

Segundo Parcial

5 de diciembre de 2017

1. Considerar el conjunto siguiente: $\{\mathbf{V}, \mathbf{F}, \boxed{?}\}$ (verdadero, falso, indefinido) y la operación binaria **AND** (\wedge) definida normalmente para \mathbf{V} y \mathbf{F} y como sigue con $\boxed{?}$:

$$\boxed{?} \wedge \boxed{?} = \boxed{?}$$

$$\boxed{?} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{V} \wedge \boxed{?} = \boxed{?}$$

$$\boxed{?} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F} \wedge \boxed{?} = \mathbf{F}.$$

Muestre las propiedades de dicha estructura (¿Es maga? ¿semigrupo? ¿monoide? ¿grupo? ¿grupo conmutativo?)

2. Considerar el conjunto $\mathbb{B} = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ con la operación binaria **XOR** (\oplus) y el conjunto $\mathbb{D} = \{0, 1\}$ con la operación binaria suma módulo 2 ($+_2$) definida por $a +_2 b = (a + b) \bmod 2$.

Sea $\varphi : (\mathbb{B}, \oplus) \rightarrow (\mathbb{D}, +_2)$ definida por $\varphi(\mathbf{V}) = 1$ y $\varphi(\mathbf{F}) = 0$.

- a) Determinar si φ define un homomorfismo de grupos.
- b) Determinar $\text{Im}(\varphi)$
- c) Determinar $\ker(\varphi)$
- d) Determinar si φ define un monomorfismo de grupos.
- e) Determinar si φ define un epimorfismo de grupos.
- f) Determinar si φ define un isomorfismo de grupos.

Justificar bien todas las respuestas.

3. Considere el conjunto $\mathbb{B} = \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ y el cuerpo de los reales con las operaciones usuales $(\mathbb{R}, +, \times)$. Considerar $\langle \mathbb{B} \rangle$ como un espacio vectorial sobre \mathbb{R} (es decir, los vectores \vec{b} de $\langle \mathbb{B} \rangle$ tienen la forma $\vec{b} = \alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{F}$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), con la suma de vectores y producto por escalar dados como sigue:

- Dados $\vec{b}_1 = \alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{F}$ y $\vec{b}_2 = \delta\mathbf{V} + \gamma\mathbf{F}$ definimos la suma como $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 = (\alpha + \delta)\mathbf{V} + (\beta + \gamma)\mathbf{F}$
- Dados $\vec{b} = \alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{F} \in \langle \mathbb{B} \rangle$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos el producto por escalar como $\lambda\vec{b} = \lambda(\alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{F}) = \lambda\alpha\mathbf{V} + \lambda\beta\mathbf{F}$.

- a) Mostrar que $\langle \mathbb{B} \rangle$ es efectivamente un espacio vectorial sobre \mathbb{R} con las operaciones definidas.
- b) Los vectores $\mathbf{V} + 2\mathbf{F}$ y $2\mathbf{V} - \mathbf{F}$, ¿son LI?

4. Considerar los siguientes vectores del espacio vectorial \mathcal{M}_2 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Hallar la dimensión y una base del subespacio engendrado por estas 3 matrices.
- b) Hallar las coordenadas de las tres matrices en la base elegida.
- c) Completar la base elegida en el punto 4a para que sea base de \mathcal{M}_2 .