Límite doble y continuidad

1. Verificar los siguientes límites utilizando la definición.

   a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} x = 2$

   b) $\lim_{(x,y)\to(1,-3)} y = -3$

   c) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

   d) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$

   e) $\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8$

   f) $\lim_{(x,y)\to(x_0,0)} x^2 = {x_0}^2$

2. Hallar los siguientes límites (si existen). Si alguno no existe, explicar por qué.

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x^2+y}$

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2-y^2}$

   c) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{xy-1}{1+xy}$

   d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x+y^3}$

3. Evaluar el límite y analizar la continuidad en el origen de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y) = e^{xy}$

   b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)(y^2+1)}$

   c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

   d) $f(x,y) = 1 - \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

4. Determinar si existe el límite en el origen y discutir la continuidad de la función. Tener en cuenta las trayectorias sugeridas.

   a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $[y=0,\ y=x]$

   b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$ $[y=0,\ y=x]$

   c) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $[x=y^2,\ x=-y^2]$

   d) $f(x,y) = \dfrac{2x-y^2}{2x^2+y}$ $[y=0,\ y=x]$

5. Analizar la continuidad de las funciones f y g. Explicar cualquier diferencia.

   a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

   $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 2 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

6. Hallar los siguientes límites (si existen). Si no existen, justificar.

   a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

   b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^4+4y^2}$

   c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2y}$

   d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{10xy}{2x^2+3y^2}$

   e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2+1}$

   f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y^4}{x^2+y^4}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x(y-2)^2}{x^2+y^2-2y+4}$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2+y^2+(x-1)y}{(x-1)^2+y^2}$

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$

7. Utilizar las coordenadas polares para hallar los siguientes límites. (Sugerencia: tomar $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$ y observar que $(x,y)\to(0,0)$ implica $r\to 0$.)

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

   c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

   d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

   e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

   g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

   h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

8. Analizar la continuidad de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} & \texttt{si } xy \neq 0 \\ 1 & \texttt{si } xy = 0 \end{cases}$

   b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-y^2)}{x^2-y^2} & \texttt{si } x^2 \neq y^2 \\ 1 & \texttt{si } x^2 = y^2 \end{cases}$

9. Considerar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$

   a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.
   b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.
   c) Determinar si existe o no el límite en $(0,0)$.

10. Considerar $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

    a) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.
    b) Determinar el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.
    c) Determinar si existe o no el límite en $(0,0)$.

11. Dada la función $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ definir $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen y demostrarlo.

12. Dada la función $f(x,y) = \dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3+2|y|^3}$ definir $f(-1,0)$ de manera que f sea continua en $(-1,0)$ y demostrarlo.

13. Sean:

    - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l_1$
    - $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = l_2$.

    Demostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y)+g(x,y)] = l_1 + l_2$.