

Recuperatorio

Sistemas de ecuaciones y matrices

1. Considerar el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 7 \\ x + z = 1 \\ 2x + 6y + 2z = 14 \end{cases}$$

- a) Resolver el sistema con el método de resolución directa.
b) Escribir el sistema en la forma matricial $AX = B$. Determinar si el sistema posee única solución, infinitas o ninguna, calculando el rango de A y $A|B$. Justificar.
2. Considerar el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y + 1z = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

- a) Escribir el sistema en la forma matricial $AX = B$.
b) A través del determinante de A decir si es invertible. Justificar y en base a la respuesta obtenida decir cómo deberían ser los rangos de A y $A|B$ (sin calcularlos).
c) Resolver el sistema con el método de Gauss.
d) Si A es invertible calcular nuevamente el resultado utilizando su inversa.

Aritmética entera

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Demostrar que si $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (bc)$.
4. Determine el cociente q y el resto r para cada caso utilizando el algoritmo de la división:

a) $a = 60, b = 3$.

b) $a = 50, b = 4$.

Aritmética modular

5. Considerar la siguiente ecuación de congruencia lineal:

$$6x \equiv 8 \pmod{2}$$

- a) Determinar si tiene solución. Justificar. b) Encontrar las soluciones.

6. Determinar en qué clase de equivalencia de \mathbb{Z}_5 está cada uno de los siguientes números:

$$3, 16, 28, 40$$

Probabilidad

7. Se tiene sólo las cartas de basto, del 1 al 5, de un mazo de cartas españolas. En tres veces, se mezcla el mazo, se saca una carta al azar, se repone y se vuelve a mezclar el mazo.
- a) Definir el espacio muestral de manera que sea equiprobable.
b) Definir el evento $U =$ “Salieron todos 1”
c) Definir el evento $P =$ “La suma entre las cartas es par”
d) Definir el evento $R =$ “Las cartas estaban ordenadas de menor a mayor”
e) Calcular la probabilidad de los eventos:

1) U 2) P 3) R 4) $P \cup R$ 5) $P \cap U$ 6) $R \cap U$

Estructuras algebraicas

8. Sea $B = \{0, 1\}$ definimos las siguientes operaciones:

\oplus	0	1
0	0	1
1	1	0

\equiv	0	1
0	1	0
1	0	1

a) Determinar si (B, \oplus) o (B, \equiv) forman alguna de las estructuras vistas en la materia, sabiendo que por lo menos dichas operaciones son asociativas (no hace falta demostrarlo).

b) Determinar si (B, \oplus, \equiv) o (B, \equiv, \oplus) forman un cuerpo.

9. Dadas las operaciones del punto anterior, considerar la siguiente función, que utiliza la negación vista en Álgebra de Bool:

$$f : (B, \oplus) \rightarrow (B, \equiv)$$

$$f(x) = \neg x$$

Marcar cuáles afirmaciones son correctas, justificando en cada caso:

- La función f es un homomorfismo.
- La función f es un monomorfismo.
- La función f es un epimorfismo.
- La función f es un isomorfismo de monoides.
- La función f es un isomorfismo de grupos.

Espacios vectoriales

10. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ el conjunto $\{(1, 1), (3, 5), (1, 2), (9, 8), (6, 3)\}$.

- a) Calcular $\dim\langle S \rangle$
- b) Dar un subconjunto de S que sea base de \mathbb{R}^2 .
- c) Calcular las coordenadas de $(7, 13)$ en esa base.

11. Sea $\mathbb{M}_2 \subseteq \mathcal{M}_2$ el conjunto de las matrices cuadradas de tamaño 2×2 cuyos coeficientes son los elementos del conjunto de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0], [1], [2]\}$, es decir, las clases de equivalencia de \mathbb{Z} módulo 3. Sus operaciones de suma y producto se definen de la siguiente manera:

+	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[1]	[2]
[1]	[1]	[2]	[0]
[2]	[2]	[0]	[1]

.	[0]	[1]	[2]
[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[0]	[1]	[2]
[2]	[0]	[2]	[1]

Determinar si \mathbb{M}_2 es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ con la suma de matrices y el producto por escalar de matrices.