Derivada parcial y derivada direccional

1. Hallar las dos derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y) = 2x - 3y + 5$
   b) $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 7$
   c) $f(x,y) = x\sqrt{y}$
   d) $f(x,y) = 2y^2\sqrt{x}$
   e) $f(x,y) = x^2 - 5xy + 3y^2$
   f) $f(x,y) = y^3 + 4xy^2 - 1$
   g) $f(x,y) = x^2e^{2y}$
   h) $f(x,y) = xe^{x/y}$
   i) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
   j) $f(x,y) = \ln\sqrt{xy}$
   k) $f(x,y) = \ln\dfrac{x+y}{x-y}$
   l) $f(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$
   m) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{4y^2}{x}$
   n) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$
   ñ) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$
   o) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   p) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
   q) $f(x,y) = \sqrt{2x+y^3}$
   r) $f(x,y) = \tan(2x - y)$
   s) $f(x,y) = \operatorname{sen}(3x)\cos(3y)$
   t) $f(x,y) = e^y \operatorname{sen}(xy)$
   u) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$
   v) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y (t^2-1)dt$

2. Calcular las pendientes de las siguientes superficies en las direcciones de x e y en el punto dado.

   a) $z = 4 - x^2 - y^2$, en $(1,1,2)$.
   b) $z = x^2 - y^2$, en $(-2,1,3)$.
   c) $z = e^{-x}\cos y$, en $(0,0,1)$.
   d) $z = \cos(2x - y)$, en $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

3. Calcular las cuatro derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$
   b) $f(x,y) = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$
   c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
   d) $f(x,y) = \ln(x - y)$
   e) $f(x,y) = e^x \tan y$
   f) $f(x,y) = 2xe^y - 3ye^{-x}$
   g) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$
   h) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$

4. Hallar la derivada direccional de la función f en P en la dirección de v.

   a) $f(x,y) = 3x - 4xy + 5y, \quad P = (1,2), \quad v = \frac{1}{2}(\mathtt{i} - \sqrt{3}\mathtt{j})$
   b) $f(x,y) = x^3 - y^3, \quad P = (4,3), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathtt{i} + \mathtt{j})$
   c) $f(x,y) = xy, \quad P = (2,3), \quad v = \mathtt{i} + \mathtt{j}$
   d) $f(x,y) = \frac{x}{y}, \quad P = (1,1), \quad v = -\mathtt{j}$
   e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \quad P = (3,4), \quad v = 3\mathtt{i} - 4\mathtt{j}$
   f) $f(x,y) = \arccos xy, \quad P = (1,0), \quad v = \mathtt{i} + 5\mathtt{j}$
   g) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y, \quad P = (1, \frac{\pi}{2}), \quad v = -\mathtt{i}$
   h) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad P = (0,0), \quad v = \mathtt{i} + \mathtt{j}$

5. Hallar la derivada direccional de la función f en dirección de $u = \cos\theta\mathtt{i} + \operatorname{sen}\theta\mathtt{j}$.

   a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$
   b) $f(x,y) = \frac{y}{x+y}, \quad \theta = -\frac{\pi}{6}$
   c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x - y), \quad \theta = -\frac{\pi}{3}$
   d) $f(x,y) = xe^y, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

6. Hallar la derivada direccional de la función f en P en dirección de Q.

   a) $f(x,y) = x^2 + 4y^2, \quad P = (3,1), \quad Q = (1,-1)$

b) $f(x,y) = \cos(x+y)$, $\quad P = (0,\pi)$, $\quad Q = (\pi/2, 0)$

7. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Calcular las derivadas parciales y la derivada direccional respecto al vector $(1,1)$ en el origen.

8. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Calcular $D_v f(0,0)$ para todo vector unitario v.

9. Mostrar que la función $f(x,y) = |x| + |y|$ no admite derivadas parciales en el origen.

10. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    Probar que existe $D_v f(0,0)$ para todo vector unitario v pero f no es continua en el origen.

11. Sea $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$. Determinar todas las direcciones v para las cuales existe la derivada direccional en el origen. Mostrar que f es continua en $(0,0)$.

12. Encontrar la dirección en que la función $f(x,y) = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1,1)$.

13. Supongamos que la función $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x,y). Estando parados en la posisción $(0,1)$, determinar la dirección en la que debemos caminar para escalar más rápido.

14. Estudiar continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad en el origen de:

    a) $f(x,y) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(4 \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

    b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

15. Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

    Probar que, en el origen, f es continua, existe $D_v f(0,0)$ para toda dirección v, pero no es diferenciable.