicio se considera la familia de funciones $f(x) = 1/x^n$, en donde n es un entero positivo.
   (a) Trace las gráficas de las funciones $y = 1/x$ y $y = 1/x^3$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$.
   (b) Trace las gráficas de las funciones $y = 1/x^2$ y $y = 1/x^4$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización del inciso (a).
   (c) Trace la gráfica de todas las funciones de los incisos (a) y (b) en la misma pantalla usando el rectángulo de visualización $[-1, 3]$ por $[-1, 3]$.
   (d) ¿A qué conclusiones puede llegar a partir de estas gráficas?

29. Dibuje la función $f(x) = x^4 + cx + x$, para varios valores de c. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar c?

30. Trace la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$, para diferentes valores de c. Describa cómo influye en la gráfica el valor de c variable.

31. Trace la gráfica de la función $y = x^n 2^{-x}$, $x \geq 0$, para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Cómo cambia la gráfica al crecer n?

32. Las curvas con ecuaciones

$$y = \frac{|x|}{\sqrt{c - x^2}}$$

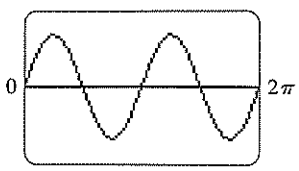
se llaman **curvas de nariz de bala**. Dibuje algunas para ver por qué este nombre. ¿Qué sucede al crecer c?

33. ¿Qué sucede a la gráfica de la ecuación $y^2 = cx^3 + x^2$ a medida que c varía?

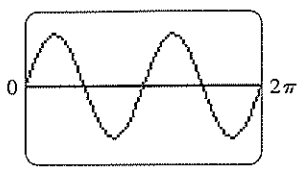
34. En este ejercicio se examina el efecto de la función interior g sobre una función compuesta $y = f(g(x))$.
   (a) Trace la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$, usando el rectángulo de visualización $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Qué diferencia existe entre esta gráfica y la de la función seno?

(b) Trace la gráfica de la función $y = \text{sen}\,(x^2)$ usando el rectángulo de visualización $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Qué diferencia existe entre esta gráfica y la de la función seno?

35. La figura muestra las gráficas de $y = \text{sen}\,96x$ y $y = \text{sen}\,2x$ según la exhibe una calculadora graficadora TI-83.



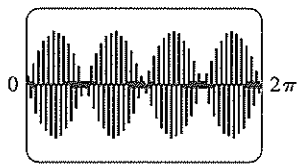
$y = \text{sen}\,96x$

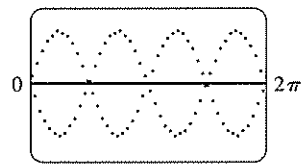


$y = \text{sen}\,2x$

La primera gráfica es inexacta. Explique por qué las dos gráficas parecen ser idénticas. [*Sugerencia:* La ventana de graficación de la TI-83 tiene 95 pixeles de ancho.] ¿Qué puntos específicos dibuja la calculadora?

36. La primera gráfica que aparece en la figura es la de $y = \text{sen}\,45x$ según la exhibe una calculadora graficadora TI-83. Es inexacta y por eso, para ayudar a explicar su aspecto en la segunda gráfica se traza la curva de nuevo en la modalidad de puntos.





¿Qué dos curvas seno parece estar graficando la calculadora? Demuestre que cada punto sobre la gráfica de $y = \text{sen}\,45x$ que la TI-83 decide dibujar se encuentra de hecho sobre una de estas dos curvas. (La ventana de graficación de la TI-83 tiene 95 pixeles de ancho.)

1.5 FUNCIONES EXPONENCIALES

La función $f(x) = 2^x$ se denomina *función exponencial* porque la variable, x, es el exponente. No debe confundirse con la función potencia $g(x) = x^2$ en la cual la variable es la base.

En general, una **función exponencial** es una función de la forma

$$f(x) = a^x$$

donde a es una constante positiva. Cabe recordar qué significa esto.

Si $x = n$, un entero positivo, entonces

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

Si $x = 0$, en tal caso $a^0 = 1$, y si $x = -n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Si x es un número racional, $x = p/q$, donde p y q son enteros positivos y $q > 0$, por lo tanto

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$$

Pero ¿cuál es el significado de a^x si x es un número irracional? ¿Qué quiere decir, por ejemplo, $2^{\sqrt{3}}$ o 5^π?

Para ayudar a responder esta pregunta primero se ve la gráfica de la función $y = 2^x$, donde x es racional. La figura 1 ilustra una representación de esta gráfica. Cabe ampliar el dominio de $y = 2^x$ para incluir números tanto racionales como irracionales.

En la gráfica de la figura 1 hay huecos que corresponden a valores irracionales de x. Cabe llenar los huecos definiendo $f(x) = 2^x$ donde $x \in \mathbb{R}$, de modo que f es una función que se incrementa. En particular, debido a que el número irracional $\sqrt{3}$ satisface

$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

■ En el apéndice G aparece un planteamiento alterno para las funciones exponencial y logarítmica empleando cálculo integral.

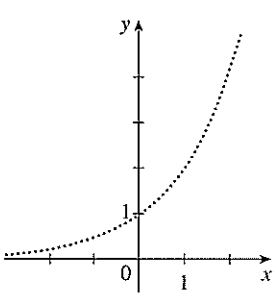


FIGURA 1
Representación de x racional $y = 2^x$

debe tener

$$2^{1.7} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.8}$$

y sabe qué significa $2^{1.7}$ y $2^{1.8}$ porque 1.7 y 1.8 son números racionales. De manera análoga, si usa mejores aproximaciones para $\sqrt{3}$, obtiene mejores aproximaciones para $2^{\sqrt{3}}$:

$$\begin{aligned}
1.73 < \sqrt{3} < 1.74 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.73} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.74} \\
1.732 < \sqrt{3} < 1.733 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.732} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.733} \\
1.7320 < \sqrt{3} < 1.7321 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.7320} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.7321} \\
1.73205 < \sqrt{3} < 1.73206 \quad &\Rightarrow \quad 2^{1.73205} < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1.73206} \\
\vdots \qquad\qquad\quad &\qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

Es posible demostrar que existe exactamente un número que es mayor que todos los números

$$2^{1.7}, \quad 2^{1.73}, \quad 2^{1.732}, \quad 2^{1.7320}, \quad 2^{1.73205}, \quad \ldots$$

y menor que todos los números

$$2^{1.8}, \quad 2^{1.74}, \quad 2^{1.733}, \quad 2^{1.7321}, \quad 2^{1.73206}, \quad \ldots$$

Defina $2^{\sqrt{3}}$ como este número. Al utilizar el proceso de aproximación anterior puede calcularlo correcto hasta seis cifras decimales

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3.321997$$

De manera análoga, puede definir 2^x (o a^x, si $a > 0$) donde x es cualquier número irracional. La figura 2 muestra cómo se llenaron todos los huecos en la figura 1 para completar la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$.

En la figura 3 se muestran las gráficas de los miembros de la familia de funciones $y = a^x$ para distintos valores de la base a. Observe que todas estas gráficas pasan por el mismo punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Note asimismo que a medida que aumenta la base a, se incrementa más rápido la función exponencial (para $x > 0$).

■ Una prueba de este hecho se proporciona en J. Marsden y A. Weinstein, *Calculus Unlimited* (Menlo Park, CA: Benjamin/Cummings, 1981.) Para una versión en línea, vease

www.cds.caltech.edu/~marsden/volume/cu/CU.pdf

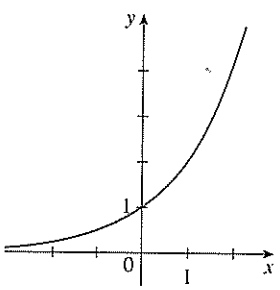


FIGURA 2
$y = 2^x$, real

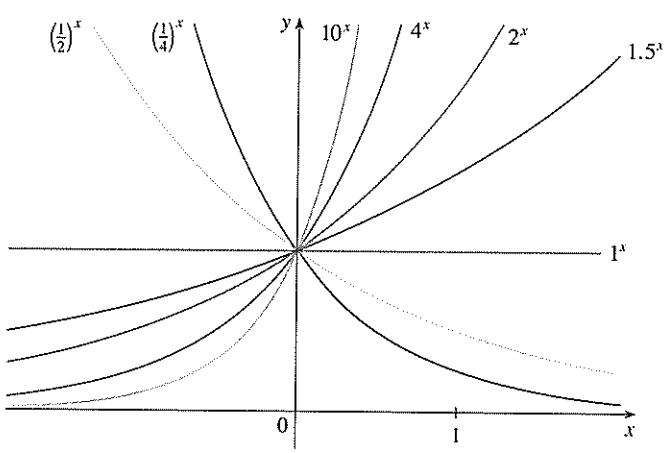


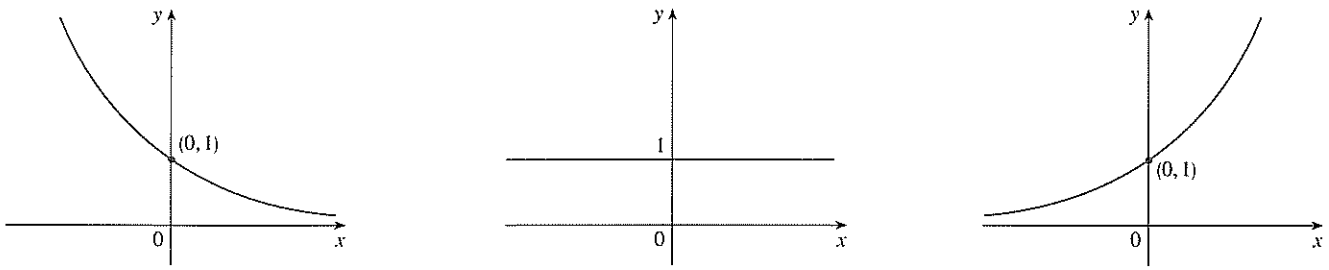
FIGURA 3

■ Si $0 < a < 1$, después a^x se aproxima a 0 conforme x aumenta. Si $a > 1$, entonces a^x se aproxima a 0 a medida que x disminuye a través de valores negativos. En ambos casos el eje x es una asíntota horizontal. Estos aspectos se analizan en la sección 2.6.

De la figura 3 puede verse que básicamente existen tres tipos de funciones exponenciales $y = a^x$. Si $0 < a < 1$, disminuye la función exponencial; si $a = 1$, es una constante, y si $a > 1$, se incrementa. Estos tres casos se ilustran en la figura 4. Observe que si $a \neq 1$,

http://libreria-universitaria.blogspot.com

entonces la función exponencial $y = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Observe asimismo que, puesto que $(1/a)^x = 1/a^x = a^{-x}$, la gráfica de $y = (1/a)^x$ es sólo el reflejo de $y = a^x$ con respecto al eje y.



(a) $y = a^x$, $0 < a < 1$ (b) $y = 1^x$ (c) $y = a^x$, $a > 1$

FIGURA 4

En las propiedades siguientes se encuentra un motivo de la importancia de la función exponencial. Si x y y son números racionales, entonces a partir del álgebra elemental se conocen bien estas leyes. Es posible probar que siguen siendo verdaderas para números arbitrarios reales x y y. (Vease apéndice G).

www.stewartcalculus.com Para revisar y practicar las leyes de exponentes, oprima en *Review of Algebra*

LEY DE LOS EXPONENTES Si a y b son números positivos y x y y son cualquier número real, en tal caso

1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$ **3.** $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

EJEMPLO 1 Trace la gráfica de la función $y = 3 - 2^x$ y determine su dominio y su intervalo.

Para un repaso de reflexión y desplazamiento de gráficas, vea la sección 1.3.

SOLUCIÓN Primero se refleja la gráfica de $y = 2^x$ [que se ilustra en la figura 5(a)] con respecto al eje x para obtener la gráfica de $y = -2^x$ de la figura 5(b). Luego desplace la gráfica de $y = -2^x$ tres unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = 3 - 2^x$ que aparece en la figura 5(c). El dominio es $\mathbb{R}$ y el intervalo $(-\infty, 3)$.

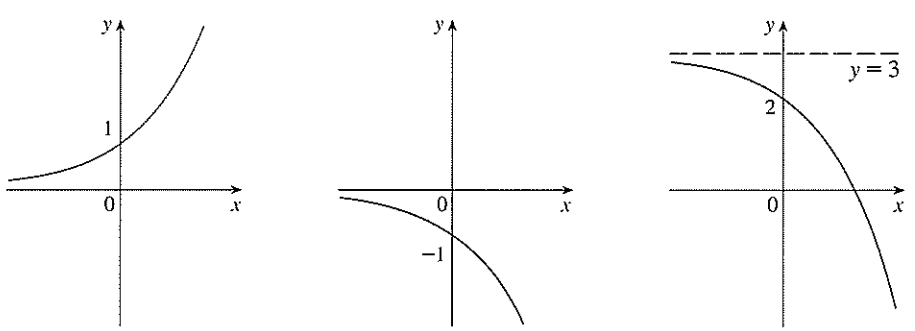


FIGURA 5 (a) $y = 2^x$ (b) $y = -2^x$ (c) $y = 3 - 2^x$ □

EJEMPLO 2 Mediante un dispositivo graficador, compare la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función potencia $g(x) = x^2$. ¿Cuál función aumenta más rápido cuando x es grande?

SOLUCIÓN La figura 6 muestra ambas funciones trazadas en el rectángulo de visualización $[-2, 6]$ por $[0, 40]$. Observe que las gráficas se intersecan tres veces, pero para $x > 4$ la

gráfica de $f(x) = 2x$ permanece por arriba de la gráfica de $g(x) = x^2$. La figura 7 proporciona una visión más global y denota que para valores grandes de x, la función exponencial $y = 2^x$ aumenta mucho más rápido que la función potencia $y = x^2$.

■ El ejemplo 2 muestra que $y = 2^x$ aumenta con mayor rapidez que $y = x^2$. Para demostrar qué tan rápido aumenta $f(x) = 2^x$, efectúe el experimento de pensamiento siguiente. Suponga que empieza con un trozo de papel de un milésimo de pulgada de espesor y lo dobla a la mitad 50 veces. Cada vez que dobla el papel a la mitad, el espesor se duplica, por lo tanto el espesor del trozo resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿Qué tan grueso cree usted que es? Resulta ser ¡más de 17 millones de millas!

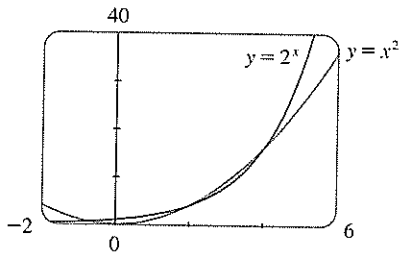


FIGURA 6

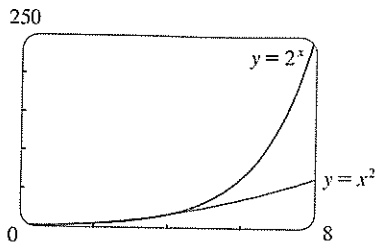


FIGURA 7

□

APLICACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial se suscita muy a menudo en los modelos matemáticos de la naturaleza y la sociedad. A continuación se indica brevemente cómo surge en la descripción de crecimiento de la población. En el capítulo 1.3 se abordarán éstas y otras aplicaciones con mayor detalle.

En primer lugar, considere una población de bacterias en un medio nutriente homogéneo. Suponga que al muestrear la población a ciertos intervalos se determina que la población se duplica cada hora. Si el número de bacterias en el tiempo t es $p(t)$, donde t se mide en horas, y la población inicial es $p(0) = 1000$, tiene en tal caso

$$p(1) = 2p(0) = 2 \times 1000$$
$$p(2) = 2p(1) = 2^2 \times 1000$$
$$p(3) = 2p(2) = 2^3 \times 1000$$

A partir de este patrón parece ser que, en términos generales,

$$p(t) = 2^t \times 1000 = (1000)2^t$$

Esta función de población es un múltiplo constante de la función exponencial $y = 2^t$, de modo que manifiesta el crecimiento rápido que observa en las figuras 2 y 7. En condiciones ideales (espacio ilimitado así como nutrición y libertad de enfermedades) este crecimiento exponencial es típico de lo que ocurre en realidad en la naturaleza.

¿Qué sucede con la población humana? La tabla 1 muestra datos respecto de la población del mundo en el siglo XX y la figura 8 ilustra la gráfica de dispersión correspondiente.

TABLA 1

Año	Población (millones)
1900	1 650
1910	1 750
1920	1 860
1930	2 070
1940	2 300
1950	2 560
1960	3 040
1970	3 710
1980	4 450
1990	5 280
2000	6 080

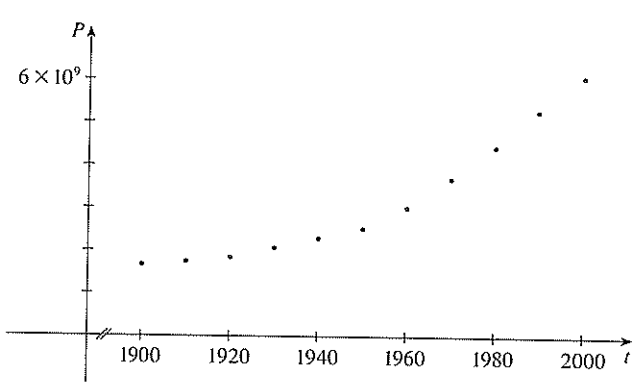


FIGURA 8 Gráfica de dispersión para el crecimiento de la población en el mundo

El patrón de los puntos de información que aparece en la figura 8 sugiere crecimiento exponencial, por eso es conveniente usar una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para aplicar el método de mínimos cuadrados y obtener el modelo exponencial

$$P = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t$$

La figura 9 muestra la gráfica de esta función exponencial con los puntos de información originales. Observe que la curva exponencial coincide razonablemente bien con los datos. El periodo de crecimiento relativamente lento de la población se explica mediante las dos guerras mundiales y la Gran Depresión ocurrida en la década de los trienta.

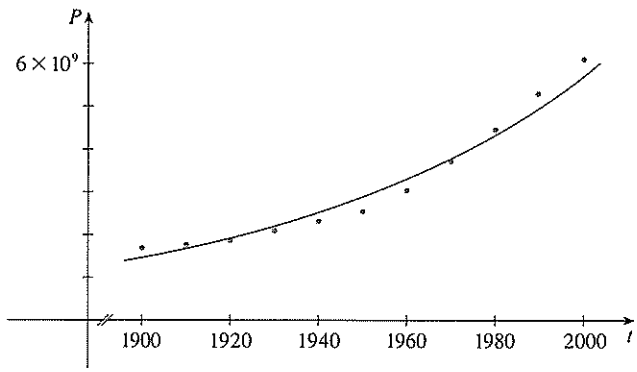


FIGURA 9
Modelo exponencial para crecimiento de la población

EL NÚMERO *e*

De todas las bases posibles para una función exponencial, existe una que es más conveniente para los propósitos del cálculo. La elección de una base a se ve influida por la manera en que la gráfica de $y = a^x$ cruza el eje y. Las figuras 10 y 11 muestran las líneas tangentes a las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en el punto (0, 1). (Las líneas tangentes se definirán con precisión en la sección 2.7. Para los propósitos actuales, puede imaginarse la línea tangente a una gráfica exponencial en un punto como la recta que toca la gráfica sólo en ese punto.) Si mide las pendientes de estas rectas tangentes en (0, 1), encontrará que $m \approx 0.7$ para $y = 2^x$ y $m \approx 1.1$ para $y = 3^x$.

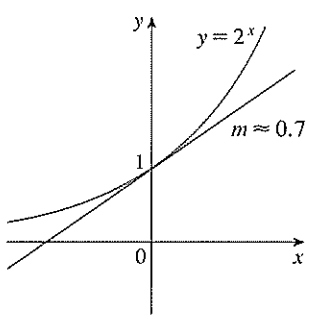


FIGURA 10

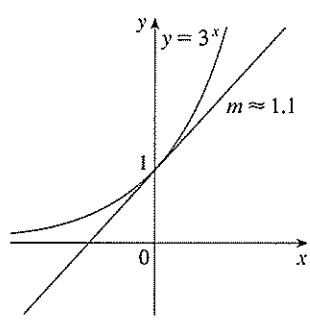


FIGURA 11

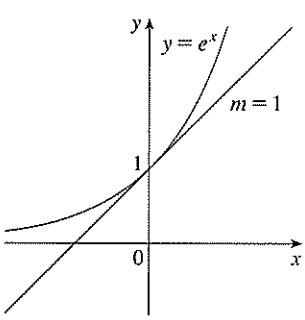


FIGURA 12
La función exponencial natural cruza el eje y con una pendiente de 1

Como verá en el capítulo 3, resulta que algunas de las fórmulas del cálculo se simplificarán en gran medida si elige la base a de manera que la pendiente de la línea tangente a $y = a^x$ en (0, 1) sea *exactamente* 1 (véase la figura 12). De hecho, *existe* tal número y es denotado por la letra e. (Esta notación la escogió el matemático suizo Leonhard Euler en 1727, probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.) En vista de las figuras 10 y 11, no causa sorpresa alguna que el número e se encuentre entre 2 y 3 y la gráfica de $y = e^x$ entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$. (Véase la figura 13.) En el capítulo 3 verá que el valor de e, correcto hasta cinco lugares decimales, es

$$e \approx 2.71828$$

TEC Module 1.5 le permite graficar funciones exponenciales con varias bases y con sus líneas tangentes, a fin de estimar en forma más aproximada el valor de a para el cual la tangente tiene la pendiente 1.

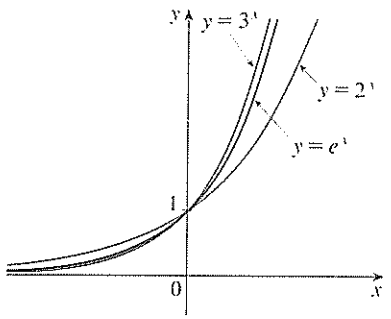
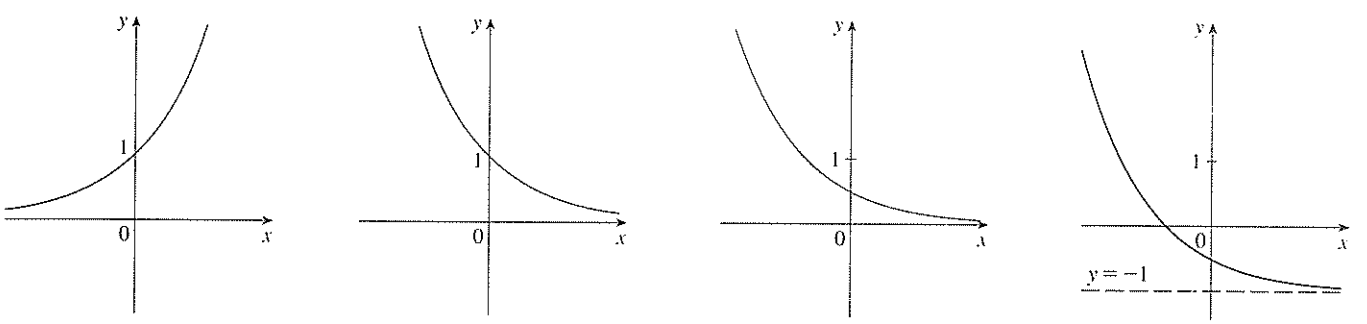


FIGURA 13

EJEMPLO 3 Dibuje la función $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$ y determine el dominio y el rango.

SOLUCIÓN Empiece por la gráfica de $y = e^x$ de las figuras 12 y 14(a) y refleje con respecto al eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ en la figura 14(b). (Note que la gráfica cruza el eje y con una pendiente de -1.) Luego comprima la gráfica verticalmente por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en la figura 14(c). Por último, desplace la gráfica una unidad hacia abajo para obtener la gráfica deseada en la figura 14(d). El dominio es $\mathbb{R}$ y el rango es $(-1, \infty)$.



(a) $y = e^x$ (b) $y = e^{-x}$ (c) $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ (d) $y = \frac{1}{2}e^{-x} - 1$

FIGURA 14

□

¿Qué tanto cree usted que tenga que ir hacia la derecha para que la altura de la gráfica de $y = e^x$ exceda de un millón? El ejemplo siguiente demuestra el crecimiento rápido de esta función al proporcionar una respuesta que quizás le sorprenda.

EJEMPLO 4 Use un dispositivo graficador para hallar los valores de x para los cuales $e^x > 1\,000\,000$.

SOLUCIÓN En la figura 15 aparece tanto la función $y = e^x$ como la línea horizontal $y = 1\,000\,000$. Estas curvas se intersecan cuando $x \approx 13.8$. Así, $e^x > 10^6$ cuando $x > 13.8$. Tal vez le sorprenda que los valores de la función exponencial ya hayan rebasado un millón cuando x es sólo 14.

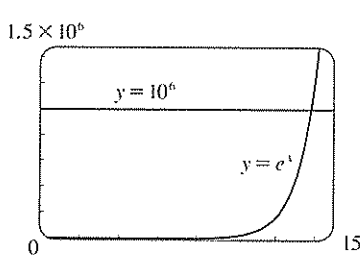


FIGURA 15

□

1.5 EJERCICIOS

1. (a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base $a > 0$.

(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?

(c) Si $a \neq 1$, ¿cuál es el intervalo de esta función?

(d) Trace la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada uno de los casos siguientes.

(i) $a > 1$ (ii) $a = 1$ (iii) $0 < a < 1$

2. (a) ¿Cómo se define el número e?

(b))¿Cuál es un valor aproximado para e?

(c) ¿Cuál es la función exponencial natural?

3–6 Dibuje las funciones que se proporcionan sobre una pantalla común. ¿Cómo se relacionan estas gráficas?

3. $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$

4. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$

5. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

6. $y = 0.9^x$, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

7–12 Realice un boceto de la gráfica de la función. No utilice calculadora. Sólo use las gráficas de las figuras 3 y 12 y, si es necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

7. $y = 4^x - 3$

8. $y = 4^{x-3}$

9. $y = -2^{-x}$

10. $y = 1 + 2e^x$

11. $y = 1 - \frac{1}{2}e^{-x}$

12. $y = 2(1 - e^{-x})$

13. Comenzando por la gráfica de $y = e^x$, escriba la ecuación de la gráfica que resulta de

(a) desplazarse 2 unidades hacia abajo

(b) desplazarse 2 unidades hacia la derecha

(c) reflejar respecto al eje x

(d) reflejar respecto al eje y

(e) reflejar respecto al eje x y a continuación al eje y

14. Empezando por la gráfica de $y = e^x$, encuentre la ecuación de la gráfica resultante de

(a) reflejar respecto a la recta $y = 4$

(b) reflejar respecto a la línea $x = 2$

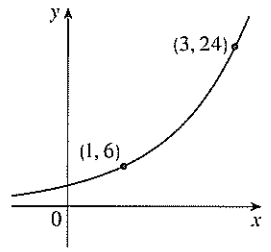
15–16 Encuentre el dominio de cada función.

15. (a) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - e^x}$

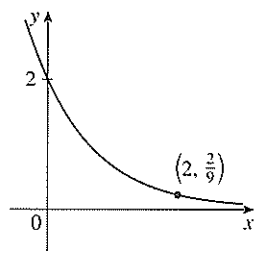
16. (a) $g(t) = \operatorname{sen}(e^{-t})$ (b) $g(t) = \sqrt{1 - 2^t}$

17–18 Encuentre la función exponencial $f(x) = Ca^x$ cuya gráfica se proporciona.

17.



18.



19. Si $f(x) = 5^x$, demuestre que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 5^x\left(\frac{5^h - 1}{h}\right)$$

20. Suponga que le ofrecen un trabajo que dura un mes. ¿Cuál de los métodos de pago siguientes prefiere?

I. Un millón al mes.

II. Un centavo el primer día del mes. Dos centavos el segundo día, cuatro centavos el tercero y, en general, 2^{n-1} centavos el n-ésimo día.

21. Suponga que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2^x$ se dibujan sobre una plantilla de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada. Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica de f es 48 pies pero la altura de la gráfica es alrededor de 265 mi.

22. Compare las funciones $f(x) = x^5$ y $g(x) = 5^x$ al trazar ambas en varios rectángulos de visualización. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas corregidos a un solo lugar decimal. ¿Qué función crece más rápidamente cuando x es grande?

23. Compare las funciones $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = e^x$ trazando tanto f como g en varios rectángulos de visualización. ¿Cuándo rebasa finalmente la gráfica de g la gráfica de f?

24. Utilice una gráfica para estimar los valores de x tales que $e^x > 1\,000\,000\,000$.

http://libreria-universitaria.blogspot.com

25. Se sabe que en condiciones ideales cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Suponga que al principio hay 100 bacterias.
(a) ¿Cuál es el tamaño de la población después de 15 horas?
(b) ¿Cuál es el tamaño de la población después de t horas?
(c) Estime el tamaño de la población después de 20 horas.
(d) Dibuje la función de población y estime el tiempo que se requiere para que la población llegue a 50 000.

26. Un cultivo de bacterias inicia con 500 baterias y duplica su tamaño cada media hora..
(a) ¿Cuántas bacterias existen después de 3 horas?
(b) ¿Cuántas bacterias existen después de t horas?
(c) ¿Cuantas baterias existen después de 40 minutos?
(d) Grafique la función población y estime el tiempo para que la población alcance 100 000.

27. Use una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para modelar la población del mundo con la información de 1950 a 2000 que aparecen en la tabla 1 en la página 55. Recurra al modelo para estimar la población en el año 1993 y predecirla en el año 2010.

28. La tabla siguiente presenta la población de Estados Unidos, en millones, para los años 1900 a 2000. Use una calculadora graficadora con capacidad de regresión exponencial para modelar la población de Estados Unidos desde 1900. Use el modelo para estimar la población en el año 1925 y predecirla en el 2010 y el 2020.

Año	Población	Año	Población
1900	76	1960	179
1910	92	1970	203
1920	106	1980	227
1930	123	1990	250
1940	131	2000	281
1950	150		

29. Si gráfica la función

$$f(x) = \frac{1 - e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$$

verá que f parece una función impar. Demuéstrelo

30. Dibuje diferentes grupos de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{1}{1 + ae^{bx}}$$

donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la gráfica cuando b cambia? ¿Cómo cambia cuando a cambia?

1.6 FUNCIONES INVERSAS Y LOGARITMOS

La tabla 1 proporciona información de un experimento en el cual un cultivo de bacterias se inició con 100 bacterias en un medio nutriente limitado; el tamaño de la población de bacterias se registró a intervalos de horas. El número de bacterias N es una función del tiempo t: $N = f(t)$.

Sin embargo, suponga que la bióloga modifica su punto de vista y se interesa en el tiempo que se requiere para que la población alcance diversos niveles. En otras palabras, ella considera a t como una función de N. A esta función se le llama *función inversa* de f, denotada por f^{-1}, y se lee "f inversa". De esta manera, $t = f^{-1}(N)$ es el tiempo que se requiere para que el nivel de la población llegue a N. Los valores de f^{-1} pueden encontrarse leyendo la tabla 1 de derecha a izquierda o bien consultando la tabla 2. Por ejemplo, $f^{-1}(550) = 6$ porque $f(6) = 550$.

TABLA 1 N como una función de t

t (horas)	$N = f(t)$ = población en el tiempo t
0	100
1	168
2	259
3	358
4	445
5	509
6	550
7	573
8	586

TABLA 2 t como función de N

N	$t = f^{-1}(N)$ = tiempo para llegar a N bacterias
100	0
168	1
259	2
358	3
445	4
509	5
550	6
573	7
586	8

No todas las funciones poseen inversas. Compare las funciones f y g cuyos diagramas de flechas se muestran en la figura 1. Observe que f nunca adopta el mismo valor dos veces (dos entradas cualesquiera en A tienen salidas diferentes), en tanto que g adopta el mismo valor dos veces (tanto 2 como 3 tienen la misma salida, 4).
En símbolos,

$$g(2) = g(3)$$

pero $$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Las funciones que comparten esta función con f se llaman *funciones uno a uno.*

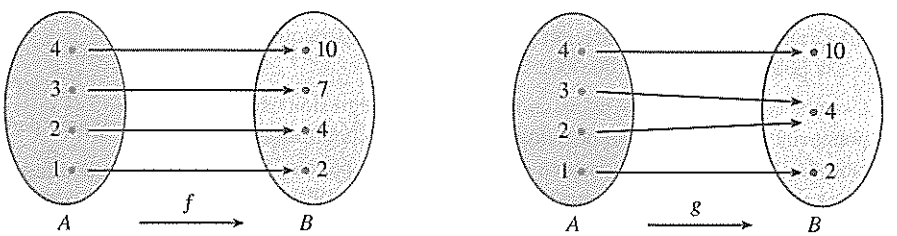


FIGURA 1
f es uno a uno; g no lo es

■ En el lenguaje de entradas y salidas, esta definición dice que f está uno a uno si cada salida corresponde a sólo una entrada.

1 DEFINICIÓN A una función f se le llama **función uno a uno** si nunca adopta el mismo valor dos veces; es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Si una línea horizontal interseca la gráfica de f en más de un punto, como es el caso de la figura 2 existen números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no está uno a uno. Debido a eso tenemos el método geométrico siguiente para determinar si una función es uno a uno.

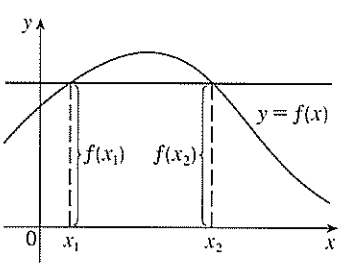


FIGURA 2
Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$

PRUEBA DE LA LÍNEA HORIZONTAL Una función es uno a uno si y sólo si, ninguna línea horizontal interseca su gráfica más de una vez.

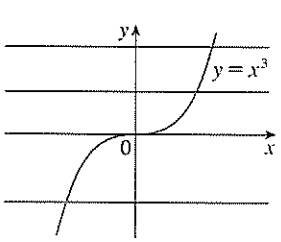


FIGURA 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno

EJEMPLO 1 ¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números distintos no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, por la definición 1, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 En la figura 3 ve que ninguna línea horizontal interseca la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por consiguiente, mediante la prueba de la línea horizontal, f es uno a uno. □

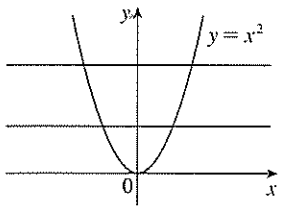


FIGURA 4
$g(x) = x^2$ no es uno a uno

EJEMPLO 2 ¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

y de este modo 1 y -1 tienen la misma salida.

SOLUCIÓN 2 En la figura 4 existen líneas horizontales que intersecan la gráfica de g más de una vez. Por consiguiente, mediante la prueba de la línea horizontal, g no es uno a uno □

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas según la siguiente definición

2 DEFINICIÓN Sea f una función uno a uno con dominio A e intervalo B. Luego su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y intervalo A y se define mediante

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

para cualquier y en B.

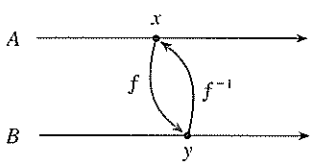


FIGURA 5

Esta definición dice que si f mapea x hacia y, después f^{-1} mapea y de regreso hacia x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida en forma única.) El diagrama de flechas de la figura 5 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. Observe que

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{intervalo de } f$$

$$\text{intervalo } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Por ejemplo, la función inversa de $f(x) = x^3$ es $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ porque si $y = x^3$, en tal caso

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$

PRECAUCIÓN No confundir el -1 en f^{-1} con un exponente. De esta manera

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no} \text{ significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ podría, no obstante, escribirse como $[f(x)]^{-1}$.

EJEMPLO 3 Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, encuentre $f^{-1}(7)$, $f^{-1}(5)$ y $f^{-1}(-10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1}

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

El diagrama que aparece en la figura 6 pone en evidencia la manera en que f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

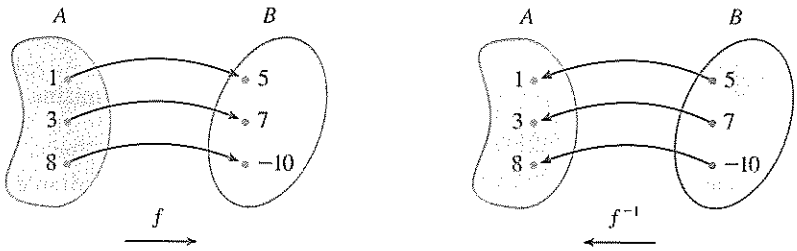


FIGURA 6
La función inversa invierte las entradas y las salidas

□

Por tradición la letra x se usa como la variable independiente, así, al concentrarse en f^{-1} en vez de sobre f, por lo regular invierte las funciones que juegan x y y en la definición 2 y escribia

3 $$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

Al sustituir y en la definición 2, y sustituir x en (3), obtiene las **ecuaciones de cancelación** siguientes:

4 $$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$
$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } B$$

La primera ecuación de cancelación dice que si empieza con x, aplica f, a continuación aplica f^{-1}, llega de nuevo a x, donde empieza (véase el diagrama que aparece en la figura 7). Así, f^{-1} deshace lo que f hace. La segunda ecuación dice que f deshace lo que f^{-1} hace.

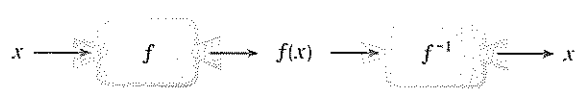


FIGURA 7

Por ejemplo, si $f(x) = x^3$, luego $f^{-1}(x) = x^{1/3}$ y de ese modo las ecuaciones de cancelación se convierten en

$$f^{-1}(f(x)) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(f^{-1}(x)) = (x^{1/3})^3 = x$$

Estas ecuaciones indican simplemente que la función cúbica y la función raíz cúbica se cancelan entre sí cuando se aplican en forma sucesiva.

Vea ahora cómo calcular funciones inversas. Si tiene una función $y = f(x)$ y es capaz de resolver esta ecuación para x en términos de y, en tal caso según la definición 2 tiene que $x = f^{-1}(y)$. Si desea nombrar como x la variable independiente, por lo tanto intercambie x y y y llegue a la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

5 CÓMO ENCONTRAR LA FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN f UNO A UNO

ETAPA 1 Escriba $y = f(x)$.

ETAPA 2 Resuelva la ecuación para x en términos de y (de ser posible).

ETAPA 3 Para expresar f^{-1} como una función de x, intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO 4 Encuentre la función inversa de $f(x) = x^3 + 2$.

SOLUCIÓN Según (5) primero escriba

$$y = x^3 + 2$$

A continuación resuelva esta ecuación para x:

$$x^3 = y - 2$$
$$x = \sqrt[3]{y - 2}$$

Por último, intercambie x y y:

$$y = \sqrt[3]{x - 2}$$

En consecuencia, la función inversa es $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$. □

Observe en el ejemplo 4 cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f sigue la regla "eleve al Cubo, entonces sume 2", f^{-1} sigue la regla "Reste 2, entonces obtenga la raíz cuadrada".

El principio de intercambiar x y y para hallar la función inversa da también el método para obtener la gráfica de f^{-1} de la gráfica de f. Puesto que $f(a) = b$ si y sólo si $f^{-1}(b) = a$, el punto (a, b) se encuentra en la gráfica de f si y sólo si el punto (a, b) está sobre la gráfica de f^{-1}. Pero obtiene el punto (b, a) de (a, b) al reflejar respecto a la línea $y = x$. (Véase la figura 8.)

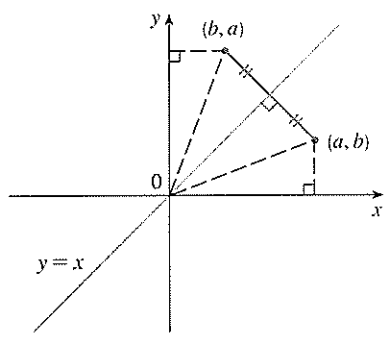


FIGURA 8

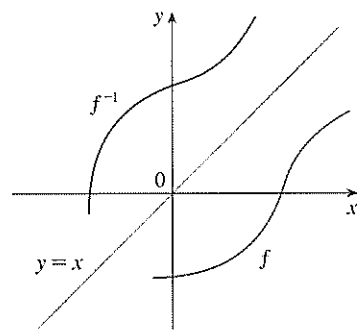


FIGURA 9

Debido a eso, como lo ilustra la figura 9:

> La gráfica de f^{-1} se obtiene reflejando la gráfica de f respecto a la línea $y = x$.

EJEMPLO 5 Trace las gráficas de $f(x) = \sqrt{-1 - x}$ y su función inversa usando los mismos ejes de coordenadas.

SOLUCIÓN En primer lugar trace la curva de $y = \sqrt{-1 - x}$ (la mitad superior de la parábola $y^2 = -1 - x$, o bien $x = -y^2 - 1$) y a continuación refleje respecto a la línea $y = x$ para obtener la gráfica de f^{-1}. (Véase la figura 10.) A manera de comprobación de la gráfica, observe que la expresión para f^{-1} es $f^{-1}(x) = -x^2 - 1, x \geqslant 0$. De modo que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = -x^2 - 1$ y a partir de la figura 10, esto parece ser razonable. □

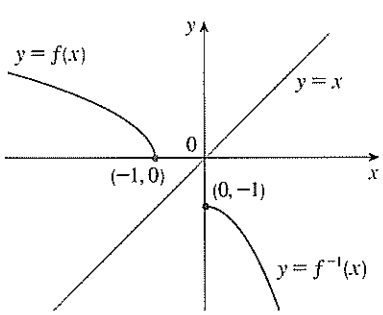


FIGURA 10

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, la función exponencial $f(x) = a^x$ bien se incrementa o disminuye y por eso mediante la prueba de la línea horizontal es uno a uno. Debido a eso tiene una función inversa f^{-1}, a la cual se le da el nombre de **función logarítmica con base a** y se denota mediante $\log_a$. Si utiliza la formulación de una función inversa dada por (3)

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

luego tiene

6 $$\log_a x = y \iff a^y = x$$

De ese modo, si $x > 0$, en tal caso $\log_a x$ es el exponente al cual debe elevarse la base a para dar x. Por ejemplo, $\log_{10} 0.001 = -3$ porque $10^{-3} = 0.001$.

Las ecuaciones de cancelación (4) cuando se aplican a las funciones $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se convierten en

7 $$\log_a(a^x) = x \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}$$
$$a^{\log_a x} = x \quad \text{para toda } x > 0$$

La función logarítmica $\log_a$ tiene dominio $(0, \infty)$ e intervalo $\mathbb{R}$. Su gráfica es el reflejo de la gráfica de $y = a^x$ respecto a la línea $y = x$.

La figura 11 muestra el caso en que $a > 1$. (Las funciones logarítmicas más importantes tienen base $a > 1$.) El hecho de que $y = a^x$ sea una función que aumenta muy rápidamente para $x > 0$ se refleja en el hecho de que $y = \log_a x$ es una función que aumenta muy lentamente para $x > 1$.

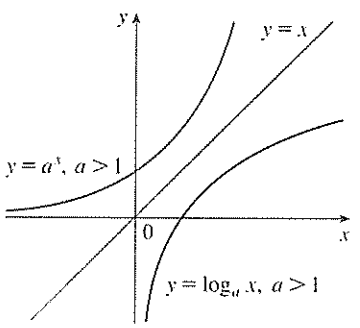


FIGURA 11

La figura 12 muestra las gráficas de $y = \log_a x$ con varios valores de la base $a > 1$. Como $\log_a 1 = 0$, las gráficas de todas las funciones logarítmicas pasan por el punto $(1, 0)$.

Las siguientes propiedades de las funciones logarítmicas se derivan de las propiedades correspondientes de las funciones exponenciales que se dieron en la sección 1.5.

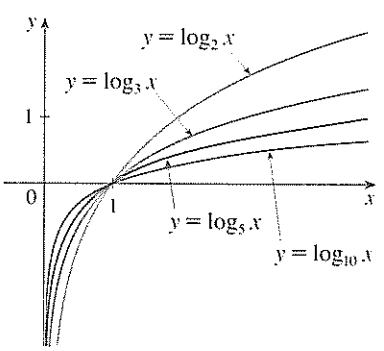


FIGURA 12

LEYES DE LOS LOGARITMOS Si x y y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r \log_a x$ (donde r es cualquier número real)

EJEMPLO 6 Use las leyes de los logaritmos para evaluar $\log_2 80 - \log_2 5$.

SOLUCIÓN Al usar la ley 2, tiene

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

Porque $2^4 = 16$. □

■ NOTACIÓN PARA LOGARITMOS

La mayoría de los libros de texto de cálculo y de ciencias, así como las calculadoras usan la notación $\ln x$ para el logaritmo natural y $\log x$ para el "logaritmo común", $\log_{10} x$. Sin embargo, en la literatura de matemáticas y científica más avanzada y en los lenguajes de computadora, la notación $\log x$ denota por lo general al logaritmo natural

LOGARITMOS NATURALES

En el capítulo 3 verá que de todas las bases a posibles para logaritmos, la elección más conveniente es el número e, que se definió en la sección 1.5. Al logaritmo con base e se le llama **logaritmo natural** y tiene una notación especial

$$\log_e x = \ln x$$

Si pone $a = e$ y sustituye $\log_e$ con "ln" en (6) y (7), por lo tanto las propiedades definitorias de la función logaritmo natural se convierten en

8 $$\ln x = y \iff e^y = x$$

9 $$\ln(e^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \qquad x > 0$$

En particular, si establece que $x = 1$, obtiene

$$\ln e = 1$$

EJEMPLO 7 Encuentre x si $\ln x = 5$.

SOLUCIÓN 1 De (8) observe que

$$\ln x = 5 \qquad \text{significa} \qquad e^5 = x$$

Por lo tanto, $x = e^5$.

(Si trabajar con la notación "ln" le causa problemas, sustitúyala con $\log_e$. Por lo tanto la ecuación se convierte en $\log_e x = 5$; por consiguiente, mediante la definición de logaritmo, $e^5 = x$.)

SOLUCIÓN 2 Empiece con la ecuación

$$\ln x = 5$$

y aplique la función exponencial a ambos lados de la ecuación

$$e^{\ln x} = e^5$$

Pero la segunda ecuación de cancelación en (9) dice que $e^{\ln x} = x$. Por lo tanto, $x = e^5$. □

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $e^{5-3x} = 10$.

SOLUCIÓN Tome logaritmos naturales de ambos lados de la ecuación y use (9):

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10$$
$$5 - 3x = \ln 10$$
$$3x = 5 - \ln 10$$
$$x = \tfrac{1}{3}(5 - \ln 10)$$

Como el logaritmo natural se encuentra en las calculadoras científicas, puede aproximar la solución a cuatro cifras decimales: $x \approx 0.8991$. □

EJEMPLO 9 Exprese $\ln a + \frac{1}{2}\ln b$ como un solo logaritmo.

SOLUCIÓN Usando las leyes 3 y 1 de los logaritmos

$$\begin{aligned}\ln a + \tfrac{1}{2}\ln b &= \ln a + \ln b^{1/2} \\ &= \ln a + \ln \sqrt{b} \\ &= \ln(a\sqrt{b})\end{aligned}$$

□

La fórmula siguiente muestra que los logaritmos con cualquier base pueden expresarse en términos del logaritmo natural

10 FÓRMULA DE CAMBIO DE BASE Para cualquier número positivo a ($a \neq 1$), tiene

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

PRUEBA Sea $y = \log_a x$. En tal caso de (6), tiene $a^y = x$. Al tomar los logaritmos naturales de ambos lados de esta ecuación, obtiene $y \ln a = \ln x$. Por consiguiente

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}$$

□

Las calculadoras científicas tienen una tecla para logaritmos naturales, de modo que la fórmula 10 permite usar una calculadora para calcular un logaritmo con cualquier base (como se ilustra en el ejemplo siguiente). De manera análoga, la fórmula 10 permite dibujar cualquier función logarítmica en una calculadora o computadora graficadora (véase ejercicios 43 y 44).

EJEMPLO 10 Evalúe $\log_8 5$ correcto hasta seis lugares decimales.

SOLUCIÓN La fórmula 10 produce

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

□

Las gráficas de la función exponencial $y = e^x$ y su función inversa, la función logaritmo natural, se ilustran en la figura 13. Debido a que la curva $y = e^x$ cruza el eje y con una pendiente de 1, se deduce que la curva reflejada $y = \ln x$ cruza el eje x con una pendiente de 1.

Al igual que todas las demás funciones logarítmicas que tienen una base mayor que 1, el logaritmo natural es una función creciente que se define sobre $(0, \infty)$ y el eje y es una asíntota vertical. (Esto significa que los valores de $\ln x$ se convierten en negativos muy grandes a medida que x se aproxima a cero.)

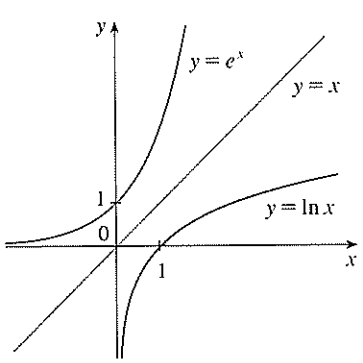
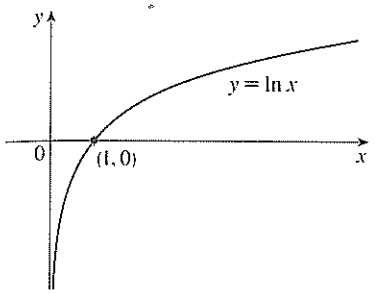
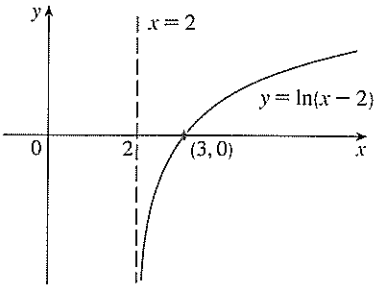


FIGURA 13

EJEMPLO 11 Trace la gráfica de la función $y = \ln(x - 2) - 1$.

SOLUCIÓN Empiece con la gráfica de $y = \ln x$ según se proporciona en la figura 13. Al utilizar la transformación de la sección 1.3, vaya dos unidades hacia la derecha para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2)$ y luego desplácela una unidad hacia abajo para obtener la gráfica de $y = \ln(x - 2) - 1$. (Véase la figura 14.)





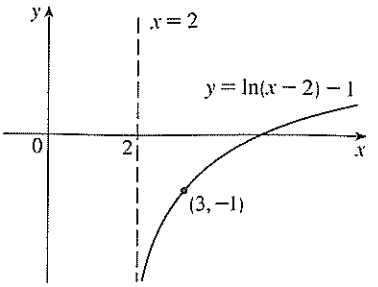


FIGURA 14

□

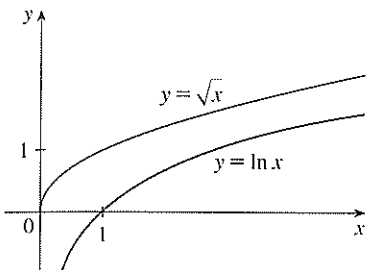


FIGURA 15

Si bien ln x es una función creciente, crece *muy* despacio cuando $x > 1$. De hecho, ln x crece más despacio que cualquier potencia positiva de x. Para ilustrar este hecho, compare valores aproximados de las funciones $y = \ln x$ y $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$ en la tabla siguiente que aparecen dibujados en las figuras 15 y 16. Podrá observar que en un principio las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = \ln x$ crecen en cantidades similares, pero en algún momento la función raíz rebasa por mucho al logaritmo.

x	1	2	5	10	50	100	500	1000	10 000	100 000
$\ln x$	0	0.69	1.61	2.30	3.91	4.6	6.2	6.9	9.2	11.5
$\sqrt{x}$	1	1.41	2.24	3.16	7.07	10.0	22.4	31.6	100	316
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$	0	0.49	0.72	0.73	0.55	0.46	0.28	0.22	0.09	0.04

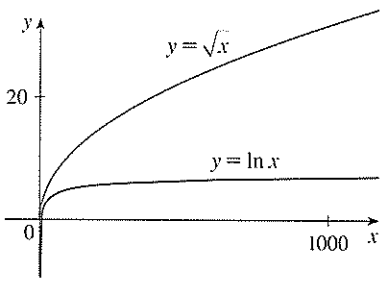


FIGURA 16

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Cuando tratamos de calcular las funciones trigonométricas inversas hay una pequeña dificultad: puesto que las funciones trigonométricas no son uno a uno o biunívocas, no tienen funciones inversas. La dificultad se vence restringiendo los dominios de estas funciones de modo que se transformen en uno a uno.

Observe en la figura 17 que la función seno $y = \operatorname{sen} x$ no es uno a uno (aplique la prueba de la línea horizontal). Pero la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ (véase figura 18) es uno a uno. La función inversa de esta función seno restringida f existe y se denota mediante sen^{-1} o arcsen. Se denomina **función inversa del seno** o **función arco seno**.

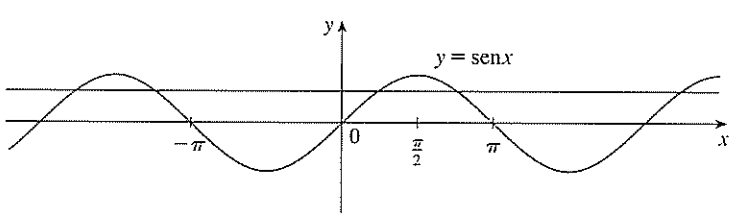


FIGURA 17

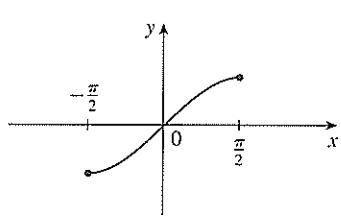


FIGURA 18 $y = \operatorname{sen} x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Puesto que la definición de una función inversa establece que

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

tiene

$$\operatorname{sen}^{-1}x = y \iff \operatorname{sen} y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$\operatorname{sen}^{-1}x \neq \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Por esto, si $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $\operatorname{sen}^{-1}x$ es el número entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ cuyo seno es x.

EJEMPLO 12 Determine (a) $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ y (b) $\tan(\operatorname{arcsen}\frac{1}{3})$.

SOLUCIÓN

(a) Tenemos

$$\operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

porque $\operatorname{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$ y $\pi/6$ queda entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(b) Sea $\theta = \operatorname{arcsen}\frac{1}{3}$, de modo que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$. Por lo tanto, podemos dibujar un triángulo rectángulo con ángulo θ como en la figura 19 y deducir de acuerdo con el Teorema de Pitágoras que el cateto faltante mide $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Esto permite que podamos saber a partir del triángulo que

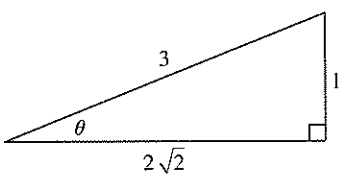


FIGURA 19

$$\tan(\operatorname{arcsen}\tfrac{1}{3}) = \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$ □

Las ecuaciones de cancelación para el caso de las funciones inversas se transforman en

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

El dominio de la función inversa del seno, sen^{-1}, es $[-1, 1]$ y el intervalo es $[-\pi/2, \pi/2]$, y su gráfica, que se ilustra en la figura 20, se obtiene de la función restringida del seno (figura 18) por reflexión con respecto a la línea $y = x$.

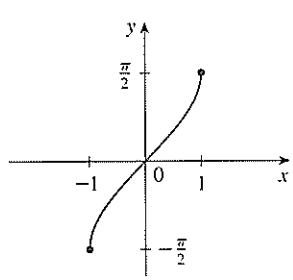


FIGURA 20
$y = \operatorname{sen}^{-1}x = \operatorname{arcsen} x$

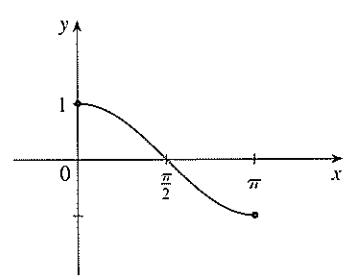


FIGURA 21
$y = \cos x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

La **función inversa del coseno** se trata en forma similar. La función restringida del coseno $f(x) = \cos x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, es uno a uno (véase figura 21) y, de este modo, tiene una función inversa que se denota mediante $\cos^{-1}$ o arccos.

$$\cos^{-1}x = y \iff \cos y = x \quad \text{y} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

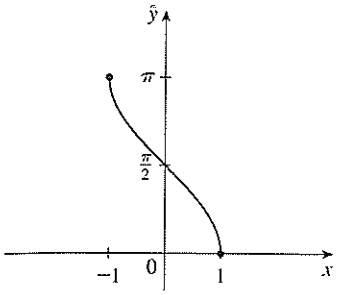


FIGURA 22
$y = \cos^{-1}x = \arccos x$

Las ecuaciones de cancelación son

$$\cos^{-1}(\cos x) = x \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \pi$$

$$\cos(\cos^{-1}x) = x \quad \text{para } -1 \leqslant x \leqslant 1$$

El dominio de la función inversa del coseno, $\cos^{-1}$, es $[-1, 1]$ y el intervalo es $[0, \pi]$. Su gráfica se ilustra en la figura 22.

La función tangente se puede hacer uno a uno si se la restringe al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Por consiguiente, la **función tangente inversa** se define como la inversa de la función $f(x) = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. (Véase figura 23.) Se denota mediante $\tan^{-1}$ o arctan.

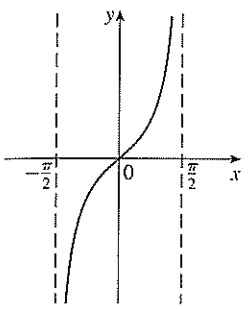


FIGURA 23
$y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$\tan^{-1}x = y \iff \tan y = x \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

EJEMPLO 13 Simplifique la expresión $\cos(\tan^{-1}x)$.

SOLUCIÓN 1 Sea $y = \tan^{-1}x$. Por lo tanto $\tan y = x$ y $-\pi/2 < y < \pi/2$. Quiere determinar el $\cos y$ pero como $\tan y$ se conoce, es más fácil determinar primero $\sec y$:

$$\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\sec y = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(puesto que } \sec y > 0 \text{ para } -\pi/2 < y < \pi/2\text{)}$$

De este modo $$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sec y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

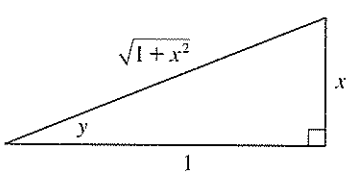


FIGURA 24

SOLUCIÓN 2 En lugar de aplicar las identidades trigonométricas como en la solución 1, es tal vez más fácil utilizar un diagrama. Si $y = \tan^{-1}x$, después $\tan y = x$, y puede saber a partir de la figura 24 (que ilustra el caso $y > 0$) que

$$\cos(\tan^{-1}x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$ □

La función tangente inversa, $\tan^{-1} = \arctan$, tiene por dominio $\mathbb{R}$ e intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Sus gráficas se muestran en la figura 25.

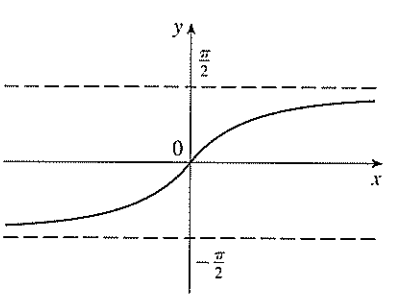


FIGURA 25
$y = \tan^{-1}x = \arctan x$

Las líneas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de la tangente. Puesto que la gráfica de $\tan^{-1}$ se obtiene reflejando la gráfica de la función tangente restringida con respecto a la línea $y = x$, se infiere que las líneas $y = \pi/2$ y $y = -\pi/2$ son asíntotas horizontales de la gráfica de $\tan^{-1}$.

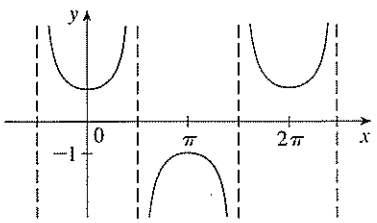


FIGURA 26
$y = \sec x$

Las funciones trigonométricas inversas restantes no se aplican con frecuencia por lo que se resumen en seguida.

11 $y = \csc^{-1}x \ (|x| \geq 1) \iff \csc y = x \quad y \quad y \in (0, \pi/2] \cup (\pi, 3\pi/2]$

$y = \sec^{-1}x \ (|x| \geq 1) \iff \sec y = x \quad y \quad y \in [0, \pi/2) \cup [\pi, 3\pi/2)$

$y = \cot^{-1}x \ (x \in \mathbb{R}) \iff \cot y = x \quad y \quad y \in (0, \pi)$

No hay un acuerdo universal sobre la elección de los intervalos para y en las definiciones de $\csc^{-1}$ o $\sec^{-1}$. Por ejemplo, algunos autores usan $y \in [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$ en la definición de $\sec^{-1}$. [Usted puede comprobar con la gráfica de la función secante de la figura 26 que funcionan tanto esta opción como la que se encuentra en (11).]

1.6 EJERCICIOS

1. (a) ¿Qué es una función uno a uno?
(b) ¿Cómo puede decir a partir de la gráfica de una función si ésta es uno a uno?

2. (a) Suponga que f es una función uno a uno con dominio A e intervalo B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el intervalo de f^{-1}?
(b) Si le dan una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?
(c) ¿Si le dan la gráfica de f, ¿cómo encuentra la gráfica de f^{-1}?

3–14 Se da una función mediante una tabla, una gráfica, una fórmula o una descripción verbal. Determine si es uno a uno.

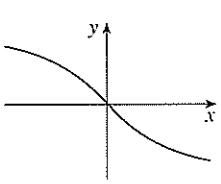
3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1.5	2.0	3.6	5.3	2.8	2.0

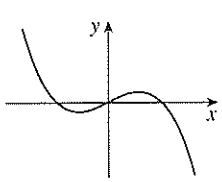
4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	1	2	4	8	16	32

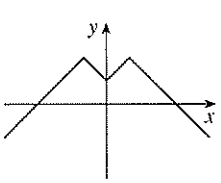
5.



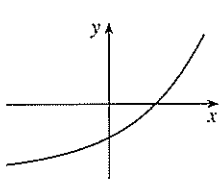
6.



7.



8.



9. $f(x) = x^2 - 2x$

10. $f(x) = 10 - 3x$

11. $g(x) = 1/x$

12. $g(x) = \cos x$

13. $f(t)$ es la altura de un balón de fútbol t segundos después de la patada de salida.

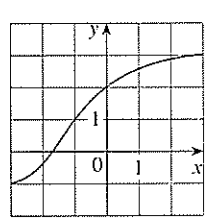
14. $f(t)$ es su altura a la edad de t.

15. Si f es una función uno a uno tal que $f(2) = 9$, ¿cuánto es $f^{-1}(9)$?

16. Sea $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$, donde $-1 < x < 1$.
(a) Halle $f^{-1}(3)$.
(b) Encuentre $f(f^{-1}(5))$.

17. Si $g(x) = 3 + x + e^x$, encuentre $g^{-1}(4)$.

18. Se proporciona la gráfica de f.
(a) ¿Por qué f es uno a uno?
(b) Defina el dominio y el intervalo de f^{-1}.
(c) ¿Cuál es el valor de $f^{-1}(2)$.
(d) ¿Estime el valor de $f^{-1}(0)$.



19. La fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, donde $F \geq -459.67$, expresa la temperatura en grados Celsius C como una función de la temperatura en grados Fahrenheit F. Encuentre una fórmula para la función inversa e interprétela. ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

20. En la teoría de la relatividad, la masa de una partícula con rapidez v es

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

donde m_0 es la masa en reposo de la partícula y c es la rapidez de la luz en el vacío. Encuentre la función inversa de f y explique su significado.

21–26 Encuentre una fórmula para la inversa de la función.

21. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$

22. $f(x) = \dfrac{4x - 1}{2x + 3}$

23. $f(x) = e^{x^3}$

24. $y = 2x^3 + 3$

25. $y = \ln(x + 3)$

26. $y = \dfrac{e^x}{1 + 2e^x}$

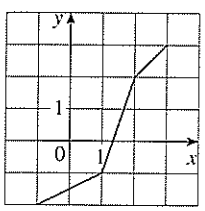
27–28 Encuentre una fórmula explícita para f^{-1} y úsela para dibujar f^{-1}, f y la recta $y = x$ sobre la misma pantalla. Para verifi-car su trabajo, vea si las gráficas de f y f^{-1} son reflejos respecto a la recta.

27. $f(x) = x^4 + 1, \ x \geqslant 0$

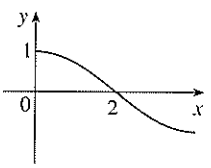
28. $f(x) = 2 - e^x$

29–30 Utilice la gráfica que se proporciona para f para dibujar la gráfica de f^{-1}.

29.



30.



31. (a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?
(b) ¿Cuál es el dominio de esta función?
(c) ¿Cuál es el intervalo de esta función?
(d) Trace la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.

32. (a) ¿Qué es el logaritmo natural?
(b) ¿Qué es el logaritmo común?
(c) Trace las gráficas de la función logaritmo natural y la función exponencial natural con un conjunto común de ejes.

33–36 Encuentre el valor exacto de cada expresión.

33. (a) $\log_5 125$ (b) $\log_3 \frac{1}{27}$

34. (a) $\ln(1/e)$ (b) $\log_{10} \sqrt{10}$

35. (a) $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
(b) $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

36. (a) $e^{-2 \ln 5}$ (b) $\ln(\ln e^{e^{10}})$

37–39 Exprese la cantidad que se proporciona como un logaritmo único.

37. $\ln 5 + 5 \ln 3$

38. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2 \ln c$

39. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} \ln x - \ln \operatorname{sen} x$

40. Use la fórmula 10 para evaluar cada logaritmo correcto hasta seis cifras decimales.
(a) $\log_{12} 10$ (b) $\log_2 8.4$

41–42 Use la fórmula 10 para dibujar las funciones que se proporcionan en una pantalla común. ¿De qué manera se relacionan estas gráficas?

41. $y = \log_{1.5} x, \quad y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = \log_{50} x$

42. $y = \ln x, \quad y = \log_{10} x, \quad y = e^x, \quad y = 10^x$

43. Suponga que la gráfica de $y = \log_2 x$ se dibuja en una plantilla de coordenadas donde la unidad de medida es una pulgada. ¿Cuántas millas hacia la derecha del origen hay que desplazarse antes que la altura de la curva llegue a 3 pies?

44. Compare las funciones $f(x) = x^{0.1}$ y $g(x) = \ln x$ mediante el dibujo de tanto f como g en varios rectángulos de visualización. ¿Cuándo termina la gráfica de f por rebasar la gráfica de g?

45–46 Haga un trazo aproximado de la gráfica de cada función. No use una calculadora. Utilice sólo las gráficas que se proporcionan en las figuras 12 y 13 y, de ser necesario, las transformaciones de la sección 1.3.

45. (a) $y = \log_{10}(x + 5)$ (b) $y = -\ln x$

46. (a) $y = \ln(-x)$ (b) $y = \ln |x|$

47–50 Resuelva cada ecuación para x.

47. (a) $2 \ln x = 1$ (b) $e^{-x} = 5$

48. (a) $e^{2x+3} - 7 = 0$ (b) $\ln(5 - 2x) = -3$

49. (a) $2^{x-5} = 3$ (b) $\ln x + \ln(x - 1) = 1$

50. (a) $\ln(\ln x) = 1$ (b) $e^{ax} = Ce^{bx}$, donde $a \neq b$

51–52 Resuelva cada desigualdad para x.

51. (a) $e^x < 10$ (b) $\ln x > -1$

52. (a) $2 < \ln x < 9$ (b) $e^{2-3x} > 4$

53–54 Encuentre (a) el dominio de f y (b) f^{-1} y su dominio.

53. $f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}}$

54. $f(x) = \ln(2 + \ln x)$

55. Dibuje la función $f(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ y explique por qué es uno a uno. A continuación use un sistema algebraico de computadora para encontrar una expresión explícita para $f^{-1}(x)$. (Su CAS generará tres expresiones posibles. Explique por qué dos de ellas son irrelevantes en este contexto.)

56. (a) Si $g(x) = x^6 + x^4$, $x \geqslant 0$, utilice un sistema algebraico de computadora para encontrar una expresión para $g^{-1}(x)$.
(b) Use la expresión del inciso (a) para dibujar $y = g(x)$, $y = x$ y $y = g^{-1}(x)$ en la misma pantalla.

57. Si una población de bacterias inicia con 100 bacterias y se duplica cada tres horas, luego el número de bacterias una vez que transcurren t horas es $n = f(t) = 100 \cdot 2^{t/3}$. (Véase el ejercicio 25 en la sección 1.5.)
(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.
(b) ¿Cuándo llegará la población a 50 000?

58. Cuando se apaga el *flash* de una cámara, las baterías empiezan de inmediato a recargar el capacitor del *flash*, el cual almacena carga eléctrica dada por

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-t/a})$$

(La capacidad máxima de carga es Q_0 y t se mide en segundos.)

(a) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(b) ¿Cuánto tarda en cargar el capacitor hasta 90% de su capacidad si $a = 2$?

59–64 Calcule el valor exacto de cada expresión.

59. (a) $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$ (b) $\cos^{-1}(-1)$

60. (a) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\sec^{-1} 2$

61. (a) $\arctan 1$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(1/\sqrt{2})$

62. (a) $\cot^{-1}(-\sqrt{3})$ (b) $\arccos(-\frac{1}{2})$

63. (a) $\tan(\arctan 10)$ (b) $\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(7\pi/3))$

64. (a) $\tan(\sec^{-1} 4)$ (b) $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1}(\frac{3}{5}))$

65. Demuestre que $\cos(\operatorname{sen}^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2}$.

66–68 Simplifique la expresión.

66. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}x)$ **67.** $\operatorname{sen}(\tan^{-1}x)$

68. $\cos(2 \tan^{-1}x)$

69–70 Grafique las funciones dadas en la misma pantalla. ¿Cuál es la relación entre estas gráficas?

69. $y = \operatorname{sen} x, \ -\pi/2 \leq x \leq \pi/2; \quad y = \operatorname{sen}^{-1}x; \quad y = x$

70. $y = \tan x, \ -\pi/2 < x < \pi/2; \quad y = \tan^{-1}x; \quad y = x$

71. Determine el dominio y el intervalo de la función.

$$g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(3x + 1)$$

72. (a) Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x)$ y explique el aspecto de la gráfica.

(b) Grafique la función $g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$. ¿Cuál es su explicación sobre el aspecto de esta gráfica?

73. (a) Si desplaza una curva hacia la izquierda, ¿qué pasa con su reflejo respecto a la línea $y = x$? En vista de este principio geométrico, encuentre una expresión para la inversa de $g(x) = f(x + c)$ donde f es una función uno a uno

(b) Encuentre una expresión para la inversa de $h(x) = f(cx)$, donde $c \neq 0$.

1 REPASO

REVISIÓN DE CONCEPTOS

1. (a) ¿Qué es una función? ¿Cuál es su dominio y su intervalo?
   (b) ¿Qué es la gráfica de una función?
   (c) ¿Cómo puede usted decir si una curva dada es la gráfica de una función?

2. Analice cuatro maneras de representar una función. Ilustre su análisis con ejemplos.

3. (a) ¿Qué es una función par? ¿Cómo puede decir si una función es par al mirar su gráfica?
   (b) ¿Qué es una función impar? ¿Cómo puede decir si una función es impar al mirar su gráfica?

4. ¿Qué es una función creciente?

5. ¿Qué es un modelo matemático?

6. Proporcione un ejemplo de cada tipo de función
   (a) Función lineal
   (b) Función potencia
   (c) Función exponencial
   (d) Función cuadrática
   (e) Polinomio grado 5
   (f) Función racional

7. Trace, a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes.
   (a) $f(x) = x$
   (b) $g(x) = x^2$
   (c) $h(x) = x^3$
   (d) $j(x) = x^4$

8. Dibuje a mano un esquema aproximado de la gráfica de cada función.
   (a) $y = \operatorname{sen} x$
   (b) $y = \tan x$
   (c) $y = e^x$
   (d) $y = \ln x$
   (e) $y = 1/x$
   (f) $y = |x|$
   (g) $y = \sqrt{x}$
   (h) $y = \tan^{-1} x$

9. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.
   (a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
   (b) ¿Cuál es el dominio de fg?
   (c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

10. ¿Cómo se define la función compuesta $f \circ g$? ¿Cuál es su dominio?

11. Suponga que la gráfica de f está dada. Escriba una ecuación para cada una de las gráficas que se obtienen de la gráfica de f como se describe a continuación.
   (a) Desplazando 2 unidades hacia arriba
   (b) Desplazando 2 unidades hacia abajo
   (c) Desplazando 2 unidades hacia la derecha
   (d) Desplazando 2 unidades hacia la izquierda
   (e) Al reflejar respecto al eje x
   (f) Al reflejar respecto al eje y
   (g) Al alargar verticalmente por un factor de 2
   (h) Al contraer verticalmente por un factor de 2
   (i) Al alargar horizontalmente por un factor de 2
   (j) Al contraer horizontalmente por un factor de 2

12. (a) ¿Qué es una función uno a uno? ¿Cómo puede decir si una función es uno a uno al mirar su gráfica?
   (b) Si f es una función uno a uno, ¿cómo se define su función inversa f^{-1}? ¿Cómo obtiene la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f?

13. (a) ¿Cómo se define la función seno inversa $f(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su intervalo?
   (b) ¿Cómo se define la función coseno inversa $f(x) = \cos^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su intervalo?
   (c) ¿Cómo se define la función tangente inversa $f(x) = \tan^{-1} x$? ¿Cuáles son su dominio y su intervalo?

PREGUNTAS DE VERDADERO-FALSO

Determine si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, explique por qué. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que refute la proposición.

1. Si f es una función, entonces $f(s + t) = f(s) + f(t)$.

2. Si $f(s) = f(t)$, luego $s = t$.

3. Si f es una función, entonces $f(3x) = 3f(x)$.

4. Si $x_1 < x_2$ y f es una función decreciente, luego $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Una línea vertical interseca la gráfica de una función más de una vez.

6. Si f y g son funciones, luego $f \circ g = g \circ f$.

7. Si f es uno a uno, en tal caso $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

8. Siempre se puede dividir entre e^x.

9. Si $0 < a < b$, entonces $\ln a < \ln b$.

10. Si $x > 0$, entonces $(\ln x)^6 = 6 \ln x$.

11. Si $x > 0$ y $a > 1$, entonces $\dfrac{\ln x}{\ln a} = \ln \dfrac{x}{a}$.

12. $\tan^{-1}(-1) = 3\pi/4$.

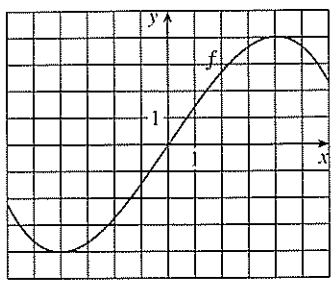
13. $\tan^{-1} x = \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{\cos^{-1} x}$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

EJERCICIOS

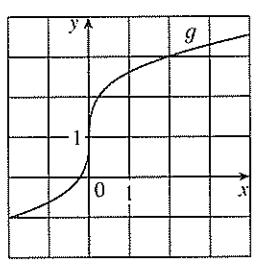
1. Sea f la función cuya gráfica se da.

(a) Estime el valor de $f(2)$.
(b) Estime los valores de x tales que $f(x) = 3$.
(c) Dé el dominio de f.
(d) Dé el intervalo de f.
(e) ¿Sobre cuál intervalo f es creciente?
(f) ¿f es uno a uno? Explique.
(g) ¿f es par, impar o de ninguno de los dos tipos? Explique



2. Se da la gráfica de g.

(a) Dé el valor de $g(2)$.
(b) ¿Por qué g es uno a uno?
(c) Estime el valor de $g^{-1}(2)$.
(d) Estime el dominio de g^{-1}.
(e) Trace la gráfica de g^{-1}.



3. Si $f(x) = x^5 - 2x + 3$, evalúe el cociente de diferencia

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

4. Trace la gráfica aproximada del rendimiento de un cultivo como función de la cantidad de fertilizante que se usó.

5–8 Encuentre el dominio y el intervalo de la función

5. $f(x) = 2/(3x - 1)$ **6.** $g(x) = \sqrt{16 - x^4}$

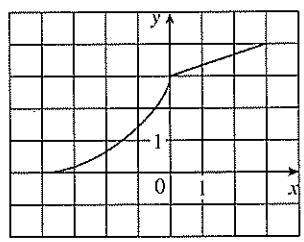
7. $h(x) = \ln(x + 6)$ **8.** $F(t) = 3 + \cos 2t$

9. Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las funciones siguientes a partir de la gráfica de f.

(a) $y = f(x) + 8$ (b) $y = f(x + 8)$
(c) $y = 1 + 2f(x)$ (d) $y = f(x - 2) - 2$
(e) $y = -f(x)$ (f) $y = f^{-1}(x)$

10. Se da la gráfica de f. Dibuje las funciones siguientes.

(a) $y = f(x - 8)$ (b) $y = -f(x)$
(c) $y = 2 - f(x)$ (d) $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$
(e) $y = f^{-1}(x)$ (f) $y = f^{-1}(x + 3)$



11–16 Use transformaciones para trazar la gráfica de la función.

11. $y = -\operatorname{sen} 2x$ **12.** $y = 3\ln(x - 2)$

13. $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ **14.** $y = 2 - \sqrt{x}$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$ **16.** $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

17. Establezca si f es par, impar o ninguna de las dos cosas.

(a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$
(b) $f(x) = x^3 - x^7$
(c) $f(x) = e^{-x^2}$
(d) $f(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

18. Encuentre una expresión para la función cuya gráfica consta de un segmento de línea del punto $(-2, 2)$ hasta el punto $(-1, 0)$ junto con la mitad superior del círculo con centro en el origen y radio 1.

19. Si $f(x) = \ln x$ y $g(x) = x^2 - 9$, encuentre las funciones (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, (d) $g \circ g$, y sus dominios.

20. Exprese la función $F(x) = 1/\sqrt{x + \sqrt{x}}$ como una composición de tres funciones.

21. La expectativa de vida mejoró de manera dramática en el siglo XX. La tabla proporciona la expectativa de vida (en años) al momento del nacimiento de hombres en Estados Unidos.

Año de nacimiento	Expectativa de vida	Año de nacimiento	Expectativa de vida
1900	48.3	1960	66.6
1910	51.1	1970	67.1
1920	55.2	1980	70.0
1930	57.4	1990	71.8
1940	62.5	2000	73.0
1950	65.6		

Use una gráfica de dispersión para elegir un tipo de modelo apropiado. Utilice su modelo para predecir la duración de la vida de un hombre que nace en el año 2010.

22. Un pequeño fabricante de electrodomésticos encuentra que le cuesta 9 000 dólares producir 1 000 hornos para tostar y 12 000 dólares producir 1 500 hornos por semana.

(a) Exprese el costo como una función del número de hornos para tostar que se producen, suponiendo que es lineal. Enseguida trace la gráfica.

(b) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica y qué representa?

(c) ¿Cuál es la intersección y de la gráfica y qué representa?

23. Si $f(x) = 2x + \ln x$, encuentre $f^{-1}(2)$.

24. Encuentre la función inversa de $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x + 1}$.

25. Halle el valor exacto de cada expresión.

(a) $e^{2 \ln 3}$ (b) $\log_{10} 25 + \log_{10} 4$

(c) $\tan(\operatorname{arcsen} \frac{1}{2})$ (d) $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(\frac{4}{5}))$

26. Resuelva cada ecuación para x.

(a) $e^x = 5$ (b) $\ln x = 2$

(c) $e^{e^x} = 2$ (d) $\tan^{-1} x = 1$

27. La población de cierta especie en un ambiente limitado, con población inicial de 100 y que soporta una capacidad de 1 000, es

$$P(t) = \frac{100\,000}{100 + 900e^{-t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Dibuje esta función y estime cuánto tarda para que la población llegue a 900.

(b) Encuentre la inversa de esta función y explique su significado.

(c) Use la función inversa para encontrar el tiempo que se requiere para que la población llegue a 900. Compare con el resultado del inciso (a).

28. Dibuje las tres funciones $y = x^a$, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ en la misma pantalla para dos o tres valores de $a > 1$. Para valores grandes de x, ¿cuál de estas funciones tiene los valores más grandes y cuál los más pequeños?

PRINCIPIOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

No existen reglas firmes y rápidas que garanticen el éxito en la solución de problemas. Sin embargo, es posible delinear algunos etapas generales del proceso de solución de problemas y dar algunos principios que pueden resultar útiles en la solución de ciertos problemas. Estas etapas y principios no son más que sentido común hecho explícito. Se han adaptado del libro *How To Solve It* de George Polya.

1 Comprender el problema

El primer paso es leer el problema y asegurarse de entenderlo con claridad. Hágase las preguntas siguientes:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades dadas?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, resulta útil

dibujar un diagrama

e identificar las cantidades dadas y requeridas en el diagrama.

Por lo común, es necesario

introducir una notación apropiada

Al elegir los símbolos para las cantidades desconocidas, use letras como a, b, c, m, n, x y y pero, en algunos casos, ayuda usar iniciales como los símbolos significantes; por ejemplo, V para el volumen o t para el tiempo.

2 Pensar en un plan

Encuentre una relación entre la información dada y lo que desconoce que le permita calcular la incógnita. Con frecuencia ayuda preguntarse: "¿Cómo puedo relacionar lo que se proporciona con lo desconocido?" Si no ve una relación de inmediato, las ideas siguientes pueden resultar útiles para idear un plan.

Intente reconocer algo familiar Relacione la situación que se proporciona con sus conocimientos previos. Observe la incógnita e intente recordar un problema más familiar que tenga una incógnita semejante.

Intente reconocer patrones Algunos problemas se resuelven al reconocer que se presenta alguna clase de patrón. Éste puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si reconoce regularidad o repetición en un problema, quizá sea capaz de conjeturar cuál es el patrón y probarlo.

Use la analogía Intente pensar en un problema análogo; es decir, un problema semejante o relacionado, pero más fácil que el original. Si puede resolver un problema similar, más sencillo, en tal caso éste le podría dar los indicios que necesita para resolver el problema original, más complicado. Por ejemplo, si en un problema intervienen números muy grandes, podría intentar primero un caso semejante con números más pequeños. O bien, si en el problema interviene geometría tridimensional, busque uno similar en geometría bidimensional. O también, si el problema con que empieza es general, podría intentar con un caso especial.

Introduzca algo adicional A veces puede ser necesario introducir algo nuevo, algo auxiliar, para ayudar a establecer la conexión entre lo dado y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, lo auxiliar podría ser una nueva línea trazada en un diagrama. En un problema más algebraico, podría ser una nueva incógnita relacionada con la original.

Establezca casos En ocasiones habrá que dividir el problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada uno. Por ejemplo, con frecuencia debe aplicar esta estrategia al tratar con el valor absoluto.

Resuelva hacia atrás A veces resulta útil imaginar que el problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso a paso, hasta llegar a la información que se proporciona. Por lo tanto, es posible invertir las etapas y, de este modo, construir una solución del problema original. Es común aplicar este procedimiento al resolver ecuaciones. Por ejemplo, al resolver la ecuación $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y proceda hacia atrás. Sume 5 a cada miembro de la ecuación y divida cada miembro entre 3 para obtenér $x = 4$. Como cada etapa se puede invertir, ha resuelto el problema.

Establezca metas parciales En un problema complejo suele convenir establecer metas intermedias (en las cuales sólo se satisface parcialmente la situación deseada). Si alcanza la primera de estas metas intermedias, luego es posible que sea capaz de construir sobre ellas hasta alcanzar la meta final.

Razonamiento indirecto En ocasiones es apropiado atacar un problema de manera indirecta. Al utilizar la demostración por contradicción para probar que P implica Q, suponga que P es verdadera y que Q es falsa e intente ver por qué esto no puede ser. De algún modo, debe usar esta información y llegar a una contradicción de lo que está seguros que es verdadero.

Inducción matemática Al probar proposiciones que comprenden un entero positivo n, con frecuencia es útil aplicar el principio siguiente:

PRINCIPIO DE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA Sea S_n una proposición acerca del entero n. Si:

1. S_1 es verdadera.
2. S_{k+1} es verdadera siempre que S_k es verdadera.

Entonces S_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Esto es razonable porque, como S_1 es verdadera, de la condición 2 (con $k = 1$) se infiere que S_2 es verdadera. En tal caso, si se aplica la condición 2 con $k = 2$, S_3 es verdadera. Al aplicar una vez más la condición 2, esta vez con $k = 3$, S_4 es verdadera. Este procedimiento se puede seguir indefinidamente.

3 Llevar a cabo el plan

En la etapa 2 se ideó un plan. Al ponerlo en práctica debe comprobar cada etapa y escribir los detalles que prueben que cada una es correcta.

4 Mirar retrospectivamente

Luego de completar la solución, es inteligente revisarla, en parte para ver si hay errores en la solución y también para ver si es posible pensar en una manera más fácil de resolver el problema. Otra razón para mirar hacia atrás es que lo familiarizará con el método de solución y esto puede ser útil para resolver un problema futuro. Descartes dijo: "Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas."

Estos principios de solución de problemas se ilustran en los ejemplos siguientes. Intente resolverlos antes de mirar las soluciones. Consulte estos principios de solución de problemas si se atora. Puede encontrar útil referirse a esta sección de vez en cuando al resolver los ejercicios de los capítulos restantes del libro.

EJEMPLO 1 Exprese la hipotenusa h de un triángulo rectángulo con un área de 25 m^2 como función de su perímetro P.

▪ Comprender el problema.

SOLUCIÓN Primero clasifique la información, identificando la cantidad desconocida y los datos:

Incógnita: hipotenusa h

Cantidades dadas: perímetro P, área de 25 m^2

▪ Dibujar un diagrama.

Ayuda dibujar un diagrama como el de la figura 1.

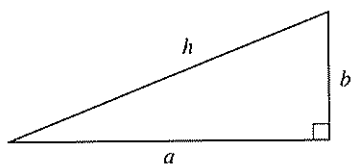


FIGURA 1

▪ Relacionar lo dado con lo desconocido.
▪ Introducir algo adicional.

Para relacionar las cantidades dadas con la incógnita, introduzca dos variables adicionales, a y b, que son las longitudes de los otros dos lados del triángulo. Esto permite expresar la condición dada, que el triángulo es rectángulo, por el teorema de Pitágoras:

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Las otras relaciones entre las variables se obtienen al escribir las expresiones para el área y el perímetro:

$$25 = \tfrac{1}{2}ab \qquad P = a + b + h$$

Como se da P, note que ahora tiene tres ecuaciones en las tres incógnitas a, b y h:

$$\boxed{1} \quad h^2 = a^2 + b^2$$

$$\boxed{2} \quad 25 = \tfrac{1}{2}ab$$

$$\boxed{3} \quad P = a + b + h$$

▪ Relacionar con algo familiar.

Aunque tiene el número correcto de ecuaciones, no son fáciles de resolver de manera directa; pero si aplica la estrategia de intentar reconocer algo familiar, en tal caso puede resolverlas con un método más fácil. Vea el lado derecho de las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Le recuerdan algo familiar? Observe que contienen los ingredientes de una fórmula conocida:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si aplica esta idea puede expresar $(a + b)^2$ de dos maneras. De las ecuaciones 1 y 2 tiene

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = h^2 + 4(25)$$

De la ecuación 3

$$(a + b)^2 = (P - h)^2 = P^2 - 2Ph + h^2$$

En estos términos,

$$h^2 + 100 = P^2 - 2Ph + h^2$$

$$2Ph = P^2 - 100$$

$$h = \frac{P^2 - 100}{2P}$$

Es la expresión requerida para h como función de P. □

http://libreria-universitaria.blogspot.com

Como se ilustra en el siguiente ejemplo, a menudo es necesario aplicar el principio de resolución de problemas de *establecer casos*, al tratar con valores absolutos.

EJEMPLO 2 Resuelva la desigualdad $|x - 3| + |x + 2| < 11$.

SOLUCIÓN Recuerde la definición de valor absoluto:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se concluye que

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x - 3 \geqslant 0 \\ -(x - 3) & \text{si } x - 3 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geqslant 3 \\ -x + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

De manera análoga,

$$|x + 2| = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x + 2 \geqslant 0 \\ -(x + 2) & \text{si } x + 2 < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \geqslant -2 \\ -x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

■ Establecer casos.

Estas expresiones hacen ver que debe considerar tres casos:

$$x < -2 \qquad -2 \leqslant x < 3 \qquad x \geqslant 3$$

CASO I Si $x < -2$, tiene

$$\begin{aligned} |x - 3| + |x + 2| &< 11 \\ -x + 3 - x - 2 &< 11 \\ -2x &< 10 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

CASO II Si $-2 \leqslant x < 3$, la desigualdad dada queda

$$\begin{aligned} -x + 3 + x + 2 &< 11 \\ 5 &< 11 \qquad \text{(siempre cierto)} \end{aligned}$$

CASO III Si $x \geqslant 3$, la desigualdad se transforma en

$$\begin{aligned} x - 3 + x + 2 &< 11 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

Si combina los casos I, II y III, observe que la desigualdad se satisface cuando $-5 < x < 6$. De modo que la solución es el intervalo $(-5, 6)$. □

En el ejemplo siguiente, primero suponga una respuesta revisando los casos especiales y reconociendo un patrón. A continuación, pruébelo mediante inducción matemática.

Al aplicar el principio de inducción matemática, sigue tres etapas:

ETAPA 1 Se prueba que S_n es verdadera cuando $n = 1$.

ETAPA 2 Se supone que S_n es verdadera cuando $n = k$ y se deduce que S_n es verdadera cuando $n = k + 1$.

ETAPA 3 Se concluye, por el principio de inducción matemática, que S_n es verdadera para toda n.

EJEMPLO 3 Si $f_0(x) = x/(x + 1)$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.

▪ Analogía: intente un problema semejante, más sencillo.

SOLUCIÓN Empiece por hallar fórmulas para $f_n(x)$, para los casos especiales $n = 1, 2$ y 3.

$$f_1(x) = (f_0 \circ f_0)(x) = f_0(f_0(x)) = f_0\left(\frac{x}{x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_2(x) = (f_0 \circ f_1)(x) = f_0(f_1(x)) = f_0\left(\frac{x}{2x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$f_3(x) = (f_0 \circ f_2)(x) = f_0(f_2(x)) = f_0\left(\frac{x}{3x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{x}{3x+1} + 1} = \frac{\dfrac{x}{3x+1}}{\dfrac{4x+1}{3x+1}} = \frac{x}{4x+1}$$

▪ Buscar un patrón.

Note un patrón: en los tres casos que se calcularon, el coeficiente de x en el denominador de $f_n(x)$ es $n + 1$. De modo que conjeture que, en general,

$$\boxed{4} \qquad f_n(x) = \frac{x}{(n+1)x + 1}$$

Para probar esto, aplique el principio de inducción matemática. Ya ha comprobado que (4) es verdadera para $n = 1$. Suponga que es verdadera para $n = k$; es decir,

$$f_k(x) = \frac{x}{(k+1)x + 1}$$

http://libreria-universitaria.blogspot.com

En tal caso $$f_{k+1}(x) = (f_0 \circ f_k)(x) = f_0(f_k(x)) = f_0\left(\frac{x}{(k+1)x+1}\right)$$
$$= \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{x}{(k+1)x+1}+1} = \frac{\dfrac{x}{(k+1)x+1}}{\dfrac{(k+2)x+1}{(k+1)x+1}} = \frac{x}{(k+2)x+1}$$

Esta expresión hace ver que (4) es verdadera para $n = k + 1$. En consecuencia, por inducción matemática, es verdadera para todos los enteros positivos n. □

PROBLEMAS

1. Uno de los catetos de un triángulo rectángulo tiene una longitud de 4 cm. Exprese la longitud de la altura perpendicular a la hipotenusa como función de longitud de esta última.
2. La altura perpendicular a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es de 12 cm. Exprese la longitud de la hipotenusa como función del perímetro.
3. Resuelva la ecuación $|2x - 1| - |x + 5| = 3$.
4. Resuelva la desigualdad $|x - 1| - |x - 3| \geq 5$.
5. Trace la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 4|x + 3|$.
6. Dibuje la gráfica de la función $g(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$.
7. Trace la gráfica de la ecuación $x + |x| = y + |y|$.
8. Dibuje la gráfica de la ecuación $x^4 - 4x^2 - x^2y^2 + 4y^2 = 0$.
9. Esquematice la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que $|x| + |y| \leq 1$.
10. Dibuje la región en el plano que consta de todos los puntos (x, y) tales que
$$|x - y| + |x| - |y| \leq 2$$
11. Evalúe $(\log_2 3)(\log_3 4)(\log_4 5)\cdots(\log_{31} 32)$.
12. (a) Demuestre que la función $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ es una función impar.
(b) Encuentre la función inversa de f.
13. Resuelva la desigualdad $\ln(x^2 - 2x - 2) \leq 0$.
14. Aplique un razonamiento indirecto para probar que $\log_2 5$ es un número irracional.
15. Una conductora emprende un viaje. A lo largo de la primera parte del trayecto conduce a un paso moderado de 30 mi/h; en la segunda parte conduce a 60 mi/h. ¿Cuál es su rapidez promedio en esta travesía?
16. ¿Es cierto que $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$?
17. Compruebe que si n es un entero positivo, entonces, $7^n - 1$ es divisible entre 6.
18. Pruebe que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
19. Si $f_0(x) = x^2$ y $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una fórmula para $f_n(x)$.
20. (a) Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2 - x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$, encuentre una expresión para $f_n(x)$ y aplique la inducción matemática para probarla.

(b) Trace la gráfica de f_0, f_1, f_2, f_3 en la misma pantalla y describa los efectos de la composición repetida.